ICM

МОСКВА 1966

МЕЖДУНАРОДНЫЙ КОНГРЕСС МАТЕМАТИКОВ
INTERNATIONAL GONGRESS OF MATHEMATICIANS
CONGRES INTERNATIONAL DES MATHEMATICIENS
INTERNATIONALER MATHEMATIKERKONGREß

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
по приглашению

ABSTRACTS OF REPORTS
on invitation

RÉSUMÉS DES RAPPORTS
sur invitation

RESÜMÉES DER VORTRÄGE
auf Einladung

МОСКВА 1966

Тезисы расположены в алфавитном порядке авторов (сначала латинский, затем русский алфавит).

The abstracts are arranged in the alphabetic order of authors' names (first Latin, then Russian alphabet).

Les résumés sont disposés en ordre alphabétique des auteurs (d'abord en ordre alphabétique latin, puis russe).

Die Resümees sind in alphabetischer Anordnung der Familiennamen der Autoren angeführt (zuerst im lateinischen und dann im russischen Alphabet).

ЧАСОВЫЕ ДОКЛАДЫ

ONE-HOUR REPORTS

RAPPORTS D'UNE DURÉE D'UNE HEURE

VORTRAGE VON EINER STUNDE DAUER

J. F. Adams

A SURVEY OF HOMOTOPY-THEORY

This lecture will be purely expository. It will try to explain to the non-specialist what homotopy-theory is about, and what applications can be expected from it.

1. Basic definitions and scope of homotopy-theory. Typical problems; some applications.
2. Functors like homotopy groups; fiberings, suspension theory.
3. Functors like cohomology groups; cofiberings. Spectral sequences and their uses.
4. Conclusions.

M. Artin

THE ETALE TOPOLOGY OF SCHEMES

The etale topology on a variety is obtained by replacing the notion of open set by that of etale (= flat and unramified) map. It was introduced by Grothendieck in order to obtain a cohomology theory which one could use to state Weil's analogues to the Riemann Hypothesis for higher dimensional varieties over finite fields, and to prove the rationality of the zeta functions of such varieties. Various basic properties of the etale topology, such as its relationship with the classical topology for a variety over the complex numbers, and the nature of the cohomology theory to which it gives rise, are now fairly well understood. We will discuss the recent work of various authors (Grothendieck, Lubkin, Mazur, Tate, Verdier and others) in this area.

M. Atiyah

GLOBAL ASPECTS OF THE THEORY OF ELLIPTIC DIFFERENTIAL OPERATORS

INTRODUCTION

The subject matter of this talk lies in the area between Analysis and Algebraic Topology. More specifically, I want to discuss the relations between the analysis of *linear* partial differential operators of *elliptic* type and the algebraic topology of *linear* groups of *finite*-dimensional vector spaces. I will try to show that these two topics are intimately related, and that the study of each is of great importance for the development of the other.

The theory of elliptic differential equations has of course a long and rich history, with its origins in the study of the Laplace equation and of the closely-associated Cauchy—Riemann equations. Its connection with topology, via the theory of holomorphic functions and Riemann surfaces, is equally classical. Its development in the last fifty years or so has however followed two rather separate courses.

On the one hand there has been the purely *analytical development*, the qualitative study of general elliptic operators. Here the emphasis has been on extending the basic theory of the Laplace operator to general operators of the same type—what we now call elliptic operators. The questions studied include regularity of solutions, boundary conditions and more recently the extension to suitable classes of integro-differential operators—now called pseudo-differential operators. On the whole this sort of work was carried out for domains in Euclidean space, though the extension to more general manifolds presents nothing essentially new.

The second development has been the more detailed or quantitative study of the classical operators and their associated structures. This essentially includes the whole of algebraic geometry treated by topological and transcendental methods. The pioneering work in this field was of course done by Hodge some thirty years ago.

Roughly speaking we might say that the analysts were dealing with complicated operators and simple spaces (or were only asking simple questions), while the algebraic geometers and topologists were only dealing with simple operators but were studying rather general manifolds and asking more refined questions.

In recent times, the last five years or so, some serious attempts have been made to integrate these two different developments. Each seems now to have reached such a stage of maturity that it can confidently offer its services to the other half. For example, some of the ideas and techniques developed in the general theory of partial differential equations have been very successfully applied by Hörmander [12] to the study of complex manifolds. My own interests, however, have been in the reverse direction and I would like to spend the rest of my time discussing the Riemann—Roch or Index Problem.

1. THE RIEMANN—ROCH THEOREM

The classical Riemann—Roch theorem is concerned with giving a formula for the dimension of the space of meromorphic functions on a compact Riemann surface having poles of orders $\leqslant \nu_i$ at points P_i. If $P = \sum \nu_i P_i$ then the dimension $l(P)$ is given by:

$$l(P) - i(P) = \deg P - g + 1$$

where $\deg P = \sum \nu_i$. Here $i(P)$ is in effect $l(Q)$ for a suitable Q so that what is computed is a difference of two numbers of the same sort.

This is in the nature of the problem because as we vary P (i.e. if we vary P_i) the number $l(P)$ can jump, but the difference $l(P) - i(P)$ remains constant. Moreover one can, in certain circumstances, prove that $i(P) = 0$ (this happens if $\deg P > 2g - 2$) and one then has a genuine formula for $l(P)$.

The Riemann—Roch theorem is one of the basic theorems of algebraic geometry. It is an example of a quantitative or "refined" result. Considerable effort was devoted to extending it to higher dimensions, and success was achieved first by Hirzebruch [9] in 1954 and then (purely algebraically) by Grothendieck [6] in 1957.

On the other hand analysts had been independently studying the "index problem" for elliptic operators [8]. If D is an elliptic operator on a compact manifold (without boundary for simplicity) then the space of solutions of $Du = 0$ is finite-dimensional. If one wants a formula for this dimension $l(D)$ one finds that $l(D)$ can jump, but that

$$\operatorname{index} D = l(D) - l(D^*)$$

(where D^* is the adjoint problem) is constant under continuous variation of D. The problem therefore is to find a formula for index D. The analogy with the Riemann—Roch theorem is obvious. Moreover since holomorphic functions are solutions of $\bar{\partial} u = 0$ we can easily set up the Riemann—Roch problem as an index problem. To solve the index problem in general is therefore to extend the Riemann—Roch theorem from the domain of holomorphic function theory to that of general elliptic systems.

In low dimensions, when the number of independent variables is 1 or 2, explicit answers were obtained by fairly elementary methods. In general, however, one is faced with two serious problems:

(A) We have to find suitable topological invariants of the pair (X, D) where X is the base manifold and D the elliptic operator.

(B) We have then to find the explicit formula for index D in terms of these invariants.

For example in the case of the classical Riemann—Roch theorem the topological invariants are just the genus g and $\deg(P)$.

2. TOPOLOGY OF THE LINEAR GROUPS

For the classical structures (Riemannian and complex) an extensive theory of topological invariants, called characteristic classes, has been developed (cf. [9]). These classes are all generalizations of the Euler number, i.e. the number of singularities of a vector field. Roughly speaking, one considers the cycles where a given number of vector fields become linearly dependent. Fundamentally these homology invariants stem from the homology of the linear groups $GL(n, \boldsymbol{R})$ and $GL(n, \boldsymbol{C})$. The Riemann—Roch theorem of Hirzebruch gives a formula in terms of these characteristic classes, the actual formula being a very complicated one going back to Todd and involving the generating function $x/(1-e^{-x})$ of the Bernouilli numbers.

It is a remarkably fortunate fact that an elliptic operator D also defines invariants of the characteristic class type. It is not difficult to see how these arise. Let us recall that a homogeneous constant coefficient $N \times N$ matrix of differential operators

$$P = \left[P_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right], \quad i, j = 1, \ldots, N,$$

is elliptic if $\xi \neq 0$ (and real) $\Rightarrow \det P(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$. Then P defines a map $\xi \to P(\xi)$ of $S^{n-1} \to GL(N, \boldsymbol{C})$, where S^{n-1} is the unit sphere in R^n. This shows at once that the homotopy and hence the homology of $GL(N, \boldsymbol{C})$ enters into the study of elliptic operators. Now according to a fundamental theorem of Bott [7] the homotopy groups

$$\pi_{n-1}(GL(N, \boldsymbol{C}))$$

are 0 for n odd and isomorphic to the integers for n even (provided $2N \geqslant n$). Thus if n is even and $2N \geqslant n$, P defines an integer which may be called its degree. This is a generalization of the obvious degree in case $N = 1$, $n = 2$ and it may be computed explicitly as the value of an integral $\int\limits_{S^{n-1}} \omega(P)$ where $\omega(P)$ is a differential expression in P generalizing the well-known formula $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^1} \frac{dP}{P}$.

Using these invariants of a general elliptic operator D (together with the ordinary characteristic classes of X) one can then give an explicit formula for index D which is remarkably similar to that occurring in the Riemann—Roch formula. This is not accidental and has a quite deep significance. Very roughly one can say that, as far as the topology goes, the classical operators are just as complicated as the most general ones so that the Riemann—Roch formula gives a fair indication of the general case.

Let me make some very general remarks about the nature of the proof [1]) of the general index theorem. First of all, when X is a simple space like a sphere we can use Bott's theorem to deform D into a standard operator whose index may be computed directly. In the case of a complicated X we embed X in a sphere S and construct an elliptic operator D' on S with

$$\operatorname{index} D = \operatorname{index} D'.$$

We are then reduced to the preceding case. It is important to note that even if we start with a nice D on X (e.g. coming from a complex

[1]) There are now two proofs of the index theorem. The first, modelled on Hirzebruch's proof of the Riemann—Roch Theorem, appears in [4], [15]. The second, which is closer to the work of Grothendieck, will appear in [5]. The remarks here refer to the second proof.

structure it is not in general possible to get a nice D'. Thus it is not possible to restrict oneself to nice or classical operators. To prove the Riemann—Roch theorem for arbitrary compact complex manifolds one needs to go outside this category. The reason why the case of (projective) algebraic varieties is easier is because one can use the very special holomorphic embedding $X \subset P_N(\boldsymbol{C})$, whereas in general we have no alternative but to use the non-holomorphic embedding $X \subset S$.

3. INTEGRAL FORMULAE

Characteristic classes have a representation by differential forms which is a generalization of the Gauss—Bonnet formula

$$E = \int K$$

expressing the Euler number as the integral of the scalar curvature (suitably normalized). The integral formula for the (local) degree of an elliptic operator mentioned in § 2 is of the same type. Using such expressions it is possible in principle (though very complicated in practice) to express the index D as an integral $\int_X \omega(D)$. Here $\omega(D)$ depends on the coefficients of D and on a choice of Riemannian metric on X. Although this formula is algebraically complicated it is analytically fairly simple, in the sense that it involves only the first few derivatives of the coefficients of D (and the metric).

There is, however, an entirely different and purely analytical approach to the index problem which leads to another formula for index D as an integral. Unfortunately this formula is extremely complicated and it involves approximately n derivatives where n is the dimension of X. Only for low values of X it is easy to identify it with the curvature-type formula given by the other method.

This analytical method is essentially very classical except that no-one seems to have considered using it on the index problem. The idea is as follows. Suppose first that Δ is a self adjoint positive elliptic operator. Then, by the spectral theorem, we can define Δ^{-s} for $s \in \boldsymbol{C}$ and consider the "Zeta-function"

$$\zeta(s) = \operatorname{Trace} \Delta^{-s} = \Sigma \lambda^{-s}$$

where λ runs over the (discrete) eigenvalues of Δ. This converges if Re (s) is large and $\zeta(s)$ can be analytically continued as a meromorphic function on the entire s-plane. Moreover $s = 0$ turns out not to be a pole, and the value $\zeta(0)$ can be computed explicitly in terms of Δ. For the Laplace operator these results are due to Minakshisundaran and Pleijel [14]. Their extension to the general case can be done by pseudo-differential operator techniques (cf. [16]). Alternatively $\zeta(0)$ can be interpreted as the constant term in the asymptotic expansion of trace $(e^{-\Delta t})$ as $t \to 0$, where $e^{-\Delta t}$ (for $t > 0$) denotes the solution of the generalized Heat equation

$$\frac{\partial}{\partial t} + \Delta = 0.$$

Suppose now that D is elliptic. Introducing metrics we can consider D^* the adjoint of D. Then

$$\Delta_0 = 1 + DD^*, \quad \Delta_1 = 1 + D^*D$$

are positive self-adjoint operators. Let

$$\zeta_i(s) = \operatorname{Trace} \Delta_i^{-s}, \quad i = 1, 2.$$

Then it is not difficult to show that

$$\zeta_0(s) - \zeta_1(s) = \operatorname{index} D$$

is independent of s. Hence putting $s = 0$ and using the explicit formula mentioned we get a formula for index D. In fact one can use other integer values of s, besides 0. Each will give a formally different expression of index D as an integral. However $s = 0$ is the simplest.

4. GENERALIZATIONS

4.1. Boundary problems

For elliptic operators with "coercive" boundary conditions [11] one also has an index problem. It turns out that these boundary conditions have a beep topological significance. For instance if D admits any coercive boundary conditions then the local degree of D must be zero. In view of this it is not surprising that one ends up (cf. [2]) with an explicit index formula of much the same type as in the case of manifolds without boundary. Moreover, as a by-product, the examination of the topological meaning of the boundary conditions led to a new and elementary proof [1] of the basic periodicity theorem of Bott for $\pi_i(GL(N, \mathbf{C}))$.

4.2. Lefschetz fixed-point formula

Suppose $f: X \to X$ is a differentiable map which "commutes" with a given D (one may think of a holomorphic map as the typical example). Then we can define [1]) a kind of "Lefschetz number":

$$L(f) = \operatorname{Trace}(f \mid \operatorname{Ker} D) - \operatorname{Trace}(f \mid \operatorname{Coker} D).$$

If f has isolated fixed points of multiplicity ± 1 one has a formula of the following type [3]

$$L(f) = \Sigma \nu(P)$$

---

[1]) Coker $D \cong \operatorname{Ker} D^*$ but this involves a metric and f need not preserve a metric. Thus f acts naturally on Coker D, but not on Ker D^*.

where P runs over the fixed points of f and $\nu(P)$ is a complex number depending only on the differential $(df)_P$. This may be regarded as a generalization of the classical Lefschetz fixed-point formula. The proof is by the method of § 3, using Zeta-functions

$$\zeta(s) = \mathrm{Trace}\,(\Delta^{-s} \circ f^*)$$

which depend on D and f. The point is that because of the hypothesis on the fixed points of f it turns out that these Zeta-functions have no poles and $\zeta(0)$ is then very easily computed. In fact it depends only on f and not on Δ.

4.3. Group-situations

Assume G is a compact group of automorphisms of (X, D). Then Ker D and Coker D are G-modules and $g \to L(g)$ is a virtual character of G. Since the characters of G are a discrete set we can again use deformation methods and one obtains a theorem that expresses $L(g)$ as a sum over the fixed components of g, each term being an integral of similar type to that occurring in the index formula. These formulae (and also the formula of (4.2)) applied to a homogeneous space $X = G/H$ include the Hermann Weyl character formula. They also lead (cf. [10]) to the Langland's formula [13] for dimensions of spaces of automorphic forms.

4.4. Real operators

So far we have discussed only invariants which are integers or complex numbers and these may, if we wish, be expressed as integrals. It is therefore interesting to point out that there are analytical invariants which are not of this type. Thus let D be a *real skew-adjoint* elliptic operator. Then index $D = 0$ is not interesting but it is not difficult to see that dim (Ker D) mod 2 is a deformation invariant. This is a consequence of the fact that the non-zero eigenvalues of D occur in conjugate pairs $(\pm i\mu)$. It turns out that this invariant can be viewed as a kind of index and by methods similar to those above we can express this mod 2 invariant in terms of suitable invariants. Here what are relevant are the homotopy groups $\pi_i(GL(N, \mathbf{R}))$. For N large these are (cf. [7]) periodic with period 8 and π_i is of order 2 if $i \equiv 1$ or 2 mod 8. These mod 2 homotopy invariants give what is required.

CONCLUSION

I have presented things so far in the form of topology being used to assist in computing an analytic invariant. The relation of the topology to the analysis however is very intimate indeed—as I have indicated in connection with boundary problems. There are in fact parts of the theory where the analysis has to be used to help the topology. For example the G-equivariant homotopy classes of maps

$$S(V) \longrightarrow GL(W),$$

where V, W are representation spaces of G (with W "large") and S (V) denotes the unit sphere of V, can be determined by use of elliptic operators. So far there is no other method.

The situation here is analogous to that in Morse's theory of critical points. In the first place one would tend to say that the number of critical points of a real-valued function f on a manifold X could be estimated in terms of the topological invariants of X. The theory has however been used extensively the other way round: one constructs suitable functions and obtains information on X from the critical points of X. All the modern structure theory of differentiable manifolds is based on this point of view.

I would like to conclude with some philosophical remarks. In my view the close relation between topology of linear groups and the analysis of elliptic operators stems from the following three basic properties they have in common:

(i) Linearity
(ii) Stability (under deformation)
(iii) Finiteness.

REFERENCES

[1] Atiyah M. F., Bott R., On the periodicity theorem for complex vector bundles, *Acta Math.* **112**, 229—247 (1964).

[2] Atiyah M. F., Bott R., The index problem for manifolds with boundary, Bombay Colloquium on Differential Analysis (Oxford University Press) 1964, 175—186.

[3] Atiyah M. F., Bott R., A Lefschetz fixed point formula for elliptic differential operators, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966), 245—250.

[4] Atiyah M. F., Singer I. M., The index of elliptic operators on compact manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 422—433.

[5] Atiyah M. F., Singer I. M., The index of elliptic operators I (to appear).

[6] Borel A., Serre J. P., Le Théorème de Riemann—Roch, *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 97—136.

[7] Bott R., The stable homotopy of the classical groups, *Ann. of Math.* **70**, 313—337 (1959).

[8] Gelfand I. M., On elliptic equations, Uspehi Math. Nauk, 15,3, 121—132 (1960) (Russian Math. Surveys 15,3 (1960), 113—123).

[9] Hirzebruch F., Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer, 1966.

[10] Hirzebruch F., Elliptische Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten, Weierstrass Festband, Westdeutscher Verlag, Opladen 1966.

[11] Hörmander L., Linear Partial Differential Operators, Springer, 1964.

[12] Hörmander L., Introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand 1966.

[13] Langlands R. P., The dimension of spaces of holomorphic forms, *Amer. J. Math.* **85**, 99—125 (1963).

[14] Minakshisundaran S., Pleijel A., Eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannien manifolds, *Canadian J. Math.* 242—256 (1949).

[15] Palais R., Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, *Annals of Math. Studies*, **57** (Princeton 1965).

[16] Seeley R. T., Fractional powers of elliptic operators (to appear).

R. Bellman

DYNAMIC PROGRAMMING AND MODERN CONTROL THEORY

The report includes following parts:

1. Introduction.
2. Dynamic programming.
3. Analytic aspects.
4. Approximation in policy space.
5. Positive operators.
6. Quasilinearization.
7. Realizations and applications.
8. The calculus of variations and control processes.
9. The calculus of variations as a continuous dynamic programming process.
10. Analytic aspects.
11. Dynamic programming processes of stochastic type.
12. Dynamic programming processes of adaptive type.
13. Intelligent machines, artificial intelligence and combinatorics.
14. Invariant imbedding and mathematical physics.

L. Carleson

CONVERGENCE AND SUMMABILITY OF FOURIER SERIES

Let $f(x)$ be an integrable function on $(-\pi, \pi)$ and denote by $s_n(x)$ the partial sums of the Fourier expansion of $f(x)$. A classical example of Kolmogorov shows that $s_n(x)$ can diverge everywhere. This result can easily be improved to $s_n(x) \neq O\,\varepsilon(n) \log\log n$). I have recently proved that if $f(\log^+|f|)^{1+\delta}$ is summable for some $\delta > 0$, then $s_n(x) = o(\log\log n)$. For $f \in L^2$, $s_n(x)$ even converges.

The background for the validity of these theorems seems to be a combinatorial property of the Fourier system which aslo gives some insight why there is an arrangement of the terms of the Fourier series for which an L^2-series diverges a.e. A brief outline of the proofs of the above results will be presented and a survey of the open problems will be given.

Harish-Chandra

HARMONIC ANALYSIS ON SEMISIMPLE LIE GROUPS

Let G be a locally compact, separable and unimodular group, λ the left-regular representation of G on $L_2(G)$ and $\mathfrak{E}$ the set of all equivalence classes of irreducible unitary representations of G. A class $\omega \in \mathfrak{E}$ is called discrete if there exists a closed, invariant and irreducible subspace $\mathfrak{H}$ of $L_2(G)$ such that the restriction of λ on $\mathfrak{H}$ lies in ω. Let $\mathfrak{E}_d$ denote the set of all discrete classes. Then $\mathfrak{E}_d$ is also called the discrete series for G. Let π be an irreducible unitary representation of G on a Hilbert space $\mathfrak{H}$ and ω the class of π. Then ω is discrete if and only if

$$\int_G |(\varphi, \pi(x)\psi)|^2 dx < \infty$$

for all $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$. Moreover then there exists a number $d(\omega) > 0$, called the formal degree of ω (or π) such that

$$\int_G |(\varphi, \pi(x)\psi)|^2 dx = |\varphi|^2 |\psi|^2 d(\omega)^{-1} \quad (\varphi, \psi \in \mathfrak{H}).$$

Now suppose G is a connected semisimple Lie group with finite centre.

Theorem 1. *In order that $\mathfrak{E}_d$ should not be empty, it is necessary and sufficient that G should have a compact Cartan subgroup.*

Let $l = \operatorname{rank} G$ and $D(x)$ the coefficient of t^l in $\det(t + 1 - \operatorname{Ad}(x))$ $(x \in G)$, where t is an indeterminate. Then D is an analytic function on G which is not identically zero. Let G' be the set of all $x \in G$ such that $D(x) \neq 0$. Fix a maximal compact subgroup K of G and let $\mathfrak{Z}$ denote the algebra of all differential operators on G which commute with both left and right translations. A distribution T on G is said to be $\mathfrak{Z}$-finite if the space of all distributions of the form zT $(z \in \mathfrak{Z})$ has finite dimension. Similarly it is called K-finite if the left and right translates of T under K span a vector space of finite dimension. It is easy to see that if T is both K-finite and $\mathfrak{Z}$-finite then it is an analytic function. We say that T is invariant if it is left fixed by all inner automorphisms of G.

Theorem 2. *Let Θ be an invariant and $\mathfrak{Z}$-finite distribution on G. Then Θ is a locally summable function on G which is analytic on G'.*

Let π be an irreducible unitary representation of G and ω the class of π. For any $f \in C_c^\infty(G)$, define

$$\pi(f) = \int f(x)\pi(x)\,dx.$$

Then $\pi(f)$ is of the trace class and there exists a distribution Θ_ω on G such that

$$\Theta_\omega(f) = \operatorname{tr} \pi(f) \qquad (f \in C_c^\infty(G)).$$

It follows from Theorem 2 that Θ_ω is a locally summable function which is analytic on G'.

For any $\gamma \in G$, let G_γ denote the centralizer of γ in G. It is not difficult to show that G_γ is unimodular and therefore the factor space $\bar{G} = G/G_\gamma$ has an invariant measure $d\bar{x}$. Put

$$\gamma^{\bar{x}} = x\gamma x^{-1} \qquad (x \in G)$$

where $x \to \bar{x}$ is the projection of G on $\bar{G}$. An element $\gamma \in G$ is said to be elliptic if it lies in some compact Cartan subgroup of G.

Theorem 3. (The Selberg Principle). *Let γ be a semisimple element of G and f a K-finite and $\mathfrak{Z}$-finite function in $L_2(G)$. Then the integral*

$$\int_{G/G_\gamma} f(\gamma^{\bar{x}})\, d\bar{x}$$

is well-defined and if γ is not elliptic, its value is zero.

Now suppose G has a compact Cartan subgroup B which we may assume to be contained in K. Let $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$ be the Lie algebras of G and B respectively and G_c the simply connected complex analytic group corresponding to the complexification $\mathfrak{G}_c$ of $\mathfrak{G}$. We assume that G is the real analytic subgroup of G corresponding to $\mathfrak{G}$. Let P be the set of all positive roots of $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$ and put

$$\tilde{\omega} = \prod_{\alpha \in P} H_\alpha, \quad \Delta(\exp H) = \prod_{\alpha \in P} (e^{\alpha(H)/2} - e^{-\alpha(H)/2}) \quad (H \in \mathfrak{B}).$$

Let $\mathfrak{F}$ be the space of real-valued linear functions on $(-1)^{1/2}\, \mathfrak{B}$ and L the lattice of those $\lambda \in \mathfrak{F}$ for which there exists a character ξ_λ of B given by $\xi_\lambda(\exp H) = e^{\lambda(H)}$ $(H \in \mathfrak{B})$. $\tilde{\omega}$ can be considered as a differential operator on B as well as a polynomial function on $\mathfrak{F}$. Put $W_G = \tilde{B}/B$ where $\tilde{B}$ is the normalizer of B in G. Then W_G is a subgroup of the Weyl group of $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$. Let L' denote the set of all $\lambda \in L$ such that $\tilde{\omega}(\lambda) \neq 0$.

Theorem 4. *For any $\lambda \in L'$ there exists exactly one invariant eigendistribution Θ_λ of $\mathfrak{Z}$ such that*

1) $\sup_{x \in G'} |D(x)|^{1/2} |\Theta_\lambda(x)| < \infty$,

2) $\Delta(b)\, \Theta_\lambda(b) = \sum_{s \in W_G} \varepsilon(s)\, \xi_{s\lambda}(b) \quad (b \in B \cap G')$.

Put $\varepsilon(\lambda) = \operatorname{sign} \tilde{\omega}(\lambda)$ $(\lambda \in L')$ and $q = \frac{1}{2} \dim G/K$.

Theorem 5. *For each $\lambda \in L'$, there exists a unique class* $\omega(\lambda) \in \mathcal{E}_d$ such that $\Theta_{\omega(\lambda)} = (-1)^q \varepsilon(\lambda)\, \Theta_\lambda$. *The mapping $\lambda \to \omega(\lambda)$ of L' into $\mathcal{E}_d$ is surjective and $\omega(\lambda_1) = \omega(\lambda_2)$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in L')$ if and only if $\lambda_2 = s\lambda_1$ for some $s \in W_G$.*

Define

$$F_f(b) = \Delta(b) \int_G f(xbx^{-1})\, dx \quad (b \in B \cap G')$$

for $f \in C_c^\infty(G)$. Then there exists a number $c > 0$ such that

$$\lim_{b \to 1} (\tilde{\omega} F_f)(b) = (-1)^q c f(1)$$

for all $f \in C_c^\infty(G)$. It is possible to compute c explicitly. Moreover

$$d(\omega(\lambda)) = c^{-1}[W_G] \, |\tilde{\omega}(\lambda)|.$$

Theorem 6. *Let f be a K-finite and $\mathfrak{Z}$-finite function in $L_2(G)$. Then the integral*

$$\int f \Theta_\lambda \, dx \qquad (\lambda \in L')$$

is well-defined. Let $\Theta_\lambda(f)$ denote its value. Then $\Theta_\lambda(f) = 0$ for almost all $\lambda \in L'$ and

$$(-1)^q c f(1) = \sum_{\lambda \in L'} \tilde{\omega}(\lambda) \, \Theta_\lambda(f).$$

J. Schröder

UNGLEICHUNGEN UND FEHLERABSCHÄTZUNGEN

Gegeben sei eine Gleichung

$$Mu = r$$

mit einem Operator M, der eine Teilmenge D eines halbgeordneten Raumes R in einen halbgeordneten Raum S abbildet. Man möchte obere und untere Schranken für eine Lösung u^* dieser Gleichung ermitteln. Bei vielen Problemen ist dies mit Hilfe eines Schlusses folgender Art möglich:

$$Mw \leqq r \leqq Mv \Rightarrow w \leqq u^* \leqq v.$$

Ist die Existenz einer Lösung $u^* \in D$ gesichert, so genügt es, daß für alle $u \in D$ und die gewählten Elemente $v, w \in D$ gilt:

$$Mw \leqq Mu \Rightarrow w \leqq u, \quad Mu \leqq Mv \Rightarrow u \leqq v. \qquad (*)$$

Wir werden uns hier mit hinreichenden (und notwendigen) Bedingungen für die Eigenschaft (*) beschäftigen, ohne genauer auf das Existenzproblem einzugehen. Die Eigenschaft (*) wurde für viele Typen von Operatoren mit z. T. sehr verschiedenartigen Methoden nachgewiesen und praktisch ausgenutzt. Wir berichten hier über eine sehr einfache abstrakte Theorie für Operatoren M mit der Eigenschaft (*). Diese Theorie gestattet es, verschiedenartige Typen von Gleichungen in einheitlicher Weise zu behandeln.

Obwohl gerade diese verschiedenartigen Anwendungsmöglichkeiten ein charakteristischer Vorteil der abstrakten Theorie sind, wollen wir uns hier auf ein Anwendungsgebiet beschränken. Und zwar betrachten wir im wesentlichen nur Randwertaufgaben mit einer elliptischen Defferentialgleichung zweiter Ordnung. Jedoch zeigt ein kurzer Abschnitt, wie sich parabolische Differentialgleichungen einordnen lassen, und ein anderer Abschnitt berichtet über einige Ergebnisse bei gewöhnlichen Randwertaufgaben vierter Ordnung.

Für die numerische Anwendung der Monotonie-Eigenschaft (*) gibt es verschiedenartige Beispiele. Wir berichten über ein Programm zur Lösung der ersten Randwertaufgabe mit einer Differentialgleichung

$$-\Delta u = f(x, y, u).$$

Das Programm liefert eine Näherungslösung und eine zugehörige Fehlerabschätzung.

K. Schütte

RECENT RESULTS IN PROOF THEORY

Proof theory has been developed in order to prove the consistency of mathematical theories. In general, consistency proofs are established by inductions on certain well-orderings. The stronger the theory, the higher are the well-orderings needed. Therefore, the strength of a mathematical theory can be characterized by a transfinite ordinal. In this way, according to Gentzen, pure arithmetic is characterized by the smallest ε-number; and according to Feferman and Schütte, predicative analysis by the smallest "strongly critical" ordinal k_0. By induction up to k_0, Feferman proved the consistency of a system of predicative analysis based on Kreisel's hyperarithmetic comprehension rule. By a still higher ordinal, W. Howard characterized a subsystem of intuitionistic analysis. The strongest subsystems of classical analysis so far have been proved consistent by Takeuti, e.g. a system of simple type theory on arithmetic with π_1^1-comprehension rule. The inductions used by Takeuti are justified by generalized inductive definitions.

S. Smale

DIFFERENTIABLE DYNAMICAL SYSTEMS

Although motivated ultimately by ordinary differential equations and continuous flows, we concentrate mainly on studying the discrete dynamical system generated by a diffeomorphism $T: M \to M$ of a smooth manifold. One way of expressing our framework is saying that we aim to give a non-linear global spectral theory (finite dimensional) for T. In fact, we show that under fairly general conditions, M decomposes into a finite number of invariant indecomposable subspaces. These subspaces form a lattice under a boundary relation and generalize the cell decomposition of a generic gradient flow. The further study of these spaces, most remarkably, forces the introduction of group theory and compact homogeneous spaces.

Ch. Stein

SOME RECENT DEVELOPMENTS IN MATHEMATICAL STATISTICS

The development of mathematical statistics in recent years has been strongly influenced by Wald's statistical decision theory. Recent work on the comparison of experiments and on the refinement of Wald's complete class theorems and conditions for admissibility fits into the general framework of modern mathematical analysis. In addition, a fair number of special results on admissibility and minimax properties have been obtained. Some of these results have implications for statistical practice and, perhaps, cast some light on the controversy over the foundations of statistics. Classical large sample theory, in which, roughly speaking, we consider large samples in an otherwise fixed problem and ignore small probabilities, has been studied by a number of people. Some recent work applies the theory of probabilities of large deviations to the study of order of magnitude of small probabilities of errors. In sequential analysis, the general theory has been further studied, and moderately concrete results have been obtained in some special cases, mainly by letting the cost per observation go to 0. Recently, Linnik solved a problem that has been outstanding for a long time by showing that for the reduced Behrens-Fisher problem, no similar tests exist that are reasonable (in a meaningful, precisely defined sense). Many important topics will have to be omitted or treated very briefly because of limitations of time and space. These include the design of experiments, time series analysis, and nonparametric statistics.

И. М. Виноградов, А. Г. Постников

О РАЗВИТИИ ЗА ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Доклад построен так, что результативная часть лишь в минимальной степени перекрывается с обзорами, которые имеются в мировой литературе. Особенное внимание обращено на связи теории чисел с другими областями математики. О результатах, полученных до 1962 г., говорится лишь в случае необходимости и кратко. Обзор не претендует на полноту.

1. ТЕОРИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

а) Суммирование значений мультипликативных функций. Применение методов вероятностной теории чисел к этим вопросам. Суммирование мультипликативных функций в ряде случаев может быть сведено к асимптотическим законам распределения простых чисел с остаточным членом.

б) Прогресс в теории характеров Дирихле (теории L-рядов Дирихле. Плотностная в среднем гипотеза об L-рядах. Применения к аддитивным задачам.

2. ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

а) Прогресс в исследовании целых точек в областях. Целые точки и асимптотические проблемы теории собственных значений.

б) Значение эргодической теории для диофантовых приближений.

в) Эффективные методы теории диофантовых приближений.

3. ДИОФАНТОВЫ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

а) Применения характеров Гекке к задаче о распределении целых точек на алгебраических кривых и поверхностях. Использование теоремы А. О. Гельфонда о приближении отношения логарифмов алгебраических чисел.

б) Задача Харди — Литтльвуда в секторах и ее обобщения. Применение эргодического метода и метода тригонометрических сумм.

в) Прогресс в эргодической теории алгебраических чисел.

Н. В. Ефимов

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Тема доклада относится к общей проблеме о связях между внутренней метрикой и внешними свойствами поверхностей. Точнее говоря, имеется в виду проблема изометрических погружений двумерного гауссова многообразия в трехмерное евклидово пространство. Известно, что эта проблема может быть сведена к исследованию системы двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Если гауссова кривизна многообразия всюду положительна, то указанная система является эллиптической на любом своем решении; если гауссова кривизна многообразия отрицательна, система будет гиперболической. Соответственно этим двум случаям различаются эллиптические и гиперболические задачи теории поверхностей. Предметом доклада служат гиперболические задачи.

В докладе будут изложены:

1) Теоремы гильбертова типа о невозможности регулярных погружений широких классов полных многообразий отрицательной кривизны. Одновременно это есть теоремы о неизбежном нарушении регулярности полных поверхностей отрицательной кривизны при условиях, наложенных только на внутреннюю метрику.

2) Дифференциальные неравенства, при которых отображение одной плоскости в другую является гомеоморфным (этот вопрос имеет тесную связь с предыдущим).

3) Теоремы существования регулярных погружений некоторых классов неполных многообразий отрицательной кривизны.

4) Теоремы о топологическом строении сети характеристик.

5) Теоремы о регулярности поверхностей отрицательной кривизны в зависимости от регулярности их внутренней метрики.

М. Г. Крейн

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В течение последних 25 лет влияние теории линейных операторов в гильбертовом пространстве значительно расширилось и упрочилось, с одной стороны, благодаря ее разнообразным приложениям в далеко отстоящих друг от друга областях математики (теории дифференциальных уравнений, теории представления групп, теории вероятностей, гармоническом анализе и др.), с другой стороны, благодаря той исключительной роли, которую эта теория приобрела в современной квантовой физике.

Одновременно за этот период теория обогатилась новыми фундаментальными разделами. Среди них отметим следующие:

I. ТЕОРИЯ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Здесь, в частности, имеются в виду новые результаты и проблемы, возникшие в таком, как казалось, простом и законченном вопросе, как расширение эрмитовых операторов. Была разработана теория обобщенных резольвент и резольвентных матриц. Был обнаружен и исследован замечательный класс — *целых эрмитовых* операторов. Были получены представления эрмитовых операторов с помощью канонических дифференциальных операторов.

С этими результатами связаны обширные исследования по так называемым обратным задачам спектральной теории дифференциальных операторов. В ряде случаев в этих исследованиях конечная цель достигалась с помощью методов и идей абстрактной теории операторов. Теория целых эрмитовых операторов и их канонических представлений дала ответ на ряд трудных вопросов теории интерполяции и экстраполяции случайных стационарных процессов.

Теория канонических представлений эрмитовых операторов позволяет по-новому осветить теорию обобщенных собственных элементов самосопряженных операторов с ее многочисленными выходами в анализ.

Важную роль в классификации целых эрмитовых операторов сыграли целые операторы, соответствующие неопределенному случаю проблемы моментов и проблемы продолжения эрмитово-положительной функции.

В теории целых эрмитовых операторов и подавно в общей теории канонических представлений эрмитовых и самосопряженных операторов по настоящее время остались нерешенными некоторые фундаментальные вопросы. Неожиданно оказалось, что эти вопросы могут быть переформулированы как некоторые проблемы теории несамосопряженных операторов.

II. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ

Даже в теории возмущений операторов простейшего класса — самосопряженных операторов математиками и физиками было обнаружено много нового и подчас парадоксального с точки зрения линейной алгебры (обычно эти парадоксы связаны с возможностью наличия абсолютно непрерывного спектра у самосопряженного оператора — явление, не имеющее аналога в линейной алгебре).

В связи с задачами квантовой теории рассеяния, теории квантованных полей, квантовой статистики физиками был развернут и далеко продвинут формализм теории возмущений. В настоящее время этот формализм во многих случаях в работах математиков получил строгое обоснование и дальнейшее развитие (построена общая и строгая теория волновых операторов, операторов и субоператоров рассеяния для квантовой задачи одноканального рассеяния, получен ряд точных результатов по многоканальной задаче рассеяния, различным вопросам вторичного квантования и др.). Обнаружены новые математические связи: теория рассеяния — теория стационарных случайных процессов — теория растяжений и характеристических функций операторов сжатия. Ведутся исследования по обобщению этих результатов на случай несамосопряженных возмущений самосопряженных операторов.

В докладе никак не освещаются вопросы теории возмущений, допускающие трактовку в более широком плане общей теории операторов в банаховых пространствах (в развитии которых также имеется ряд существенных успехов).

III. ТЕОРИЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Для вполне непрерывных операторов и неограниченных операторов с дискретным спектром разработаны методы установления теорем о полноте системы собственных и присоединенных векторов, методы получения обобщенных спектральных разложений, методы суммации этих разложений. Аналогичные вопросы разработаны и разрабатываются для полиномиальных операторных пучков некоторых классов. Теория III развивается в тесном контакте с теорией II. По существу достаточно полные результаты удается получить только для тех несамосопряженных операторов, которые в каком-то смысле близки к самосопряженным, унитарным или вообще нормальным.

Установлены сильные признаки существования у линейного оператора максимальных инвариантных подпространств, соответствующих той или иной части его спектра.

Из этих исследований целесообразно особо выделить группу, объединяемую названием:

IV. ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Развита геометрия этих пространств, в особенности так называемых J-пространств. Установлены разнообразные теоремы о существовании инвариантных максимальных дефинитных подпространств у операторов того или иного класса.

Обычно подчеркивают роль теоретико-множественных и алгебраических идей в создании функционального анализа. В настоящее время в теории операторов наблюдается все расширяющееся использование идей, методов и аппарата теории аналитических функций одной и многих комплексных переменных. Многие важные объекты теории операторов по определению имеют «гибридный» характер — они являются *аналитическими* функциями, притом с *операторными* значениями (обобщенная резольвента, резольвентная матрица, характеристическая оператор-функция, субоператор рассеяния и др.). Выяснение роли этих объектов и связей между ними составляет одну из главных задач доклада.

Получены спектральные разложения для J-самосопряженных и J-унитарных операторов при некоторых ограничениях. Получен ряд результатов по теории представлений групп и алгебр в пространствах с индефинитной метрикой. Выясняется роль этой теории в различных вопросах математической физики (теории устойчивости, теории демпфированных колебаний, теории канонических преобразований, гамильтонианов квантованных полей и др.).

Ограничиваясь перечисленными разделами I — IV, необходимо подчеркнуть, что одним из крупнейших достижений теории операторов в гильбертовом пространстве является создание в наше время теории банаховых алгебр операторов (действующих в таком пространстве) вместе с ее многочисленными приложениями в теории представлений (групп и алгебр) и квантовой физике. Эта тема является предметом двух специальных докладов и здесь не будет затрагиваться.

Как уже отмечалось, в теории возмущений самосопряженных операторов пришлось столкнуться с фактами, не имеющими аналогов в линейной алгебре. С другой стороны, сравнительно недавно было обнаружено, что для некоторых хорошо известных построений линейной алгебры еще не найдены их континуальные аналоги. Вместе с тем развертывание теории таких аналогов совершенно необходимо и открывает новые перспективы. Имеются в виду следующие построения:

А. Приведение вещественной симметрической матрицы с простым спектром с помощью ортогонального преобразования к якобиевой форме.

Б. Приведение произвольной матрицы унитарным преобразованием к треугольному виду.

В. Приведение эрмитовой формы к сумме квадратов методом Лагранжа (или более общая задача представления матрицы в виде произведения треугольных).

Развитие континуальных аналогов построения А приводит к теории канонических представлений эрмитовых операторов и к теории целых эрмитовых операторов.

Развитие континуальных аналогов построения Б приводит к теории *абстрактного треугольного интеграла.* С этим интегралом связано целое исчисление, играющее важную роль в теории как несамосопряженных, так и самосопряженных операторов (последнее обстоятельство оказалось неожиданным).

Исследования по абстрактному треугольному интегралу позволили в свою очередь разработать континуальный аналог построения В — теорию *факторизации оператора по данной цепочке проекторов.*

Связующим звеном развития континуальных аналогов построений А, Б, В явилось фундаментальное понятие *характеристической оператор-функции* несамосопряженного оператора. Эта функция характеризует отличие оператора от его сопряженного. Ее значениями являются операторы сжатия по отношению к некоторой, вообще говоря, индефинитной метрике. Это понятие претерпевает эволюцию, которая еще не завершилась.

Важную роль в теории операторов играют всевозможные мультипликативные свойства характеристической оператор-функции. До недавнего времени континуальное мультипликативное представление характеристической оператор-функции удавалось получить только на основе предварительных чисто аналитических и трудных исследований по теории аналитических матриц-функций. В настоящее время, наоборот, многие из этих результатов теории матриц-функций получаются как следствие различных общих положений теории операторов. Эта конкуренция продолжается.

Существенную роль в указанном сдвиге сыграло построение теории абстрактного треугольного интеграла и теории факторизации оператора по данной цепочке проекторов.

Исключительная роль принадлежит характеристической оператор-функции в построении континуальных аналогов теории элементарных делителей. Понятию клетки Жордана из линейной алгебры в теории операторов соответствует понятие *одноклеточного* оператора. Для операторов ряда важных классов установлены критерии их одноклеточности. Для операторов некоторых классов удается установить возможность их разложения в «косую сумму» одноклеточных.

Установлен ряд признаков подобия операторов. Найдены различные критерии подобия сжатия (диссипативного оператора) унитарному (самосопряженному) оператору; некоторые из них весьма замечательны.

А. И. Мальцев

О НЕКОТОРЫХ ПОГРАНИЧНЫХ ВОПРОСАХ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1. Применение средств математической логики и теории алгоритмов к решению проблем алгебры:

а) Применения общих теорем теории языка 1-й ступени, в частности теоремы компактности, к теории групп и теории идеалов. Необходимость выхода за пределы языка 1-й ступени. Специальные теории 2-й ступени. Некоторые открытые проблемы.

б) Применение техники полных теорий и ультрапроизведений. Выход в теорию полей и теорию квадратичных форм.

в) Применения теории алгоритмов. Строение элементарных теорий и теорий специальных типов.

2. Возникновение новых алгебраических структур в логике и теории алгоритмов. Развитие общей алгебры как учения о свойствах классов алгебраических систем и формальных языков, на которых описываются классы. Классы специальных типов. Многообразия и квазимногообразия. Итеративные алгебры и многообразия Поста. Термальная эквивалентность многообразий. Теория клонов и кланов. Проблема формального языка для этой теории.

И. И. Пятецкий-Шапиро

АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Недавно (см. [1] и [2]) было доказано, что поле функций, автоморфных относительно любой арифметической группы, всегда является полем алгебраических функций. Однако неизвестны подробности строения таких полей. Как правило, нет ответов на вопросы, даже самые первоначальные с точки зрения специалиста по алгебраической геометрии. Например, неизвестно, когда такое поле является полем рациональных функций от n независимых переменных или же когда такое поле есть поле общего положения, т. е. некоторая кратность канонического класса определяет неособую модель поля.

Следует отметить, что в теории автоморфных функций от одного переменного ответ на эти вопросы хорошо известен.

В последние годы появились методы (метод А. Сельберга для подсчета размерности пространства автоморфных форм, а также конструкции неособой компактификации), с помощью которых можно ожидать значительного прогресса в этой области (см., например, [3]).

Как хорошо известно, всякое поле алгебраических функций от одного переменного может быть униформизировано, т. е. является некоторым полем автоморфных функций. В теории алгебраических функций от нескольких переменных положение совсем другое.

Униформизируемые поля являются редчайшими исключениями. Проблема выяснения, какие поля униформизируемы, а какие нет, представляется труднейшей задачей, решение которой, вероятно, сможет осветить по-новому роль и место современной теории автоморфных функций многих комплексных переменных. Есть все основания ожидать, что любая дискретная группа аналитических автоморфизмов симметрической области (с конечным объемом фактор-пространства) за тривиальным исключением размерности 1 является арифметической группой. Если бы это было доказано, то сформулированная выше проблема свелась бы к следующей: описать все поля, униформизируемые арифметическими группами. Возможно, что характеристика таких полей состоит в том, что они обладают моделями, у которых неразветвленные накрытия в некотором смысле однородны [4].

В настоящее время обе эти задачи: выяснение, все ли дискретные группы с естественными дополнительными условиями являются арифметическими, и какова структура полей, униформизируемых арифметическими группами, кажутся одинаково трудными.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Baily W. L., Borel A., On the compactifications arithmetically defined quotients of bounded symmetric domains, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**, 4, 588—593 (1964).

[2] Пятецкий-Шапиро И. И., Арифметические группы в комплексных областях, *Успехи Мат. наук*, **19**, № 6, 93—121 (1964).

[3] Гиндикин С. Г., Пятецкий-Шапиро И. И., Об алгебраической структуре поля модулярных функций Зигеля, *ДАН СССР*, **162**, № 6, 1226—1229 (1965).

[4] Пятецкий-Шапиро И. И., Шафаревич И. Р., Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация, *Изв. АН СССР* (в печати).

ПОЛУЧАСОВЫЕ ДОКЛАДЫ

HALF-HOUR REPORTS

RAPPORTS D'UNE DURÉE U'UNE DEMI-HEURE

VORTRÄGE VON EINER HALBEN STUNDE DAUER

Sh. S. Abhyankar

ON THE PROBLEM OF RESOLUTION OF SINGULARITIES

The Resolution Problem can be stated thus: Given a function field K over a pseudogeometric dedekind domain k does there exist a nonsingular projective model of K over k?

By a pseudogeometric dedekind domain we mean a noetherian integral domain k such that: k is integrally closed in its quotient field; every nonzero prime ideal in k is maximal; and the integral closure of k in any finite algebraic extension of the quotient field of k is a finite k-module. Note that every field is a pseudogeometric dedekind domain and so is the ring of ordinary integers. By a function field over a noetherian integral domain k we mean a finitely generated field extension K of the quotient field of k; by a projective model of K over k we mean a set X of local rings for which there exists a finite number of nonzero elements $x_0, x_1, \ldots, x_m$ in K such that K is the quotient field of $k[x_1/x_0, \ldots, x_m/x_0]$ and $X = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_m$ where V_i is the set of all quotient rings of $k[x_0/x_i, x_1/x_i, \ldots, x_m/x_i]$ with respect to the various prime ideals in $k[x_0/x_i, x_1/x_i, \ldots, x_m/x_i]$; X is said to be nonsingular if every element in X is a regular local ring.

Let K be a function field over a pseudogeometric dedekind domain k, let n' be the transcendence degree of K over k, and let n be the absolute dimension of K over k, i.e., $n = n'$ if k is a field, and $n = n' + 1$ if k is not a field. The Resolution Problem has been settled affirmatively, so far, in the following cases: For $n = 1$ the solution is classical. For $n = 2$ when k is field of complex numbers by Albanese, Levi, Walker, and others. For $n \leqslant 3$ when k is a field of characteristic zero by Zariski. For n arbitrary when k is a field of characteristik zero by Hironaka. For $n = 2$ when k/P is perfect for every maximal ideal P in k by Abhyankar; note that the second condition is satisfied if k is a perfect field and also if k is the ring of ordinary integers. For $n = 3$ when k is an algebraically closed field of characteristic different from 2, 3, and 5 by Abhyankar.

H. Bass

WHITEHEAD GROUPS AND GROTHENDIECK GROUPS OF GROUP RINGS

1. INTRODUCTION

The Whitehead group, Wh (π), of a group π was introduced by J. H. C. Whitehead (see [16]) in connection with his theory of simple homotopy types. Until quite recently the 1940 thesis of G. Higman

[7] remained the only source of effective calculations of these groups. The last few years have witnessed not only a substantial extension of Higman's work, but also an expanded geometric significance of Wh (π), deriving from the h-cobordism classification theorem of Barden-Mazur-Stallings (see, e.g., [8, §§ 10-11], or [9, exposé 7]).

The algebraic theory of Wh (π) is now seen to be closely tied up with that of $\tilde{K}_0 Z\pi$, the "Projective class group" of $Z\pi$ (see definitions and Theorem 5.6 below). Quite independently of this connection, C. T. C. Wall [15] and L. Siebenmann [11] have introduced geometric invariants in $\tilde{K}_0 Z\pi$ which suggest some analogy with Whitehead's torsion in Wh (π). Consequently, to determine Wh (π) it is both technically necessary and geometrically interesting to study $\tilde{K}_0 Z\pi$ as well.

I propose to survey here the few cases in which reasonably complete calculations of Wh(π) and $\tilde{K}_0 Z\pi$ have been made. These cases are, essentially, when π is finite, abelian, or a free product. We begin with the relevant definitions, for which one can consult [1, Ch. III] or [8] for further details.

If A is a ring $K_0 A$ denotes the "Grothendieck group" of finitely generated projective left A-modules, and the quotient modulo the subgroup generated by free modules is denoted by $\tilde{K}_0 A$.

$GL\,(A) = \bigcup_{n \geqslant 1} GL_n\,(A)$, the infinite general linear group, and $E\,(A)$ is the subgroup generated by "elementary matrices". We have the commutator formula of Whitehead, $E\,(A) = [E\,(A),\ E\,(A)] = [\,GL\,(\,A),\ GL\,(\,A)]$, and we write

$$K_1 A = GL\,(A)/E\,(A).$$

The definition supplies homomorphisms $GL_n\,(A) \to K_1 A$, and for $n = 1$ we write $U\,(A) = GL_1\,(A) \to K_1 A$. If A is commutative then det: $GL_n\,(A) \to U\,(A)$ induces a splitting,

$$K_1 A = U\,(A) + SK_1 A; \qquad SK_1 A = SL\,(A)/E\,(A).$$

If π is a group then $\pm\,\pi \subset U\,(Z\pi)$ so we can define

$$\text{Wh}\,(\pi) = \text{coker}\,(\pm\,\pi \longrightarrow K_1 Z\pi)$$

Thus, in case π is abelian, Wh $(\pi) = (U\,(Z\pi)/\pm\,\pi) + SK_1 Z\pi$.

2. FINITE GROUPS

Throughout this section π is a finite group.

Theorem 2.1 (Swan [13]). *A finitely generated projective left $Z\pi$-module is isomorphic to the direct sum of a free module and a projective ideal. $\tilde{K}_0 Z\pi$ is a finite group.*

Swan has obtained further, and more precise, information on $\tilde{K}_0 Z\pi$ in [14]. To indicate the flavor of the problem we mention:

E x a m p l e 2.2. (Reiner-Rim, see [10] and [11, appendix]). If π is cyclic of prime order p then $\widetilde{K}_0 Z\pi$ is isomorphic to the ideal class group of the field of p^{th} roots of unity.

Next we discuss K_1. Let $\rho : \pi \to GL_n(\boldsymbol{R})$ be a real representation of $\pi . \rho$ extends to a ring homomorphism $\rho : Z\pi \to M_n(\boldsymbol{R})$ ($n \times n$ matric algebra) which yields

$$K_1 Z\pi \xrightarrow{K_1 \rho} K_1 M_n(\boldsymbol{R}) \xrightarrow{\det} U(\boldsymbol{R}) \xrightarrow{\log \| } \boldsymbol{R}.$$

The composite of this with $\pm \pi \to K_1 Z\pi$ is trivial ($\boldsymbol{R}$ is torsion free) so we obtain an induced homomorphism f_ρ: $\mathrm{Wh}(\pi) \to \boldsymbol{R}$. Let $\rho_1, \ldots, \rho_r$, resp., $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ denote the distinct (up to isomorphism) irreducible real, resp., rational representations of π, and define n_{ij} by $\sigma_i = \underset{1 \leqslant j \leqslant r}{+} n_{ij} \rho_j$. Let

$$f = (f_{\rho_1}, \ldots, f_{\rho_r}) : \mathrm{Wh}(\pi) \to \boldsymbol{R}^{(r)}.$$

T h e o r e m 2.3 (cf. [2, Theorem 1]). ker f *is a finite group and* im f *is a lattice of rank* $r - q$ *in the subspace defined by the equations*

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant r} n_{ij} x_j = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant q.$$

We have the following determinations of r and q:

T h e o r e m 2.4 (see [6, Theorem 42.8]).

(a) (E. Artin) $q =$ *the number of conjugacy classes of cyclic subgroups of* π.

(b) (S. D. Berman, E. Witt) $r =$ *the number of conjugacy classes of unordered pairs* $\{x, x^{-1}\}$, $x \in \pi$.

We next give generators and relations for a subgroup of finite index in Wh (π). This result was formulated, conjectured, and proved for cyclic groups of prime order, by Milnor. Milnor relied on (2.3) and on a theorem of Franz (see [9, expose 1]), and the general case was proved in [2] by generalizing Franz's theorem.

Suppose $t \in \pi$ and $s = t^r$ both have order m. If $f > 0$ is a multiple of $\varphi(m)$ (Euler φ) then

$$[s/t]^f = (1 + t + \ldots + t^{r-1})^f + \frac{1 - r^f}{m} (1 + t + \ldots + t^{m-1})$$

is a unit in $Z\pi$.

T h e o r e m 2.5 (cf. [2, Theorem 5]). *Suppose* π *has exponent* e (*i.e.*, $x^e = 1$ *for all* $x \in \pi$) *and that* f *is a multiple of* $\varphi(e)$. *Let* S *denote the set of all* $(s/t) =$ *the image in* Wh (π) *of* $[s/t]^f \in U(Z\pi)$. *Then* S *generates a subgroup of finite index in* Wh (π), *and a complete set of relations between these generators is: For each,* s, t, $u \in \pi$ *generating* *the same cyclic subgroup, and for each* $x \in \pi$,

$$(s^{-1}/t) = (s/t),$$
$$(s/t)(t/u) = (s/u),$$
$$(xsx^{-1}/xtx^{-1}) = (s/t).$$

3. FINITE ABELIAN GROUPS

Let π be finite and abelian, so that

$$\mathrm{Wh}(\pi) = (U(Z\pi)/\pm\pi) + SK_1Z\pi.$$

P r o p o s i t i o n 3.1 (G. Higman [7]). *$U(Z\pi/\pm\pi)$ is torsion free.*

C o n j e c t u r e 3.2. *$SK_1Z\pi = 0$, so* $\mathrm{Wh}(\pi) = U(Z\pi)/\pm\pi$.

This conjecture is almost certainly true. It would follow (see [8, appendix]) from the fact that, if A is the ring of integers in a cyclotonic field then, for sufficiently large n, a subgroup of finite index in $SL_n(A)$ contains a "congruence" subgroup». Various efforts of Mennicke, Milnor, Serre, and the author have almost succeeded in proving the latter, and have at least proved enough to imply that $SK_1Z\pi$ *is a finite 2-group.*

Combining (2.3), (2.4), (2.5), (3.1), and (3.2) we get a fairly clear picture of $\mathrm{Wh}(\pi) = U(Z\pi)/\pm\pi$ for finite abelian π. The missing ingredient is a description of $U(Z\pi)$ modulo the group generated by the units of Theorem 2.5. This appears to be a rather delicate arithmetic problem.

A natural question suggested by (3.1) and (3.2) is: *Is* $\mathrm{Wh}(\pi)$ *torsion free for any finite group* π? By virtue of Theorem 2.3 a special case of this question is: *Is* $\mathrm{Wh}(\pi) = 0$ *for π a symmetric group?*

4. FREE PRODUCTS

The situation when $\pi = \pi_1 * \pi_2$ is a free product is quite satisfactory.

T h e o r e m 4.1 (Stallings [12]), $\mathrm{Wh}(\pi_1 * \pi_2) = Wh(\pi_1) + Wh(\pi_2)$.

T h e o r e m 4.2 (G. Higman [7]), $\mathrm{Wh}(Z) = 0$.

C o r o l l a r y 4.3. *$Wh(\pi) = 0$ if π is a free group.*

Only 4.3 has been generalized to K_0.

T h e o r e m 4.4 ([3]). *If π is a free group then projective $Z\pi$-modules are free, so $\widetilde{K}_0 Z\pi = 0$.*

Q u e s t i o n: Is $\widetilde{K}_0(Z[\pi_2 * \pi_2]) \cong \widetilde{K}_0Z\pi_1 + \widetilde{K}_0Z\pi_2$? This seems to be rather plausible.

The calculations for abelian groups reduce, after a simple direct limit argument, to the finitely generated case. Finite groups were handled in §§ 1—2 above, so we are led to study the passage from π to $\pi \times T$, T a free abelian group. If $A = Z\pi$ then $Z[\pi \times T] = A[T]$; this explains the formulation of some of the results to follow.

Let A be a commutative ring with no non-trivial idempotents, e.g. $Z\pi$ for any abelian π. Then a finitely generated projective module P has a well-defined "rank»" $r \geqslant 0$ (see, e.g. [1, § 15]) and we write $\det P = \Lambda^r P$. This induces a canonical epimorphism

$$\det : \widetilde{K}_0 A \longrightarrow \mathrm{Pic}(A),$$

where Pic (A) denotes the group, under $\times_A$, of projective A-modules of rank one.

Theorem 5.1 (Bass—Murthy [5]). *For any abelian group* π, $\widetilde{K}_0 Z\pi \to \mathrm{Pic}(Z\pi)$ *is an isomorphism.*

Theorem 5.2 (Bass—Murthy [5]). *Let π be a finite abelian group of order m and let T be a free abelian group of rank $r > 0$. Then*

$$\mathrm{Pic}(Z[\pi \times T]) = \mathrm{Pic}(Z\pi) + N_0(\pi, T)$$

where $N_0(\pi, T)$ is a group of exponent a power of m, and

$$N_0(\pi, T) \begin{cases} = 0 \textit{ if } m \textit{ is square free} \\ \textit{is not finitely generated, otherwise.} \end{cases}$$

An explicit description of $N_0(\pi, T)$ is given in [5].

Corollary 5.3. *If π is a finitely generated infinite abelian group then $\widetilde{K}_0 Z\pi$ is a torsion group of bounded exponent, and it is finitely generated if, and only if, torsion subgroup of π is cyclic of square free order.*

Next we consider Wh (π).

Proposition 5.4. ([2, § 11]). *Let π be an abelian group with torsion subgroup π_0. Then*

$$U(Z\pi)/\pm\pi \cong U(Z\pi_0)/\pm\pi_0,$$

a torsion free group (cf. (3.1.)).

Proposition 5.5 ([1], 4.2 (b) and 11.1). *Let π be a finite and let T be a free abelian group of rank $r \geqslant 0$. For $n > r + 1$ the natural map* $GL_n(Z[\pi \times T]) \to \mathrm{Wh}(\pi \times T)$ *is surjective.*

Theorem 5.6 (see Bass—Heller—Swan [4]). *Let A be a ring and let T be an infinite cyclic group with generator t.*

(a) *There is a natural isomorphism*

$$K_1 A[T] \cong K_1 A + K_0 A + N_1(A)$$

where $N_1(A)$ *is the group generated by images in* $K_1A(T)$ *of all matrices* $I+(t^{\pm 1}-1)Y$, *where* Y *is a nilpotent matrix over* A.

(b) *If* A *is left noetherian and if every finitely generated left* A*-module has a finite projective resolution then the same is true of* $A[T]$, *and every unipotent matrix in* $GL(A)$ *represents zero in* K_1A. *Moreover* $K_0A[T] = K_0A$.

If $A = Z\pi$ is left noetherian then the remaining condition in (b) means that π has finite cohomological dimension.

Using Theorems 5.1, 5.2, and 4.6 plus a slight additional argument we obtain the following description of Whitehead groups of finitely generated abelian groups. It settles, in particular, a question of Milnor (see [2, § 11]) about their finite generation.

Theorem 5.7. (Bass—Murthy [5]). *Let* π *be a finite abelian group of order* m *and let* T *be a free abelian group of rank* r. *Then there is a natural decomposition of the form*

$$\mathrm{Wh}(\pi\times T) = \mathrm{Wh}(\pi) + (T\times \mathrm{Pic}(Z\pi)) + N_1(\pi, T).$$

Moreover,

(a) *Each element of* $N_1(\pi, T)$ *has order dividing a power of* m;

(b) $N_1(\pi, T) = 0$ *if* $\pi = 0$ *or* if $r = 0$; *and*

(c) *If* $r \geqslant 2$ *and if* m *is not square free then* $N_1(\pi, T)$ *is not finitely generated.*

Note that $\mathrm{Wh}(\pi) = U(Z\pi)/\pm\pi$ plus a finite 2-group, probably zero (3.2), and that $U(Z\pi)/\pm\pi$ is a torsion free group (Proposition 3,1) of known rank (Theorems 2.3 and 2.4). Moreover $\mathrm{Pic}(Z\pi) \cong \tilde{K}_0Z\pi$ (Theorem 5.1) and it is a finite group (Theorem 2.1). Consequently $\mathrm{Wh}(\pi)$ and $\mathrm{Wh}(\pi\times T)$ have the same rank. In view of Theorem 5.2 it is tempting to conjecture that, for $r>0$, $\mathrm{Wh}(\pi\times T)$ is finitely generated if, and only if, m is square free, and perhaps even that $N_1(\pi, T) = 0$ in this case.

REFERENCES

[1] Bass H., K-theory and stable algebra, *Publ. IHES.* no. 22.

[2] Bass H., The Dirichlet unit theorem, induced character, and Whitehead groups of finite groups, *Topology*, to appear.

[3] Bass H., Projective modules over free groups are free, *J. of Algebra*, **4** (1964) 367—373.

[4] Bass H., Heller A., Swan R., The Whitehead group of a polynomial extension, *Publ. IHES*, no. 22.

[5] Bass H., Murthy M. P., Picard groups and Grothendieck groups of abelian group rings. (In preparation.)

[6] Curtis C. W., Reiner I.. Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience (1962).

[7] Higman G., The units of group rings, *Proc. Lond. Math. Soc.* **46** (1940) 231—248.

[8] Milnor J., Whitehead torsion (to appear in *Bull. Amer. Math. Soc.*).

[9] Seminaire G. de Rham, Torsion et type simple d'homotopie (mimeo, notes). Univ. de Lausanne (1963—64).

[10] Rim D. S., Modules over finite groups, *Ann. of Math.* **69**, 700—712 (1959).

[11] Siebenmann L. G., Obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five, Thesis, Princeton University (1965).
[12] Stallings J., Whitehead torsion of free products, *Ann. of Math.* **82**, 354—363 (1965).
[13] Swan R., Induced representations and projective modules, *Ann. of Math.* **71**, 552—578 (1960).
[14] Swan R., The Grothendieck ring of a finite group, *Topology* **2**, 85—110 (1963).
[15] Wall C. T. C., Finiteness conditions for CW-complexes, *Ann. of Math.* **81**, 56—69 (1965).
[16] Whitehead J. H. C., Simple homotopy types, *Amer. J. Math.* **72**, 1—57 (1950).

B. J. Birch

RATIONAL POINTS ON ELLIPTIC CURVES

Let C be an elliptic curve defined over the rationals with at least one rational point; so C is an abelian variety of dimension 1. The set of rational points of C form a subgroup, call it $C(\boldsymbol{Q})$, of the group of points of C; Mordell has shown that $C(\boldsymbol{Q})$ is finitely generated. There are effective methods of determining the points of $C(\boldsymbol{Q})$ of finite order; the problem is, how may one determine g, the number of independent generators of infinite order? Apparently there is a considerable theory waiting to be discovered; at any rate, there are many interrelated conjectures as to what such a theory should be.

At the Stockholm congress, Cassels described certain conjectures due to Swinnerton — Dyer and the speaker, by which g was related to the zeta function of the curve C. Let N_p be the number of points on the modulo p reduction of C; then $\zeta C(s) = \zeta(s)\,\zeta(s-1)/L(s)$, where $\zeta(s)$ is the Riemann zeta function and

$$L(s) = \prod (1 + (N_p - p - 1)\,p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}$$

is an infinite product taken over primes for which C has a good reduction. Hasse has conjectured that $L(s)$ may be continued meromorphically over the whole plane—we conjectured that $L(s)$ has a zero of order precisely g at $s = 1$. When $g = 0$, we interpreted $L(1)$ in terms of the order $|Ш|$ of the Tate—Šafarevič group (conjectured to be finite!). I will report on some subsequent history of this conjecture.

Four years ago, we were unable to interpret $L^{(g)}(1)$ for $g > 0$, essentially because there was no canonical measure available for the height of a point on an elliptic curve. Shortly afterwards, such a measure was provided by Tate and Néron; the appropriate extension of our conjecture is

$$L^*(s) \sim \frac{|Ш|\,|\det H|}{f^2}(s-1)^g \text{ as } s \to 1. \qquad \text{(A)}$$

Here, $L^*(s)$ is $L(s)$ modified by appropriate factors for the primes for which C has a 'bad' reduction; f is the number of points of finite order of $C(\boldsymbol{Q})$; and H is the matrix of the quadratic form on $C(\boldsymbol{Q})$ given by the Néron height. As is natural, the formula is exceedingly similar to Ono's evaluation of the Tamagawa number of algebraic tori. As an important first step, Cassels has proved the fairly deep result that (A) is compatible with isogenies. On the computational side, (A) has been verified by N. M. Stephens for a large number of cases when C has the form $y^3 = x^3 - A$; unfortunately these seem to be the only direct verifications with $g \geqslant 1$.

It is straightforward to generalize (A) to the case where C is replaced by a general abelian variety V over a number field K; in fact, the situation is clarified, since one now makes a proper distinction between V and its dual variety V'. By the Mordell—Weil theorem, the group $V(K)$ of K-rational points is still finitely generated, say with g generators; to generalize (A), we replace f^2 by ff' where f is the number of points of $V(K)$ of finite order and f' is the number of K-rational points of finite order of V'; and we replace the matrix H by the matrix of a bilinear form on $V'(K) \times V(K)$ induced by the Néron height. The formula has reasonable functorial properties relative to taking products, changing the ground field, and (according to Tate) isogeny. There is practically no direct evidence for it except in the case of an elliptic curve over the rationals; however, Tate has generalised it further, and he and M. Artin have had considerable success in attacking the geometric analog when the ground field K is a function field of characteristic p. For instance, as a very particular case, they are able to show that two abelian varieties over a finite field k_q are isogenous if and only if they have the same zeta function.

Recent work of Shimura and Weil gives hope of progress in the original case of an elliptic curve C over the rationals. Using Néron's theory of the minimal model of C, we may define an arithmetic invariant, the conductor N of C; this is essentially the product of the primes p for which the minimal model has a bad reduction modulo p, raised to powers which measure how bad the reduction is. Weil has strengthened Hasse's conjecture: he supposes that the zeta function of C and all the L-functions of C have meromorphic continuations, and that they satisfy appropriate functional equations involving N. He shows that if this is so, then the zeta function of C must be a transform of a holomorphic differential on $H/\Gamma_0(N)$ (the upper half plane factored by $\Gamma_0(N)$, the subgroup of the modular group represented by matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ with $c \equiv 0\ (N)$). Accordingly, in attempting to verify our conjecture, it is reasonable to restrict oneself to curves which are uniformised by modular functions. The situation immediately becomes more hopeful: it becomes relatively easy to show that $L^*(1)$ is rational, and the actual computation of $L^*(1)$ is greatly simplified. For a large class of curves, it may be proved that if $|Ш|$ is finite then g has the same parity as the order of the zero of $L^*(s)$ at $s = 1$. It may even be possible for certain classes of curves to show that $g \geqslant 1$, without having to display a generator explicitly.

E. Bishop

THE CONSTRUCTIVE DEVELOPMENT OF ABSTRACT ANALYSIS

It is generally thought that a constructive development of mathematics would entail a great sacrifice, due to the invalidation of many results and the complication of many proofs. A thorough examination of large portions of abstract analysis indicates this is not the case. Of course it is true that those results — for instance results depending on the existence of ultra filters — which make essential use of transfinite methods are not to be saved. However it is interesting to note that these results fail in the constructive system because they involve a sweeping use of the law of the excluded middle, not because they use the axiom of choice. A choice function does exist constructively, because the assertion of an existence implies a choice has already been made.

Constructive in the sense we are using it means computable, and affirmative. No essential use is made of negation. It has nothing to do with recursive functions or dinky systems which purport to formalize the notion of constructivity. The meaning of "constructive" can be obtained by taking the term as used by Brouwer and subtracting his calculus of negation and his metaphysics.

Results that have been proved constructively (more accurately, have been constructivized) include various compactness results (such as Ascoli's theorem), complex analysis through the Riemann mapping theorem (this is simple), the Riesz representation theorem, the Lebesgue integral including Fubini's theorem, the theory of differentiation of set functions (including differentiation of functions of bounded variation and the ergodic theorem), the Hahn—Banach theorem, the spectral theorem, the Krein—Milman theorem, the existence of Haar measure (after Cartan), the theory of locally compact Abelian groups (Pontryagin duality and Fourier transform), and the theory of Banach algebras (where means must be found to circumvent the non-compactness of the spectrum and the non-existence of maximal ideals).

No attempt has been made to treat the nonseparable case. While this could be done in principle, it does not seem worthwhile to develop a constructive theory whose set of constructive applications is almost void.

W. Browder

ON THE EMBEDDING PROBLEM FOR SMOOTH MANIFOLDS

If M^n is a smooth 1-connected manifold of dimension n and W^{n+k} is another of dimension $n+k$, and important problem is to give conditions for the embeddability of M in W and to classify these embeddings. The basic results of Whithey and Haefliger have given a significant start in this direction, for large codimensions k. In this talk I shall indicate a way of reducing such questions to problems in homotopy theory for codimensions $k \neq 2$. For simplicity we shall restrict ourselves to the case where $\partial M = \partial W = \varnothing$, although analogous theorems hold with non-empty boundaries, with additional hypotheses.

First we consider $k = 1$.

Theorem A. Let X and Y be two spaces with $H_n(X) = H_n(Y) = 0$, and let Q be a space satisfying Poincaré duality in dimension n, $n \geqslant 5$, Q 1-connected, and $Q \subset X$ and $Q \subset Y$ so that (X, Q) and (Y, Q) satisfy the homotopy extension property, and $X \cap Y = Q$. Let W^{n+1} be a closed smooth 1-connected manifold and $h : W \to X \cup Y$ be a homotopy equivalence. Further suppose $\pi_2(X, Q) = \pi_2(Y, Q) = 0$. Then h is homotopic to k such that $k^{-1}(Q) = N$, $k^{-1}(X) = A$, $k^{-1}(Y) = B$, A and B are submanifolds of W with $A \cap B = \partial A = \partial B = N$ and k restricted is a singular homotopy equivalence of A with X, B with Y and N with Q. Further, A, B and N are unique up to pseudo-isotopy of W.

(J. Wagoner in his thesis showed how to weaken the hypothesis on π_2, and D. Sullivan subsequently showed how to remove it altogether.)

The proof of Theorem A depends on the process of exchanging handles inside W to simplify the inverse images, in a way similar to my paper "Structures on $M \times R$" in Proc. Camb. Phil. Soc. 1965. The ability to find disks depends on a theorem of I. Namioka in Proc. L.M.S. 1962. In the middle dimension, a modification of technique is nesessary due to the inability to find non-singular disks.

Theorem A gives a starting point for studying the embedding problem for other codimensions, namely we may first try to embed up to homotopy a disk bundle and sphere bundle over M, and then try to embed M in these subspaces. With the aid of Haefliger's theorems this gives us results immediately in the metastable range. Specializing to $W = S^{n+k}$ and combining our results with a theorem of M. Hirsch in Topology 1966 we get the following generalization of a theorem of J. Levine (in Bul. A.M.S. 1963).

Theorem B. Let M^n be a closed smooth 1-connected manifold, and let $k \geqslant \frac{n+3}{2}$. Let ξ be a $(k-1)$-spherical fibre space over M with $H_{n+k}(T(\xi))$ consisting of spherical classes (where $T(\xi) = M \cup C(E, \xi))$ is the Thom complex of ξ, $E(\xi)$ the total space of ξ). Then M^n embeds in S^{n+k}, with normal bundle ν such that ν is fibre homotopy equivalent to ξ.

Below the metastable range we may employ Theorem A together with the techniques of surgery developed by J. Levine in Annals of Math. 1965, to prove existence and pseudo-isotopy theorems for embedding. We indicate one such:

T h e o r e m C. Let (W, M_1) and (W, M_2) be two embeddings of a closed smooth 1-connected n-manifold M in a closed smooth 1-connected $(n+k)$-manifold W, with normal bundles ν_1 and ν_2. Let $E_0(\nu_1)$ be the $R^k - 0$ bundle associated to ν_i. Suppose that $\pi_2(W - M_1, E_0(\nu_1)) = 0$, n is even, $n \geqslant 6$ and $k > 2$. Then the pairs (W, M_1) and (W, M_2) are pseudo-isotopic (h-cobordant) if and only if there exists a linear bundle map $b: \nu_1 \to \nu_2$ covering a homotopy equivalence $e: M_1 \to M_2$, and a homotopy equivalence g : $W - M_1 \to W - M_2$ such that (1) the diagram

(1) the diagram

$$\begin{tikzcd} E_0(\nu_1) \arrow[r, "b_0"] \arrow[d] & E_0(\nu_2) \arrow[d] \\ W - M_1 \arrow[r, "g"] & W - M_2 \end{tikzcd}$$

commutes up to homotopy, where the vertical maps are inclusions, and

(2) the map of $W \to W$ induced by e, b_0, g is homotopic to the identity.

For n odd a similar theorem holds, up to the action of a subgroup of the group of knotted homotopy n-spheres in S^{n+k}.

These theorems and the analogous existence theorems generalize the results of Levine's paper on differentiable knots in the Annals 1965. Using the strengthening of Theorem A due to Wagoner or Sullivan, one may remove the hypothesis on π_2 in these theorems.

A. P. Calderon

ESTIMATES FOR SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

A discussion of metric and algebraic properties of singular integral operators in various functional spaces in terms of metric properties of their symbols and kernels.

J. Cerf

ISOTOPIE ET PSEUDO-ISOTOPIE

1. ENONCÉ DU RÉSULTAT

Soit V une variété différentiable de classe C^∞. Le groupe $\mathcal{G}$ des difféomorphismes de $V \times [0, 1]$ qui induisent l'identité sur $V \times \{0\}$ s'appelle *groupe des pseudo-isotopies* de V; $\mathcal{G}$ est muni de la topologie C^∞.

T h é o r è m e. *Si V est compacte, sans bord, si $\pi_1(V) = \pi_2(V) = 0$, et si dimension $V \geqslant 9$, alors $\mathcal{G}$ est connexe.*

Corollaire. *Pour* $n \geqslant 9$, $\pi_0(\mathrm{Diff}\ D^{n+1}) = 0$, π_0 $(\mathrm{Diff}\ S^n)$ *est isomorphe à* Γ_{n+1}, *et* π_1 $(\mathrm{Diff}\ S^n)$ *est une extension de* Γ_{n+2}.

Remarques. 1) Je ne connais pas de contre-exemple lorsque π_1 (V) ou π_2 (V) sont $\neq 0$.

2) Les premiers exemples de π_i $(\mathrm{Diff}\ S^n)$ non triviaux pour $i \geqslant 1$ sont dus à S. P. Novikov; à ma connaissance on ne sait rien sur π_i $(\mathcal{G})$ pour $i \geqslant 1$.

2. MÉTHODE

Soit $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions différentiables: $V \times ([0, 1], 0, 1) \to \to ([0, 1], 0, 1)$. Le groupe $\mathcal{G}$ est homéomorphe au produit d'un espace contractile (le groupe des isotopies de V) et du sous-espace $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ formé des fonctions qui n'ont aucun point critique. L'espace $\mathcal{F}$ étant convexe, on est ramené à montrer π_1 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = 0$, ce qui apparaît comme une généralisation à un paramètre de la théorie de Smale sur le h-cobordisme des variétés.

L'espace $\mathcal{F}$ est muni d'une «subdivision co-cellulaire» $\mathcal{F}^0$, $\mathcal{F}^1$, ...; $\mathcal{F}^0$ est l'ouvert dense de $\mathcal{F}$ formé par les fonctions de Morse; $\mathcal{F}^1$ est la partie de $\mathcal{F}$ formée des fonctions qui ont une singularité de codimension 1. Chaque composante connexe σ^1 de $\mathcal{F}^1$ est une sous-variété de codimension 1 de $\mathcal{F}$; on lui associe une famille de «chemins élémentaires de traversée» définie à l'aide d'un modèle de la singularité correspondante. L'espace des lacets relatifs de $(\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1, \mathcal{E})$ qui sont élémentaires par morceaux définit un système de générateurs de $\pi_1(\mathcal{F}, \mathcal{E})$.

On montre la nullité de ces générateurs par étapes, en utilisant la filtration classique de $\mathcal{F}^0$ par le sous-ensemble $\mathcal{N}$ formé des fonctions de Morse *ordonnées* («nice functions») et par les sousensembles $\mathcal{N}_{i,j}$ de $\mathcal{N}$ formés des fonctions dont les indices des points critiques sont compris entre les entiers i et j.

On montre (sans aucune hypothèse sur l'homotopie ni sur la dimension de V) que chacune des deux opérations suivantes: naissance de deux points critiques à un niveau donné; croisement de deux points critiques consécutifs c_1 et c_2 tels que f $(c_1) > f$ (c_2) et indice $c_1 <$ indice c_2, ne peut se faire que d'une seule manière à homotopie près. On déduit de là la première étape de la démonstration, c'est-à-dire la nullité de π_0 $(\mathcal{N})$,

Les étapes suivantes utillisent essentiellement deux lemmes relatifs à une triade (W, V_1, V_2) et à une fonction de Morse $f : (W, V_1, V_2) \to ([0, 1], 0, 1)$:

Lemme de croisement des singularités de même indice. On suppose que f a en tout $q + 1$ points critiques, tous d'indice i, tels que f $(c_0) > f$ $(c_1) > \dots > f$ (c_q). Soit $\mathcal{C}$ l'espace des chemins d'origine f dans $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$, réalisant le croisement successif de c_0 avec $c_1, \dots, c_q$. Si π_1 $(W) = 0$ et si $3 \leqslant i \leqslant \dim W - 3$, alors π_0 $(\mathcal{C})$ est isomophe à la somme directe de q copies de $\boldsymbol{Z}$.

Lemme d'unicité des morts. On suppose $f \in \mathcal{N}$. Soient c_1 et c_2 deux points critiques consécutifs de f, tels que c_1 et c_2 puissent être tués l'un par l'autre. Soit $\mathscr{C}$ l'espace des chemins d'origine f dans $\mathscr{F}^0 \cup \mathscr{F}^1$, réalisant cette mort. Si $\pi_1(V_1)$ et $\pi_2(V_1)$ sont nuls, et si $\dim V_1 \geqslant 9$, alors $\pi_0(\mathscr{C}) = 0$.

Remarques. La preuve de ce dernier lemme utilise:

a) une généralisation à un paramètre du théorème de Whitney sur la suppression des points doubles; c'est le seul point de toute la démonstration du théorème où intervient la nullité du π_2.

b) une généralisation à k paramètres des théorèmes de plongement de Haefliger; c'est le seul point de toute la démonstration du théorème où intervient la condition $\dim V \geqslant 9$; il semble qu'elle puisse être affaiblie ($\dim V \geqslant 7$ suffit vraisemblablement).

P. J. Cohen

THE INDEPENDENCE OF THE AXIOM OF CHOICE AND THE CONTINUUM HYPOTHESIS

In 1963 the author proved that the statements mentioned in the title cannot be proved from the Axioms of Zermelo—Fraenkel set theory. This complemented the work of Gödel who showed that they could not be disproved. The form of the proof is such that it extends quite obviously to "higher" systems of set theory obtained by adjoining axioms of infinity as well as to Gödel—Bernays set theory (which as is well-known is essentially equivalent to Zermelo—Fraenkel), and to extensions of it by allowing quantification over classes. Thus, it would seem that the Continuum Hypothesis is the first example of an absolutely undecidable proposition, although various philosophical viewpoints are possible.

The method used is the idea of "forcing". This is an inductive definition of when a statement in set theory should be considered as true in a stronger sense than the usual notion of truth. The definition is relative to a certain construction and by varying the construction, models of set theory can be obtained with various properties. Several authors have used the method to solve many independente questions in set theory. A brief review of these results will be given as well as an heuristic account of the origins of forcing.

J. Dixmier

ESPACE DUAL D'UNE ALGÈBRE OU D'UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT

Soit G un groupe localement compact. Si G est commutatif, l'espace localement compact $\hat{G}$ des caractères de G est très connu. Dans le cas général, on désigne par $\hat{G}$ l'ensemble des classes de représentations unitaires topologiquement irréductibles de G dans des espaces hilbertiens, et on munit $\hat{G}$ d'une topologie (définie par la convergence compacte des fonctions de type positif associées aux représentations). On peut calculer $\hat{G}$ dans divers cas simples (groupe diédral infini, $SL(2, \boldsymbol{C})$, certains groupes résolubles par exemple). En passant à la C^*—algèbre de G, l'étude de $\hat{G}$ est un cas particulier de calle du spectre $\hat{A}$ d'une C^*-algèbre quelconque A. La topologie de $\hat{A}$ peut être définie par plusieurs procédés équivalents; notamment c'est la topologie de Jacobson. L'espace $\hat{A}$ est localement quasi-compact. Si A est de type I, l'espace $\hat{A}$ est presque séparé. Lorsque G est un groupe de Lie, il y a diverses relations entre G et l'algèbre de Lie de G. Lorsque G admet un grand sous-groupe compact, il y a une topologie raisonnable sur l'ensemble des classes de représentations completement irréductibles de G dans des espaces de Banach.

A. Douady

QUELQUES PROBLÈMES DES MODULES EN GÉOMÈTRIE ANALYTIQUE COMPLEXE

1. NOTATIONS

Le corps de base est le corps $\boldsymbol{C}$ des nombres complexes.

Les anneaux locaux des espaces analytiques considérés peuvent avoir des éléments nilpotents. Si S est un espace analytique, on apelle *espace analytique au dessus* de S un espace analytique X muni d'un morphisme p: $X \to S$. Si (X, p) et (X', p') sont deux espaces analytiques au dessus de S, on appelle *morphisme au dessus de* S tout morphisme h de X dans X' tel que $p = p' \circ h$.

Soit X un espace analytique au dessus de S. Pour tout point $s \in S$, on appelle *fibre* de X en s et on note X_s l'espace analytique $p^{-1}(s)$. Pour tout ouvert U de S, on appelle *restriction* de X à U et on note X_U l'espace analytique $p^{-1}(U)$ au dessus de U. Si f: $S' \to S$ est un morphisme, on note $f^* X$ le produit fibré $S' \times_S X$, considéré comme espace analytique au dessus de S', et on dit que f^*X se déduit de X par *changement de base*.

On dit que X est *propre* sur S si le morphisme p est propre; c'est une condition topologique qui ne fait intervenir que l'application sous-jacente à p. On dit que X est *plat* sur S si le morphisme p est plat, c'est à dire si, pour tout point $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X, x}$ de X en x est un module plat sur l'anneau $\mathcal{O}_{S, s}$, où $s = p(x)$.

2. LE PROBLÈME DES MODULES LOCAUX POUR UN ESPACE ANALYTIQUE COMPACT

Soient S un espace analytique muni d'un point de base s_0 et X_0 un espace analytique compact. On appelle *déformation* de X_0 au dessus de S tout espace analytique X au dessus de S, propre et plat sur S, muni d'un isomorphisme i: $X_0 \rightarrow X_{s_0}$. Soient U et U' deux voisinages ouverts de s_0 dans S, X et X' des déformations de X_0 au dessus de U et U' respectivement; on dit que X et X' sont *localement isomorphes* s'il existe un voisinage V de s_0 dans S et un isomorphisme h de X_V sur $X'|_V$ au dessus V tel que $i' = h \circ i$.

On dira que X est une déformation localement semiuniverselle (resp. universelle) de X_0 si, pour tout espace analytique pointé S' et pour toute déformation X' de X_0 au dessus S', il existe un germe de morphisme (resp. un germe de morphisme et un seul) f de S' dans S tel que X' soit localement isomoprhe à $\dot{f}^*X$ pour un représentant $\dot{f}$ de f.

Conjecture 1. *Tout espace analytique compact X_0 admet une déformation semi-universelle.*

Conjecture 1'. *Si X_0 est un espace analytique compact dont le groupe des automorphismes infinitesimaux H^0 $(X_0, \mathcal{G}_{X_0})$ est réduit à* 0, *X_0 admet une déformation universelle.*

Ces conjectures ont été démonstrées dans le cas où X_0 est lisse, i.e. est une variété, par Kodaira—Nirenberg—Spencer [6] sous l'hypothèse $H^2(X_0, \mathcal{G}_{X_0}) = 0$ (on trouve alors une variété de modules S lisse), puis par Kuranishi [8] sans cette hypothèse. La question est toujours ouverte dans le cas général.

3. LE PROBLÈME DES MODULES POUR LES SOUS-ESPACES ANALYTIQUES COMPACTS D'UN ESPACE ANALYTIQUE DONNÉ

Etant donné un espace analytique X, nous appellerons famille analytique de sous-espaces analytiques compacts de X paramétrée par un espace analytique S tout sous-espace analytique Y de $S \times X$ propre et plat sur S. Si $Y \subset S \times X$ est propre et plat sur S, pour tout morphisme f: $S' \rightarrow S$, l'espace analytique f^*Y est propre et plat sur S' et s'identifie à un sous-espace analytique de $S' \times X$, donc constitue une famille analytique de sous-espaces analytiques compacts de X paramétrée par S'. On dit que Y est une *famille universelle* de sous-espaces analytiques compacts de X si, pour tout espace analytique S' et toute famille analytique Y' de sous-espaces analytiques compacts de X paramétrée par S', il existe un morphisme f: $S' \rightarrow S$ et un seul tel que $Y' = f^*Y$. Si Y est une famille universelle, on voit, en prenant pour S' un espace réduit à un point, que l'ensemble sous-jacent à S s'identifie à l'ensemble des sous-espaces analytiques compacts de X.

Nous avons obtenu [1] le résultat suivant:

Théorème 1. *Pour tout espace analytique X, il existe une famille universelle de sous-espaces analytiques compacts de X.*

Le problème des modules pour les sous-variétés analytiques compactes d'une variété analytique donnée était beaucoup plus facile que le problème résolu par Kodaira—Nirenberg—Spencer et Kuranishi. Il était donc naturel de commencer par là l'étude des problèmes de modules pour des espaces analytiques (éventuellement avec singularités).

Pour résoudre ce problème, nous avons été amené à sortir du cadre des espaces analytiques de dimension finie pour considérer des espaces analytiques «banachiques». Cette méthode était déjà employée par Kuranishi [2], bien que cela n'aparaisse pas explicitement dans la première démonstration qu'il a publié de son théorème. Les espaces analytiques banachiques ne sont que des intermédiaires, l'espace X d'où l'on part et l'espace de modules que l'on construit sont, bien entendu, de dimension finie.

4. LE PROBLÈME DES MODULES LOCAUX POUR LES CLASSES DE FIBRÉS ANALYTIQUES PRINCIPAUX DE BASE ET DE FIBRE DONNÉES

Soit G un groupe de Lie complexe. Pour tout espace analytique X, notons G_X le faisceau des germes de morphismes de X dans G. L'ensemble $H^1(X;\ G_X)$ s'identifie à l'ensemble des classes de fibrés analytiques principaux de fibre G sur X. Un morphisme $f\colon Y \to X$ définit un morphisme $f^*G_X \to G_Y$, de faisceaux sur Y, d'où une application $f^*\colon H^1(X;\ G_X) \to H^1(Y;\ G_Y)$.

Soit X un espace analytique compact. Nous appellerons *famille analytique* d'éléments de $H^1(X;\ G_X)$ paramétrée par un espace analytique S tout élément de $H^0(S;\ R^1\pi_*G_{S\times X})$, où π est la projection $S \times X \to S$. Pour tout point $s \in S$, l'injection $i_s\colon\ X \to S \times X$ définit un morphisme $i_s^*\colon G_{S\times X} \to G_X$, d'où une application $\varepsilon\colon H^1(s \times X;\ G_{S\times X}) \to H^1(X;\ G_X)$. Si $\gamma \in H^0(S;\ R\pi_*G_{S\times X})$, on note γ_s le germe de γ en s; on a $\gamma_s \in (R^1\pi_*G_{S\times X})_s = H^1(s \times X;\ G_{S\times X})$, et on pose $\gamma(s) = \varepsilon(\gamma_s) \in H^1(X;\ G_X)$.

Si S est un espace analytique muni d'un point de base s_0, nous apellerons *famille analytique locale* d'éléments de $H^1(X;\ G_X)$ tout élément γ de $H^1(s_0 \times X;\ G_{S\times X})$. On dira que γ est une famille locale semi-universelle (resp. universelle) si, pour tout espace analytique S' muni d'un point de base s_0' et tout élément $\gamma' \in H^1(s_0' \times X;\ G_{S'\times X})$ tel que $\varepsilon(\gamma') = \varepsilon(\gamma)$, il existe un germe de morphisme (resp. un germe de morphisme et un seul) f de S' dans S tel que $\gamma' = (f \times I_X)^*(\gamma)$.

Conjecture 2. *Pour tout espace analytique compact X, tout groupe de Lie G et tout élément $\gamma_0 \in H^1(X;\ G_X)$, il existe une famille locale semi-universelle γ d'éléments de $H^1(X;\ G_X)$ telle que $\varepsilon(\gamma) = \gamma_0$.*

Dans le cas oú G est abélien, cette conjecture se démontre facilement, pour $G = \mathbf{C}^*$, on a mieux: il existe une famille analytique universelle paramétrée par le *groupe de Picard* de X.

Dans le cas où X est lisse, la conjecture 2 se démontre à partir d'une formule de Malgrange et Koszul [7], par des méthodes analogues à celles de Kuranishi. Des démonstrations ont été publiées indépendamment par Oniščik et Griffith.

Dans le cas général, la question est ouverte. Il est vraisemblable que, comme cela a lieu dans le cas lisse, ce problème est plus simple que le problème des modules locaux pour les espaces analytiques compacts. En un certain sens, le problème résolu par le théorème 1 revient à la détermination d'un H^0, tandis que les problèmes posés par les conjectures 1 et 2 reviendraient à la détermination d'un H^1. C'est pourquoi nous pensons qu'une démonstration de la conjecture 2 serait un pas vers celle de la conjecture 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Douady A., Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, *Annales de l'Institut Fourier*, 1966, à paraître.

[2] Douady A., Le problème des modules pour les variétés analytiques compactes (d'après M. Kuranishi), Sèminaire Bourbaki, n° 277, dec. 1964, Institut Henri Poincaré, Paris.

[3] Grothendieck A., Technique de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV: les schémas de Hilbert, Séminaire Bourbaki, n° 221, mai 1961, Institut Henri Poincaré, Paris.

[4] Crothendieck A., Techniques de constructions en géométrie analytique, IX, Quelques problèmes de modules, Séminaire Henri Cartan, 1960—1961, Exposé 16, Ecole Normale Supérieure, Paris.

[5] Kodaira K., Spencer D. C., On the deformation of complex analytic structures, *Annals of Math.*, **67**, 328—460 (1958).

[6] Kodaira K., Nirenberg L. and Spencer D. C., On the existence of deformations of complex analytic structures, *Annals of Math.*, **68**, 450—459 (1958).

[7] Koszul J. L. at Malgrange B., Sur certaines fibrées complexes, *Archiv der Mathematik*, **9**, 102—109 (1958).

[8] Kuranishi M., On the locally complete families of complex analytic, structures, *Annals of Math.*, **75**, 536—577 (1962).

P. Elias

GAUSSIAN CHANNELS AND FEEDBACK SYSTEMS

The paper discusses networks (directed graphs) having one input node, one output node, and an arbitrary number of intermediate nodes, whose branches are noisy communications channels, in which the input to each channel appears at its output corrupted by additive Gaussian noise. Each branch is labeled by a non-negative real parameter which specifies how noisy it is. A branch originating at a node has as input a linear combination of the outputs of the branches terminating at that node.

The channel capacity of such a network is defined. Its value is bounded in terms of branch parameter values and procedures for computing values for general networks are described. Explicit solutions are given for series-parallel and simple bridge networks.

The general results are applied to the particular networks which arise from the decomposition of a simple feedback system into successive forward and reverse (feedback) channels. When the feedback channels are noiseless, the capacities of the forward channels are shown to add. Some explicit expressions and some bounds are given for the case of noisy feedback channels.

F. W. Gehring

EXTENSION THEOREMS FOR QUASICONFORMAL MAPPINGS IN n-SPACE

Suppose that D and D' are domains in $\overline{\mathbf{R}}^n$, finite Euclidean n-space plus the point ∞, and that f is a homeomorphism of D onto D'. Next for each point P in $D—\{\infty\}—\{f^{-1}(\infty)\}$ let

$$H(P) = \limsup_{r\to 0} \frac{\sup\limits_{|x-P|=r} |f(x)-f(P)|}{\inf\limits_{|x-P|=r} |f(x)-f(P)|}.$$

The mapping f is said to be *quasiconformal* if H is bounded in $D—\{\infty\}—\{f^{-1}(\infty)\}$.

A domain D is said to be a *quasiconformal ball* if there exists a quasiconformal mapping f of D onto the open unit ball B. The following extension theorem shows that a domain is a quasiconformal ball if it has a sufficiently regular boundary.

Theorem 1. *If D and U are domains with $C(D) \subset U$ and if there exists a homeomorphism f of $D \cap \overline{U}$ into B which is quasiconformal in $D \cap \overline{U}$ such that $f(x) \to \partial B$ as $x \to \partial D$, then D is a quasiconformal ball.*

This result can be extended in the special case where $n = 3$ as follows.

Theorem 2. *If D is a Jordan domain and if each point P of ∂D has a neighbourhood U such that $D \cap U$ is a quasiconformal ball, then D is a quasiconformal ball.*

A set S is said to be a *quasiconformal sphere* if there exists a quasiconformal mapping f of $\boldsymbol{R}^n$ onto itself which carries S onto the unit sphere ∂B. The above two theorems can be used to give local characterizations for quasiconformal spheres.

E. De Giorgi

HYPERSURFACES OF MINIMAL MEASURE IN PLURIDIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACES

At first I consider the ordinary surfaces in $\boldsymbol{R}^{n+1}$ represented by a real function f on a domain of $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqslant 3)$, which have minimal measure. I will discuss boundary value problems with regard to regularity questions, removable singularities, and the extension of Bernstein's theorem. Then I will make a few comments on a more general formulation of the Plateau problem for higher dimensional manifolds embedded in euclidean space and related results.

H. Grauert, R. Remmert

ON NON-ARCHIMEDEAN ANALYSIS

In 1961 J. Tate gave a Seminar at Harvard, in which he laid the basic concepts of a general theory of analytic functions over a completely valued, non-archimedean field. Based on Tate's Seminar notes (which were published by the Institute des Hautes Etudes Scientifiques in Bures-sur-Yvette) authors (in collaboration to a large extent) continued the work in a slightly different context and obtained further results which lead to a simpler definition of analytic space and a simpler sheaf theory.

1. Assume that k is a field which carries a non-archimedean valuation: $|a|$ for $a \in k$. Assume that k is complete with respect to the valuation. Now, go over to the algebraic closure of k, extend the valuation and complete again, obtain $\bar{k}$. The field $\bar{k}$ is algebraically closed.

We denote by E the valuation ring of $\bar{k}$, by $t\,(E)$ its maximal ideal and put $\bar{\varkappa} = E/t(E)$, which is an algebraically closed field. τ: $E \to \varkappa$ denotes the quotient projection. τ gives also a mapping $E^n = E \times \times \ldots \times E \to = \bar{\varkappa} \times \ldots \times \bar{\varkappa}$, which again will be denoted by τ. The image $\varkappa = \tau(k \cap E)$ is a subfield of $\bar{\varkappa}$.

Because $\bar{k}^n = \bar{k} \times \ldots \times \bar{k}$ (n times) is totally disconnected (good) analytic functions cannot be defined just by saying: f is analytic in an open subset $B \subset \bar{k}^n$ if it locally can be developed in a power series. For such functions no identity theorem would be valid. However, over E^n a good concept can be introduced (and moreover the field k can be used):

D e f i n i t i o n. A function f over E^n with values in $\bar{k}$ is called a *affinoid function* if there is a power series $\sum a_{\nu_1 \ldots \nu_n} z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n}$ with $a_{\nu_1 \ldots \nu_n} \in k$, which converges over E^n against f.

The k-algebra T_n of affinoid functions over E^n is a noetherian ring (as was proved by Tate). τ induces a projection $\tau^* : T_n \to \widetilde{T}_n = = \varkappa\,[z_1, \ldots, z_n]$. This τ^* is an essential tool in the whole theory, it brings everything near to algebraic geometry and is responsible for many differences to complex analysis.

k serves as ground field. Because the algebraic closure of k is of infinite degree over k, in general, one cannot restrict oneselves to algebraically closed ground fields.

2. A good sheaf theory has to be build up over E^n. Denote by O the sheaf of germs of analytic functions (e.g. of convergent power series over $\bar{k}$). T_n is a k-subalgebra of the k-algebra of cross-sections $\Gamma(E^n, O)$. The pair (O, T_n) determines the "structure" of E^n and is called the structure sheaf of E^n, T_n is the structure ring.

Assume that S is a analytic sheaf, e.g. a sheaf of O-modules over E^n. Because E^n is totally disconnected $\Gamma(E^n, S)$ is too big. We have to give a T_n-submodule $M \subset \Gamma(E^n, S)$. The pair (S, M) then is called a (k-) *affinoid sheaf*. It is possible now to introduce the notion of "coherence" and it follows very simply from the theory of noetherian rings that the structure sheaf is coherent (in the complex case the proof of the analoguous statement is not so simple).

Assume that $J \subset O$ is a analytic subsheaf and that $I \subset \Gamma(E^n, J)$ is a T_n-submodule of T_n. Assume moreover that the pair (J, I) is coherent. We put $X = \{J = O\} \underset{\text{def}}{=} \{x \in E^n : J_x \neq O_x\}$, $H = (O/J) \mid X$ and $A = T_n/I$. The sheaf H over X is a sheaf of local k-algebras, A can be considered as a k-subalgebra of $\Gamma(X, H)$ (of course, that has to be proved!). The triple (X, H, A) is called a *affinoid space*. Sheaf theory can be done over affinoid spaces like over E^n. In future we shall call more generally a triple (X, H, A) consisting of a topological space X, a sheaf of local k-algebras H and a k-subalgebra A a affinoid space if it is isomorphic with a affinoid space embedded in E^n.

A triple (X', H', A') is said to be a *affinoid subdomain* of a affinoid space (X, H, A) if (X', H', A') is a affinoid space and moreover $X' \subset X$ open, $H' = H \mid X'$, $A \mid X' \subset A'$. It follows very easily from a result of Nastold that the structure ring A' is uniquely determined by X', so that it is possible to ask: When is a open $X' \subset X$ a affinoid subdomain? In case $X = E$ the (irreducible) affinoid subdomains are just closed discs $\{z: |z—z_0| \leqq \varepsilon\}$ minus finitely many open discs.

A result hard to obtain is:

Theorem. *Every finite covering* $\mathfrak{U}$ *with affinoid subdomains of an affinoid space is acyclic with respect to any coherent affinoid sheaf* (S, M), *that means*:

$$Z^0(\mathfrak{U}, S, M) = M, \ H^\nu(\mathfrak{U}, S, M) = 0 \quad \textit{for } \nu \geqq 1.$$

In order to obtain this result one has to pass over from k to $\bar{k}$, from A to $A \hat{\otimes} \bar{k}$ and to consider in the case $k = \bar{k}$ the rings $\mathring{A} = \{f \in A: |f(x)| \leqslant 1 \text{ for } x \in X\}$, $t(A) = \{f \in A: |f(x)| < 1\}$ and $\tilde{A} = \mathring{A}/t(A)$. $\tilde{A}$ is an affine ring. Denote by $\tilde{X}$ an affine model of $A.\tilde{X}$ is called the algebraic model of X. It follows that $\tilde{X}$ has the same dimension as X and the same algebraic degree (which is false in general if $k \neq \bar{k}$). One has a mapping $\tau : \bar{X} \to \tilde{X}$. By using τ and subrings of k with discrete valuation (so called B-rings) one obtains results for X from results for $\widetilde{X}$ (of algebraic geometry). This finitely leads to the proof of the acyclicity of affinoid coverings.

3. Finitely good analytic spaces are glued together out of affinoid ones. These are called *rigid analytic spaces*. Assume that X is a Hausdorff space, assume that H is a sheaf of local k-algebras over X. A *affinoid map* in X is a affinoid space (X', H', A') such that $X' \subset X$ open, $H' = H \mid X'$. Two affinoid maps (X_ν, H_ν, A_ν) with $\nu = 1, 2$ are *compatible* if $X_{12} = X_1 \cap X_2 = \varnothing$ or X_{12} is a affinoid subdomain of X_1 and of X_2 and the functions of $\mathring{A}_\nu \mid X_{12}$ generate A_{12}, the structure ring of X_{12}, topologically (this latter property is a global Hausdorff axiom). A collection $\{(X_\nu, H_\nu, A_\nu) : \nu = 1, 2, 3, \ldots\}$ of affinoid maps is called a *atlas* if 1) $\bigcup X_\nu = X$, 2) (X_ν, H_ν, A_ν), (X_μ, H_μ, A_μ) are always compatible, 3) $\{\mu\colon X_\nu \cap X_\mu \neq \varnothing\}$ finite, 4) "a neighbourhood of the (closed) set X_ν is covered by X_μ" (this property can be expressed in exact terms). Now the compatibility of atlasses can be defined. A maximal system of compatible atlasses is a *rigid analytic structure* and (X, H) equipped with such a structure a rigid analytic space.

And now the theory of these spaces begins. You can define closed spaces, Hopf manifolds, Stein spaces and so on and prove results.

U. Grenander

A METRIC GRAMMAR OF PATTERNS

The report gives a mathematical model for the analysis and recognition of patterns. Patterns are studied in simple and basic terms such as signs, compositions and images and using the basic relations similarity and synonymity. In this way the analysis can be formulated as a discrimination problem for pure images. In most practical cases the pure images are deformed and the question arises how the deformed images can be used to arrive at reasonable decisions concerning the generating patterns. A number of special cases are studied with the purpose of illustrating the concepts introduced and to point to problems of relevance. The statistical properties of images are studied, especially for the important class of contrast patterns. The paper will be published elsewhere.

A. Haefliger

KNOTTED SPHERES AND RELATED GEOMETRIC PROBLEMS

The different kinds of groups of knotted spheres occur in many geometrical problems: classification of manifolds, smoothing of embeddings, and so on.

As an example, we consider the problem of the classification of regular neighbourhoods. Let V be a piecewise linear manifold of dimension n. A regular neighbourhood of codimension q of V is a piecewise linear manifold N of dimension $n+q$, containing V as a submanifold, and which is collapsible on V.

Isomorphisms classes of regular neighbourhoods of codimension q of V are in 1—1 correspondence with homotopy classes of V in a classifying space BPL_q, where PL_q is a simplicial group. For regular neighbourhoods, one can define Whitney sum, quotient, complement, induced neighbourhood, and so on. There is a complete analogy with the theory of vector bundles over V, the orthogonal group O_q being replaced by the group PL_q.

The homotopy group $\pi_n(PL_q)$ is isomorphic to the group F_n^q of concordance classes of smoothings of the sphere S^n in S^{n+q} with a normal framing; for $q>2$ and $n>4$, this group is isomorphic to the group of knotted homotopy n-spheres in S^{n+q} with a normal framing. Other groups of knotted spheres occur in the problem of existence of a smooth neighbourhood of V.

Parts of these results have been obtained independently by B. Sanderson and E. C. Zeeman.

J. K. Hale

A CLASS OF LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS

This report is a summary of some unpublished results of K. Meyer, C. Perelló and the author concerning a class of autonomous linear functional equations which includes as special cases autonomous linear functional differential equations of retarded and neutral type as well as functional difference equations.

Let R^n be a real or complex n-dimensional linear vector space of column vectors with norm $|\cdot|$ and let $C_r([-r, 0], R^n)$ be the Banach space of continuous functions mapping $[-r, 0]$ into R^n with the norm $\|\varphi\|_r$ for φ in C_r defined by $\|\varphi\|_r = \max\{|\varphi(\theta)|, \theta \text{ in } [-r, 0]\}$. If g, f are continuous linear mappings of C_r into R^n, then there exist $n\times n$ matrices μ, η whose elements are of bounded variation on $[-r, 0]$ such that

$$\begin{aligned} g(\varphi) &= \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\,\varphi(\theta), \\ f(\varphi) &= \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\,\varphi(\theta) \end{aligned} \tag{1}$$

for all φ in C_r. We shall suppose that the measure μ is nonatomic at 0 and more specifically that there is a continuous nondecreasing function $\delta(s)$, $0\leqq s\leqq r$, such that $\delta(0)=0$ and for all φ in C_r

$$\left|\int_{-s}^{0} [d\mu(\theta)]\,\varphi(\theta)\right| \leqq \delta(s)\,\|\varphi\|_s. \tag{2}$$

For any φ in C_r, define $\gamma(\varphi) = \varphi(0) - g(\varphi)$. For any continuous function h mapping $[0, \infty)$ into R^n and any fixed element φ in C_r, consider the functional integral equation

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t), \quad -r \leqq t \leqq 0, \\ x(t) &= \gamma(\varphi) + g(x_t) + \int_0^t f(x_s)\,ds + \int_0^t h(s)\,ds, \qquad t \geqq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

where, for each fixed $t \geqq 0$, x_t is in C_r and is defined by $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-r \leqq \theta \leqq 0$. By a solution of (3), we will always mean a continuous function satisfying the above relation.

For $g = 0$, equation (3) is equivalent to the functional differential equation of retarded type

$$\dot{x}(t) = f(x_t) + h(t) \tag{4}$$

with the initial condition at $t = 0$ given by φ. If $f \equiv 0$ and $h \equiv 0$, equation (3) is a functional difference equation of retarded type and, in particular, includes difference equations. For both f and g not identically zero, equation (3) corresponds to a retarded equation of neutral type. In fact, formal differentiation of the equation yields

$$\dot{x}(t) = g(\dot{x}_t) + f(x_t) + h(t) \tag{5}$$

where $\dot{x}_t$ is defined as $\dot{x}_t(\theta) = \dot{x}(t+\theta)$, $-r \leqq \theta \leqq 0$. Also, if one begins with (5) and defines a solution with initial function φ at 0 to be a continuous function satisfying (5) almost everywhere, then an integration yields (3) with $\gamma(\varphi) = \varphi(0) - g(\varphi)$.

This latter remark is precisely the reason for considering the equation (3) rather than (5). If one attempts to discuss equation (5) directly, then the first problem that is encountered is a precise definition of a solution and a precise definition of the topology to be induced on the space in which the solution will lie. Such a topology will necessarily include the first derivative of x in some way; where as, if we consider equation (3), the simpler space C_r can be employed.

If h in (3) is identically zero, we will say equation (3) is homogeneous and, otherwise, it is nonhomogeneous.

Theorem 1. *For any given φ in C_r, there is a unique function $x(\varphi)$ defined and continuous on $[-r, \infty)$ such that $x(\varphi)$ satisfies* (3) *on* $[0, \infty)$. *Furthermore, there is a constant $\beta > 0$ such that*

$$\| x_t(\varphi) \| \leqq e^{\beta t} \left[\| \varphi \| + \int_0^t | h(s) | \, ds \right], \qquad t \geqq 0. \tag{6}$$

This theorem is proved by using the nonatomic property of μ at 0 together with the contraction mapping principle to first show that (3) has a solution on a small interval to the right of $t = 0$. An application of a result on the continuation of the solution then allows one to obtain the estimate (6) for $t \geqq 0$.

If h is identically zero and $x = x(\varphi)$ is a solution of the homogeneous equation

$$x_0 = \varphi, \qquad\qquad (7)$$
$$x(t) = \gamma(\varphi) + g(x_t) + \int_0^t f(x_s)\, ds, \qquad t \geqq 0,$$

then it follows from the uniqueness of the solution that $x_t(\varphi)$ is a continuous linear mapping of C_r into C_r for each fixed $t \geqq 0$, and $x_t(\varphi)$ satisfies the semigroup property. If we define the linear operator $T(t)$ by

$$x_t(\varphi) \overset{\text{def}}{=} T(t)\,\varphi, \qquad t \geqq 0, \qquad\qquad (8)$$

then we can prove

Theorem 2. *The family of linear operators* $\{T(t),\ t \geqq 0\}$ *mapping* C_r *into* C_r *is a strongly continuous semigroup on* $[0, \infty)$ *with* $T(0) = I$. *If, in addition the function* $\delta(s)$ *in* (2) *satisfies* $\lim_{s\to 0} \delta(s)/s = 0$, *then the infinitesimal generator* A *of* $T(t)$ *is given by*

$$(A\varphi)(\theta) = \begin{cases} \dot{\varphi}(\theta), & -r \leqq \theta < 0, \\ g(\dot{\varphi}) + f(\varphi), & \theta = 0 \end{cases}$$

and the domain of A, $\mathfrak{D}(A)$ *consists of all functions* φ *in* C_r *with a continuous first derivative and* $\dot{\varphi}(0) = g(\dot{\varphi}) + f(\varphi)$.

It is interesting to note that if φ is in $\mathfrak{D}(A)$, then $T(t)\,\varphi$ is actually a continuously differentiable solution of the functional differential equation (5) with $h \equiv 0$.

It is easy to show that the spectrum of A, $\sigma(A)$, consists of only point spectrum and that λ is in $\sigma(A)$ if and only if λ satisfies the *characteristic equation*

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} \lambda e^{\lambda\theta}\, d\mu(\theta) - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta}\, d\eta(\theta). \qquad (9)$$

Also, because A is a closed operator and a root λ_0 of (8) has finite multiplicity, one can show that the resolvent operator $(A - \lambda I)^{-1}$ has a pole of finite order at λ_0 and, thus, the generalized eigenspace of λ_0 has finite dimension. If $\mathfrak{N}(A)$ and $\mathfrak{R}(A)$ denote, respectively, the null space and range of an operator A and the generalized eigenspace of λ_0 is given by $\mathfrak{N}(A - \lambda_0 I)^k$, then it can be shown that the space C_r is decomposed as a direct sum of the subspaces $P \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{N}(A - \lambda_0 I)^k$, $Q \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{R}(A - \lambda_0 I)^k$ each of which is invariant under both A and $T(t)$, $t \geqq 0$. When C_r is decomposed in this way, we shall say C_r is decomposed by λ_0 as $C_r = P \oplus Q$ and write any element φ in C_r as $\varphi = \varphi^P + \varphi^Q$, φ^P in P, φ^Q in Q. If Φ is a basis for P, then there is a matrix B such that $A\Phi = \Phi B$ and, thus, $\Phi(\theta) = \Phi(0)\, e^{B\theta}$, $-r \leqq \theta \leqq 0$. Also, one easily shows that $T(t)\,\Phi(\theta) = \Phi(0) e^{B(t+\theta)}$, $-r \leqq \theta \leqq 0$, which implies that the solutions of (3) on the generalized eigenspace of a solution of (9) can be defined on $(-\infty, \infty)$ and that the action of the semigroup $T(t)$ on this subspace is essentially the same as an ordinary differential equation. The decomposition outlined here plays the same role as the Jordan canonical form in ordinary differential equations.

In the applications, it is necessary to have an explicit representation for the projection operator E_{λ_0} associated with the above decomposition. This can be obtained from the formula

$$E_{\lambda_0}\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c} (A - \lambda I)^{-1} \varphi \, d\lambda$$

where c is a circle in the complex plane which contains no point in $\sigma(A)$ except λ_0. As in the case of retarded functional differential equations (see [1] or [2]) the projection operator E_{λ_0} can also be obtained in the following way. Let R^n be n-dimensional real or complex space of row vectors and define operator A^* with $\mathfrak{D}(A^*) \subset C([0, r], R^n)$ given by all ψ in $C([0, r], R^n)$ which are continuously differentiable with $\dot{\psi}(0) = \int\limits_{-r}^{0} \dot{\psi}(-\theta)\, d\mu(\theta) - \int\limits_{-r}^{0} \psi(-\theta) \times d\eta(\theta)$ and for ψ in $\mathfrak{D}(A^*)$,

$$(A^*\psi)(s) = \begin{cases} -\dot{\psi}(s) \ \text{for}\ 0 < s \leqq r, \\ \int\limits_{r}^{0} \dot{\psi}(-\theta)\, d\mu(\theta) + \int\limits_{-r}^{0} \psi(-\theta)\, d\eta(\theta) \ \text{for}\ s = 0. \end{cases}$$

For any ψ in $C([0, r], R^n)$, ψ continuous, and any φ in $C([-r, 0], R^n)$, define

$$(\psi, \varphi) = \psi(0)\,\varphi(0) - \int\limits_{-r}^{0} \left[\frac{d}{d\zeta} \int\limits_{0}^{\zeta} \psi(s - \zeta)\, d\mu(\theta)\, \varphi(s)\, ds \right]_{\zeta=\theta} - \\ - \int\limits_{-r}^{0} \int\limits_{0}^{\theta} \psi(s - \theta)\, d\eta(\theta)\, \varphi(s)\, ds.$$

For ψ in $\mathfrak{D}(A^*)$, φ in $\mathfrak{D}(A)$, it follows that $(\psi, A\varphi) = (A^*\psi, \varphi)$. To obtain the projection operator E_{λ_0}, one proceeds as follows: if we let $\Phi = (\varphi_1, \ldots \varphi_p)$ be a basis for the generalized eigenspace $P = \mathfrak{N}(A - \lambda_0 I)^k$ of λ_0 and let $\Psi = \operatorname{col}(\psi_1, \ldots, \psi_p)$ be a basis for $\mathfrak{N}(A^* - \lambda_0 I)^k$, then $E_{\lambda_0}\varphi = \Phi(\Psi, \varphi)$ for all φ in $C([-r, 0], R^n)$.

Another important relation in ordinary differential equations is the variation of constants formula. By using the fact the solution $x^*(t, h)$ of (3) with $\varphi=0$ is a continuous linear mapping of $C([0, t], R^n)$ into R^n and the Riesz representation theorem, it follows that

$$x^*(t, f)=\int_0^t [d_s W(t, s)]\, h(s)$$

where $W(t, t) = 0$, $W(t, s)$ is of bounded variation in s for s in $[0, t]$ and $W(t, s)$ is continuous from the right in s for s in $(0, t)$. One can also show that $W(t, s)$ is continuous from the right at $s = 0$, $W(t, s) = W(t-s, 0)$ and $-W(t, 0)$ is the matrix solution of (3) with $\varphi = 0$ and f equal to the identity matrix. Because equation (3) is linear, it follows that the solution $x = x(\varphi)$ satisfies

$$x(t)=[T(t)\varphi](0)+\int_0^t [d_s V(t-s)]\, h(s)$$

where we have defined $V(t) = W(t, 0)$. Using the fact that $V(t) = 0$ for $-r \leqq t \leqq 0$, we also obtain

$$x_t(\theta)=[T(t)\varphi](\theta)+\int_0^t [d_s V_{t-s}(\theta)]\, h(s), \qquad -r\leqq\theta\leqq 0,$$

which can be written more compactly as

$$x_t=T(t)\varphi+\int_0^t [d_s V_{t-s}]\, h(s). \tag{10}$$

Equation (10) is called the *variation of constants formula* for (3).

If λ_0 is a solution of (8) and C is decomposed by λ_0 as $P \oplus Q$, then it can also be shown that

$$x_t^P=T(t)\varphi^P+\int_0^t [d_s V_{t-s}^P]\, h(s),$$

$$x_t^Q=T(t)\varphi^Q+\int_0^t [d_s V_{t-s}^Q]\, h(s).$$

If g is identically zero in (3), then we have seen that equation (3) is equivalent to (4) and the variation of constants formula (10) can be written as

$$x_t=T(t)\varphi+\int_0^t T(t-s) K_0 f(s)\, ds$$

where $T(t)K_0$ is the solution of (4) with initial value at 0 given by $K_0(\theta) = 0$ for $-r \leqq \theta < 0$, $K_0(0) = I$, the identity matrix. This is the standard manner of writing the variation of constants formula for (4) as given in [3] and [4]. For the equation of neutral type, i.e., f, g not identically zero, this formula also coincides with the one given for some special cases in [3].

To apply these results in special applications, it is necessary to obtain precise estimates of $T(t)\varphi^Q$ and V_t^Q. We are in the process of obtaining these estimates by using the general representation theorems for a semigroup in terms of the inverse Laplace transform of the resolvent of the infinitesimal generator. An easier way would be to prove that

$$\sigma(T(t)) = \overline{e^{t\sigma(A)}} + \{0\},$$

a fact which seems to be true for the particular A given above.

REFERENCES

[1] Hale J., Linear functional differential equations with constant coefficients. Contributions to Differential Equations 2 (1963), 291—319.
[2] Shimanov S. N., On the theory of linear differential equations with retardations. *Differentzialnie Uravneniya* 1 (1965), 102—116.
[3] Bellman R. and Cooke K., Differential-Difference Equations, Academic Press, 1963.
[4] Halanay A., Differential Equations, Academic Press, 1965.

M. W. Hirsch

SMOOTHINGS OF PIECEWISE LINEAR MANIFOLDS

Two smoothings α, β of a *PL* manifold M are *concordant* if $M \times \mathbf{R}$ has a smoothing γ making $M_\alpha \times \{0\}$ and $M_\beta \times \{1\}$ smooth submanifolds of $(M \times \mathbf{R})_\gamma$.

A homeomorphism $f : M \to M_\beta$ is *PD isotopic to* 1 if there is a smooth triangulation $F : M \times I \to M_\beta \times I$ of the form $F(x, t) = (F_t(x), t)$, such that $F_0 = f$ and $F_1 =$ identity.

The following result was found independently by James Munkres.

Theorem 1. *Smoothings* α, β *of* M *are concordant if and only if there is a homeomorphism* $M_\alpha \to M_\beta$ *which is*

a) *PD isotopic to* 1, *and*

b) *a diffeomorphism* $M_\alpha \to M_\beta$.

The following theorems, clarifying the nature of the set $\Gamma(M)$ of concordance classes of smoothings of M, grew out of joint work with Barry Mazur. Similar results for the special case of manifolds of finite homotopy type are due to R. Lashof and M. Rothenberg.

Let $\eta = (p, E, B)$ be a vector bundle over a polyhedron B together with an atlas (U_i, f_i) of local trivializations $f_i : p^{-1} U_i \to U_i \times \boldsymbol{R}^n$ such that:

1. U_i is an open cover of B;
2. each $f_j f_i^{-1}$: $(U_i \cap U_j) \times \boldsymbol{R}^n \to (U_i \cap U_j) \times \boldsymbol{R}^n$ comes from a piecewise smooth map $U_i \cap U_j \to O(n)$.

Let ξ be a PL bundle with fibre $\boldsymbol{R}^n$ and base B. A *linearization* $g : \xi \to \eta$ is a bundle map such that for each i the map $f_i g : p_\xi^{-1} U_i \to U_i \times \boldsymbol{R}^n$ is a smooth triangulation. Two linearizations $g_i : \xi \to \eta_i$ $(i = 0,1)$ are *concordant* if there exists a linearization of $\xi \times I$ reducing to f_i on $\xi \times \{i\}$. The set of concordance classes of linearization of ξ is $\Lambda_0(\xi)$. Put $\Lambda(\xi) = \lim_k \Lambda_0(\xi \oplus \varepsilon^k)$.

Let τ_M be the PL tangent bundle of M. If α is a smoothing of M, a Riemann metric for M_α induces a linearization $L(\alpha)$ of τ_M.

Theorem 2. *The map L induces an injection $\Gamma(M) \to \Lambda_0(\tau_M)$ and a bijection $\Gamma(M) \to \Lambda(\tau_M)$.*

Let PD_n be the semisimplicial complex whose k-simplices are linearizations $\varepsilon^n_{PL}(\Delta_k) \to \varepsilon^n_0(\Delta_k)$. Let O_n be the group subcomplex coming from piecewise smooth maps $\Delta_k \to O(n)$. Put $\Gamma = \lim(PD_n/O_n)$.

Let ξ be a PL bundle over B. Denote by $F_0(\xi)$ (respectively, $F(\xi)$ the associated semisimplicial bundle with fiber PD_n/O_n (resp., Γ).

Theorem 3. *The set $\Lambda_0(\xi)$ is naturally isomorphic to the set $SF_0(\xi)$ of homotopy classes of sections of $F_0(\xi)$. Likewise $\Lambda(\xi) \approx SF(\xi)$.*

Let $R^\infty = \lim R^k$.

Theorem 4. (a) *Γ is a connected H-space with a homotopy commutative and homotopy associative multiplication induced by a vector space isomorphism $R^\infty \oplus R^\infty \to R^\infty$.*

(b) *$F(\xi)$ is an "H-principal" fibration. Each element of $SF(\xi)$ induces an isomorphism from the set $SF(\xi)$ to the Abelian group $[B, \Gamma]$.*

F. John

THE EFFECT OF GEOMETRY ON THE BEHAVIOUR OF AN ELASTIC SOLID

Using only the general non-linear equations for a perfectly elastic three-dimensional solid in equilibrium and the appropriate boundary conditions, one deduces the constraints that develop automatically in the solid if its shape is that of a thin plate or shell. A priori estimates are given for the degree to which these constraints (essentially the Kirchoff hypotheses) are valid and interior differential equations are derived.

W. Klingenberg

MORSE THEORIE AUF DEM RAUM DER GESCHLOSSENEN KURVEN

1. Sei X ein bogenweise zusammenhängender topologischer Raum. Dann ist diesem Raum zugeordnet ein Raum $\Lambda(X)$ *von parametrisierten geschlossenen Kurven*, etwa, indem man die Menge der stetigen Abbildungen $f\colon S^1 \to X$ des mit $[0, 1]/\{0, 1\}$ parametrisierten Kreises S^1 in dem Raum X mit der kompakt offenen Topologie versieht. Die natürliche Operation von $\boldsymbol{O}(2)$ auf S^1 induziert eine stetige Operation auf $\Lambda(X)$, den Quotientenraum $\Pi(X)$ wird man als *Raum der unparametrisierten geschlossenen Kurven von X bezeichnen.*

Indem man einem $f = (f(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, aus $\Lambda(X)$ den Punkt $f(0) = f(1)$ in X zuordnet, erhält man eine Serre Faserung von $\Lambda(X)$ über X mit $\Omega(X)$, dem Schleifenraum, als Faser. Diese Bemerkung hat Švarc [7] benutzt, um die Homologie von $\Lambda(X)$ mit der Methode der spektralen Sequenzen zu untersuchen. Die Homologie von $\Pi(X)$ läßt sich dann mit den Hilfsmitteln der kompakten Transformationsgruppen studieren.

Wenn X speziell eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit M ist, dann läßt sich zu M ein ebenfalls mit $\Lambda(M)$ bezeichneter Raum von parametrisierten geschlossenen Kurven erklären, der die Struktur einer Hilbert-Mannigfaltigkeit trägt—wir verwenden wieder die Bezeichnung $\Lambda(M)$, da die beiden Räume denselben Homotopietyp haben. Eine Riemannsche Metrik auf M gibt Anlaß zu einer Riemannschen Metrik auf $\Lambda(M)$ und zu einer differenzierbaren Funktion, für welche die Voraussetzungen der von Palais [5] und Smale [6] entwickelten Übertragung der Theorie von Morse auf Hilbert Mannigfaltigkeiten gelten. Damit haben wir also ein weiteres Hilfsmittel an der Hand, die Homologie von $\Lambda(M)$ und $\Pi(M)$ zu studieren. Um seine Durchschlagskraft zu demonstrieren, bestimmen wir die bislang nicht bekannte $\boldsymbol{Z}_2$-Homologie des Raumes $\Pi(S^n)$, mit dem sich schon Morse [4] und Bott [1] befaßt haben. Mit derselben Methode läßt sich auch die Homologie von $\Lambda(P)$ und $\Pi(P)$ bestimmen, wenn P ein projektiver Raum über den reellen oder komplexen Zahlen oder über den Quaternionen oder Cayleyschen Zahlen ist.

2. Sei also jetzt M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Unter $\Lambda(M)$ verstehen wir den Raum der absolut stetigen Abbildungen $f\colon S^1 \to M$, welche in lokalen Koordinaten quadrat-integrierbare erste Ableitungen besitzen. Die auf diesem Raum mit Hilfe von lokalen Koordinaten erklärte 1-Norm bestimmt auf $\Lambda(M)$ die Struktur einer Hilbert Mannigfaltigkeit, vgl. Palais [5]. $\Pi(M)$ erklären wir wie eingangs als Quotientenraum $\Lambda(M)/\boldsymbol{O}(2)$ bezüglich der natürlichen Operation von $\boldsymbol{O}(2)$ auf $\Lambda(M)$. $\pi\colon \Lambda \to \Pi$ bezeichne die Projektionsabbildung.

Offenbar hängen $\Lambda(M)$ und $\Pi(M)$ nur ab vom Homotopietyp von M.

Sei jetzt auf M eine Riemannsche Metrik, $\langle\ ,\ \rangle$, gegeben. Diese liefert auf $\Lambda(M)$ eine *Riemannsche Metrik*, $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$, wie folgt:

$$\langle\langle X, X\rangle\rangle = \int_0^1 (\langle X(t),\ X(t)\rangle + \langle DX(t)/dt,\ DX(t)/dt\rangle)\,dt,$$

wobei $X = (X(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, ein Tangentialvektor an $\Lambda(M)$ ist, das heißt, ein absolut stetiges Vektorfeld längs eines $f = (f(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, aus $\Lambda(M)$ mit quadrat-integrierbaren ersten Ableitungen. D/dt ist die kovariante Ableitung.

Man zeigt, daß $\Lambda(M)$ mit dieser Metrik *vollständig* ist.

Ferner liefert $\langle,\rangle$ eine differenzierbare Funktion E: $\Lambda(M) \to \boldsymbol{R}$, das sogenannte *Energieintegral*:

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 \langle df(t)/dt,\ df(t)/dt\rangle\,dt.$$

Für das zugehörige negative Gradientenfeld —grad E gilt dann die Bedingung (C) von Palais [5] und Smale [6], unter welcher sich die Theorie von Morse übertragen läßt auf Hilbert Mannigfaltigkeiten.

Für ein $c \geqslant 0$ setzen wir $E^{-1}([0, c]) = \Lambda^c$ und $E^{-1}([0, c[) = \Lambda^{c-}$. Für alle $t \geqslant 0$ sind die Integralkurven des Vektorfeldes —grad E erklärt. Wir erhalten eine Halbgruppe von Deformationen φ_t: $\Lambda \to \Lambda$, $t \geqslant 0$, indem wir einem f denjenigen Punkt zuordnen, den die in f mit $t = 0$ beginnende Integralkurve zur Zeit t erreicht hat. Da E und $\langle,\rangle$ mit der Operation von $\boldsymbol{O}(2)$ verträglich sind, wird durch $\boldsymbol{O}(2)$ das Feld —grad E in sich transformiert. Die Deformationen φ_t sind also verträglich mit der Operation von $\boldsymbol{O}(2)$ und sie induzieren daher eine Halbgruppe von Deformationen ψ_t: $\Pi \to \Pi$, $t \geqslant 0$, des Raumes der unparametrisierten Kurven.

Beachte, daß φ_t und ψ_t E-vermindernde Deformationen sind, welche kanonisch definiert sind und nicht von irgendwelchen Hilfskonstruktionen, wie etwa Unterteilungen der f, abhängen —sehr zum Unterschied von der bisherigen Methode, E-vermindernde Deformationen auf Kurvenräumen zu erklären.

3. Ein Element $f \in \Lambda(M)$ heißt *kritisch*, wenn grad $E(f) = 0$. Mit einem Argument der klassischen Variationsrechnung zeigt man, *daß f genau dann kritisch ist, wenn es eine geschlossene Geodätische ist, mit Parameter proportional zur Bogenlänge.*

Insbesondere sind die konstanten Abbildungen $f: S^1 \to M$ kritische Punkte. Wir nennen diese auch die trivialen kritischen Punkte. Sie bilden eine *nicht-entartete kritische Untermannigfaltigkeit* $\Lambda^0(M) = E^{-1}(0)$ *vom Index* 0 in $\Lambda(M)$, im Sinne von Bott [1], welche natürlich isomorph ist zu M.

Wenn f kritisch ist, so ist auch der Orbit von f unter $\boldsymbol{O}(2)$ kritisch. f heißt *nicht-entartet*, wenn sein Orbit eine nicht-entartete kritische Untermannigfaltigkeit im Sinne von Bott [1] ist.

Für jedes $f \in \Lambda$ ist die Isotropiegruppe erklärt als diejenige Untergruppe von $\boldsymbol{O}(2)$, die auf f als Identität operiert. Wenn die Isotropiegruppe von f die zyklische Untergruppe $\boldsymbol{Z}_q$ der Ordnung q von $\boldsymbol{SO}(2)$ ist, dann nennen wir f eine Kurve der *Multiplizität* q. Kurven der Multiplizität 1 nennen wir auch einfach. Falls $f = (f(t))$ die Multiplizität q hat, dann ist auch $(f(t/q))$ ein Element von Λ, die sogenannte f *unterliegende einfache Kurve*.

4. Sei f eine nicht-entartete geschlossene Geodätische, sei G sein Orbit und sei $g = \pi(f) = \pi(G)$ die zugehörige unparametrisierte geschlossene Geodätische. Dann ist $E(f) = c$ positiv. Sei q die Multiplizität von f. G ist dann isolierte kritische Untermannigfaltigkeit, und es gibt eine unter $\boldsymbol{O}(2)$ invariante offene Umgebung $U = U(G)$ von G, deren Kurven ausschließlich eine Multiplizität q' haben, wo $q'q$ teilt. Wir können sogar annehmen, daß U ein Hilbert Diskus-Bündel über G ist.

Der *Index* j *von* f bzw. G ist die Dimension des von den zu negativen Eigenwerten der Indexform (eingeschränkt auf den Normalenraum von G) gehörigen Eigenvektoren aufgespannten Raumes. Diese Eigenvektoren bilden das sogenannte *negative Bündel über* G. Durch die Exponentialabbildung ist ein Diskus-Bündel $D^j(G)$ dieses negativen Bündels in natürlicher Weise mit einem j-dimensionalen Diskus-Unterbündel des Hilbert Diskus-Bündels $U(G)$ über G identifiziert.

Setze $U(G) - G = U_0(G)$ und $D^j(G) - G = D_0^j(G)$. Wie in der klassischen Morse Theorie zeigt man, *daß* $U(G)$ sich *äquivariant* (d. h., auf mit der Operation von $\boldsymbol{O}(2)$ verträgliche Weise) *auf* $U(G)^c = U(G) \cap \Lambda^c$ *deformieren läßt und daß sich* $(U(G)^c, U_0(G)^c)$ *äquivariant auf* $(D^j(G), D_0^j(G))$ *deformieren läßt.*

Unter der Projektion π *liefert dies eine Deformation von* $V(g) = \pi(U(G))$ *auf* $V(g)^c = \pi(U(G)^c)$ *und von* $(V(g)^c, V_0(g)^c)$ *auf* $(\pi D^j(G), \pi D_0^j(G))$.

Wir wollen $\pi D^j(G)$ bestimmen. Dazu faktorisieren wir $\pi \mid D^j(G)$ wie folgt:

$$D^j(G) \xrightarrow{\boldsymbol{Z}_q} D^j(G)/\boldsymbol{Z}_q \xrightarrow{\boldsymbol{O}(2)/\boldsymbol{Z}_q} D^j(g)/\boldsymbol{Z}_q.$$

Das heißt, wir dividieren zunächst durch die Operation der Isotropiegruppe $\boldsymbol{Z}_q$ und dann durch die induzierte Projektion. Der Quotient $D^j(G)/\boldsymbol{Z}_q$ bedeutet, daß wir das D^j-Bündel $D^j(G)$ durch die Operation der Isotropiegruppe $\boldsymbol{Z}_q$ auf den Fasern D^j dividieren. Der zweite Quotient ist eine triviale Faserung, mit $\boldsymbol{O}(2)/\boldsymbol{Z}_q$, isomorph $\boldsymbol{O}(2)$, als Faser. $\pi(D^j(G)/\boldsymbol{Z}_q) = D^j(g)/\boldsymbol{Z}_q$ *ist also isomorph dem Quotienten* $D^j/\boldsymbol{Z}_q$ *einer Faser* D^j *von* $D^j(G)$ *nach* $\boldsymbol{Z}_q$.

Wir erkennen auf diese Weise, wie zuerst von Švarc [7] bemerkt wurde, daß für die relative Homologie $H_*(V(g), V(g)^{c-}) = H^*(D^j(g)/\boldsymbol{Z}_q \, D_0^j(g)/\boldsymbol{Z}_q)$ die Operation der Isotropiegruppe $\boldsymbol{Z}_q$ auf dem «negativen» Diskus D^j in Betracht zu ziehen ist. Man findet, für die Homologiegruppe mit $\boldsymbol{Z}_2$-Koeffizienten, damit folgendes, vgl. Švarc [7]:

Falls q ungerade, so $H_i(V(g), V(g)^{c-}) = \boldsymbol{Z}_2$ für $i = j$ und $= 0$ sonst.

Falls $q = 2^{q_0}q_1$ gerade, mit q_1 ungerade, so $H_i(V(g), V(g)^{c-}) = \boldsymbol{Z}_2$ für $i(q_1) + 2 \leqslant i \leqslant j$, und $=0$ sonst. Hierbei ist $i(q_1)$ der Index der q_1-fachen Überlagerung der g unterliegenden einfachen Geodätischen.

5. Die Morse Theorie stellt eine Beziehung der zwischen der Homologie von $\Lambda(M)$ und $\Pi(M)$ einerseits und den geschlossenen Geodätischen g und ihren Typenzahlen (d. h., lokalen, relativen Homologiegruppen $H_i(V(g), V(g)^{c-})$) andererseits. Insbesondere kann man aus der Homologie von $\Lambda(M)$ und $\Pi(M)$ auf die Existenz einfacher geschlossener Geodätischer schließen, vgl. dazu [3].

Wir wollen hier umgekehrt aus den Eigenschaften der geschlossenen Geodätischen Information über die Homologie von $\Lambda(M)$ und insbesondere von $\Pi(M)$ gewinnen. Die Schwierigkeit hierbei ist, daß die geschlossenen Geodätischen und ihre Typenzahlen in hohem Maße abhängen von der Wahl der Metrik $\langle , \rangle$ auf M, während $\Lambda(M)$ und $\Pi(M)$ ja nur abhängen vom Homotopietyp von M.

Falls es jedoch in der Homotopieklasse von M eine Mannigfaltigkeit mit einer augezeichneten Metrik gibt, wie etwa wenn M in der Homotopieklasse einer Sphäre oder eines allgemeineren symmetrischen Raumes liegt, dann kann man erwarten, mit Hilfe der Morse Theorie Information über die Homologie von $\Lambda(M)$ und $\Pi(M)$ gewinnen zu können.

6. Wir wollen dieses am Beispiel der Sphäre zeigen. Es sei also jetzt $M = S^n$, mit der Metrik konstanter Krümmung $K = 2\pi^2$. Wir beschränken uns auf die $\boldsymbol{Z}_2$-Homologie.

Die nicht-trivialen kritischen Punkte auf $\Lambda = \Lambda(S^n)$ sind die q-fach durchlaufenen parametrisierten Großkreise. Das Energieintegral eines solchen Großkreises ist q^2. Die q-fach durchlaufenen parametrisierten Größkreise bilden eine kritische Untermannigfaltigkeit F_q, welche isomorph ist zur Stiefel-mannigfaltigkeit $V(2, n-1)$ der orthonormalen 2-Beine im $\boldsymbol{R}^{n+1}$.

Das Bild $G_q = \pi(E_q)$ in $\Pi = \Pi(S^n)$, also die q-fach durchlaufenen unparametrisierten Großkreise, ist isomorph zur Grassmann Mannigfaltigkeit $G(2, n-1)$ der 2-Ebenen im $\boldsymbol{R}^{n+1}$.

Über $G(2, n-1)$ haben wir einerseits das *kanonische* $(n-1)$-*Vektorraum-Bündel* ζ^{n-1} und ferner das *Tangentialbündel* τ^{2n-2}. Die durch π: $V(2, n-1) \to G(2, n-1)$ über $V(2, n-1)$ induzierten Bündel bezeichnen wir mit η^{n-1} bzw. σ^{2n-2}.

Wir bemerken, daß σ^{2n-2} eine komplexe Struktur trägt, d.h., die Strukturgruppe $\boldsymbol{O}(2n-2)$ kann auf $\boldsymbol{U}(n-1)$ reduziert werden. Dasselbe trifft zu für die 2-fache Überlagerung $\widetilde{G}(2, n-1)$ von $G(2, n-1)$, also für die orientierte Grassmann Mannigfaltigkeit. Es folgt, daß die Strukturgruppe von $G(2, n-1)$ reduziert werden kann auf die Erweiterung der Ordnung 2, $\widetilde{\boldsymbol{U}}(n-1)$, von $\boldsymbol{U}(n-1)$ mit dem Element, welches den Übergang zum Konjugiert-Komplexen beschreibt. Beachte, daß das Zentrum von $\widetilde{\boldsymbol{U}}(n-1)$ dasselbe ist wie von $\boldsymbol{U}(n-1)$, nämlich $\boldsymbol{U}(1)$.

Die kritische Untermannigfaltigkeit F_q der q-fach durchlaufenen parametrisierten Großkreise ist nicht-entartet. Das negative Bündel über $F_q = V(2, n-1)$ ist gegeben durch

$$\eta^{n-1}, \text{ für } q=1 \qquad (*)$$
$$\eta^{n-1} \oplus \underbrace{\sigma^{2n+2} \oplus \ldots \oplus \sigma^{2n+2}}_{(q-1) \text{ Summanden}}, \text{ für } q > 1.$$

Es folgt, daß

$$H_*(\Lambda^{q^2}(S^n), \Lambda^{q^2-}(S^n)) = H_{*-(2q-1)(n-1)}(V(2, n-1)).$$

Ferner gilt:

Die Inklusion $\Lambda^c(S^n) \to \Lambda(S^n)$ induziert einen injektiven Homomophismus.

Damit folgt:

$H_*(\Lambda(S^n), \Lambda^0(S^n))$ ist die direkte Summe, über alle $q \geqslant 1$ von $H_{*-(2q-1)(n-1)}(V(2, n-1))$. Vgl. Bott [1].

B e m e r k u n g: Wenn wir die Serre Faserung $\Omega(S^n) \to \Lambda(S^n) \to S^n$ betrachten, ist die zugehörige spektrale Sequenz trivial, und es gilt sogar multiplikativ $H^*(\Lambda(S^n)) = H^*(S^n) \otimes H^*(\Omega(S^n))$, vgl. Švarc [7].

Um das Bild des negativen Bündels (*) über F_q unter π zu bestimmen, müssen wir, wie schon in 4. bei der Bestimmung von $D^j(G)$, untersuchen, wie die Isotropiegruppe $\boldsymbol{Z}_q$ auf den Fasern des Bündels operiert. Es stellt sich heraus, daß diese wie die Identität auf η^{n-1} operiert und wie die Multiplikation mit $e^{2\pi i p/q}$ auf dem p-ten Summanden σ^{2n-2} von (*), $1 \leqslant p \leqslant q-1$. Dabei benutzen wir, daß das Zentrum der Strukturgruppe $\boldsymbol{U}(n-1)$ von σ^{2n-2} gleich $\boldsymbol{U}(1)$ ist.

Wir bezeichnen den Quotienten von σ^{2n-2} nach dieser Operation von $\boldsymbol{Z}_q$ mit $\sigma^{2n-2}/\boldsymbol{Z}_q$. Wir lassen hierauf die induzierte Projektion $\underset{p}{\pi}$ wirken, d.h., wir bilden den Quotienten nach $\boldsymbol{O}(2)/\boldsymbol{Z}_q$.

Diese Gruppe wirkt effektiv auf $\sigma^{2n-2}/\underset{p}{\boldsymbol{Z}_q}$, das Bild $\tau^{2n-2}/\underset{p}{\boldsymbol{Z}_q}$ ist also die Basis einer Faserung von $\sigma^{2n-2}/\underset{p}{\boldsymbol{Z}_q}$ mit Faser $\boldsymbol{O}(2)/\boldsymbol{Z}_q$, isomorph zu $\boldsymbol{O}(2)$. Diese Operationen sind verträglich mit der Faserung $\sigma^{2n-2} \to F_q$, wir erhalten also das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \sigma^{2n-2} & \xrightarrow{\boldsymbol{Z}_q} & \sigma^{2n-2}/\underset{p}{\boldsymbol{Z}_q} & \xrightarrow{\boldsymbol{O}(2)/\boldsymbol{Z}_q} & \tau^{2n-2}/\underset{p}{\boldsymbol{Z}_q} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F_q & \xrightarrow{\mathrm{id}} & F_q & \xrightarrow{\boldsymbol{O}(2)/\boldsymbol{Z}_q} & G_q \end{array}$$

$\tau^{2n-2}/\underset{p}{\boldsymbol{Z}_q}$ *ist das Bündel über* $G_q = G(2, n-1)$, *das aus dem Tangentialbündel* τ^{2n-2} *durch Quotientenbildung mit der Operation von* $\boldsymbol{Z}_q$ *auf der Faser* (*Multiplikation mit* $e^{2\pi i p/q}$) *entsteht*. Hier benutzen wir, daß das Zentrum der Strukturgruppe $\tilde{U}(n-1)$ von τ^{2n-2} $\boldsymbol{U}(1)$ ist.

Wir finden also: *Das «negative» Bündel über dem Raum* $G_q = G(2, n-1)$ *der q-fach durchlaufenen unparametrisierten Großkreise ist gegeben durch*:

$$\begin{gathered} \zeta^{n-1}, \quad \text{für } q = 1, \\ \zeta^{n-1} \oplus \tau^{2n-2}/\underset{1}{Z_q} \oplus \ldots \oplus \tau^{2n-2}/\underset{q-1}{Z_q}, \quad \text{für } q > 1. \end{gathered} \tag{**}$$

Die relative Kohomologie $H^*(\Pi^{q^2}(S^n), \Pi^{q^2-}(S^n))$ im kritischen Niveau q^2 ist also durch die Kohomologie des Thom Raumes T (**) des negativen Bündels (**) über $G_q = G(2, n-1)$ gegeben.

Für $q = 1$ findet man $H^*(T\zeta^{n-2}) = u^{n-1} \cup H^*(G(2, n-1))$, vgl. Morse [4], Bott [1].

Für $q > 1$ bestimmen wir zunächst die Kohomologie des Thom Raumes der einzelnen Summanden in (**):

$$H^*(T\tau^{2n-2}/\underset{p}{\boldsymbol{Z}_q}) = \begin{cases} u^{2n-2} \cup H^*(G(2, n-1)), & \textit{falls } p/q \textit{ in der gekürzten Form keine 2 im Nenner hat}, \\ \sum\limits_{2 \leqslant i \leqslant 2n-2} u^i \cup H^*(G(2, n-1)) & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Hier ist $\dim u^i = i$, u^i ist also eine i-dimensionale Thom Klasse.

Die Kohomologie des Thom Raumes T (**) ist gleich der Kohomologie des smash-Produktes der Thom Räume der Faktoren in (**). Man hat also alle möglichen Produkte aus q Thom Klassen, je eine aus einem der q Summanden von (**), zu bilden und mit $H^*(G(2, n-1))$ zu multiplizieren.

Es gilt nun wiederum: *Die Inklusion* $\Pi^c(S^n) \to \Pi(S^n)$ *induziert einen injektiven Homomorphismus in der Homologie*.

Folglich haben wir:

Die $\boldsymbol{Z}_2$*-Homologie von* $\Pi(S^n)$ mod $\Pi^0(S^n)$ *ist die direkte Summe, über alle* $q \geqslant 1$, *von* $H_*(\Pi^{q^2}(S^n), \Pi^{q^2-}(S^n))$, *wobei jeder dieser Sum-*

manden gegeben ist durch die Homologie des Thom Raumes des negativen Bündels (**) *über* $G_q = G(2, n-1)$, *die oben beschrieben wurde.*

Bemerkung: Damit ist ein altes Problem gelöst, das schon von Morse [4] und Bott [5] in Angriff genommen wurde, das aber wie Švarc 1956 hier in Moskau bemerkte, von diesen Autoren nicht korrekt beantwortet wurde.

7. Wir schließen mit der Bemerkung, daß sich mit genau derselben Methode die Homologie von

$$\Lambda P(\lambda) \text{ und } \Pi P(\lambda)$$

bestimmen läßt, wenn $P(\lambda)$ ein projektiver Raum ist über den reellen Zahlen ($\lambda = 1$), den komplexen Zahlen ($\lambda = 2$), den Quaternionen ($\lambda = 4$) oder den Cayleyschen Zahlen ($\lambda = 8$).

Man benutzt für diese symmetrischen Räume $P(\lambda)$ vom Range 1 wiederum die Tatsache, daß bei der kanonischen Metrik die nichttrivialen kritischen Punkte von $\Lambda(P(\lambda))$ aus den q-fach durchlaufenen Großkreisen bestehen, und daß diese eine nicht-entartete kritische Mannigfaltigkeit F_q bilden, $q = 1, 2\ldots$. Großkreise von $P(\lambda)$ sind die Großkreise auf den 1-dimensionalen projektiven Unterräumen, welche isometrisch zu den λ-dimensionalen Sphären S^λ sind.

Das negative Bündel über F läßt sich wiederum explizit bestimmen, und die Inklusionen $\Lambda^c(P(\lambda)) \to \Lambda(P(\lambda))$ und $\Pi^c(P(\lambda)) \to \Pi(P(\lambda))$ induzieren wiederum einen injektiven Homomorphismus in der Homologie.

Es wäre interessant zu untersuchen, ob diese Tatsachen sich auch auf allgemeinere symmetrische Räume übertragen. Die Dissertation von Eliasson [2], wo die geschlossenen Geodätischen auf der Grassmann Mannigfaltigkeit $G(2, n-1)$ untersucht werden, scheint darauf hinzudeuten, daß hier ein allgemeineres Prinzip herrscht.

LITERATUR

[1] Bott R., Nondegenerate critical manifolds, *Ann. of Math.* **60**, 248—260 (1954).

[2] Eliasson H., Über die Anzahl geschlossener Geodätischer in gewissen riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dissertation, Mainz, 1964. Erscheint in *Math. Ann.*

[3] Klingenberg W., The Theorem of the three closed geodesics, *Bull. Amer. Math. Soc.* **71**, 601—605 (1965).

[4] Morse M., The calculus of variations in the large, Providence, R. I., 1934.

[5] Palais R., Morse theory on Hilbert manifolds, *Topology* **2**, 299—340 (1963).

[6] Smale S., Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem, *Ann. of Math.* **80**, 382—396 (1964).

[7] Шварц А. С., Гомологии пространств замкнутых кривых, *Труды Московского Математического общества* **9**, 3—44 (1960).

J. J. Kohn

DIFFERENTIAL COMPLEXES

Let M be a differentiable manifold and E, F and G vector bundles over M. Let, $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ and $\mathscr{G}$ be the spaces of C^∞ sections of E, F and G respectively. We are given first order differential operators $A: \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ and $B: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ such that $BA = 0$.

Given $f \in \mathscr{F}$ we are interested in finding conditions under which there exists $u \in \mathscr{E}$ such that $Au = f$. The question of how u depends on f is also of importance. The case of the Cauchy-Riemann equations where A is the $\bar\partial$ operator on forms of type (p, q) and B is the $\bar\partial$ operator on forms of type $(p, q+1)$ is of special interest, it leads to the so called $\bar\partial$-Neumann problem; which in turn has applications in the theory of several complex variables.

Restricting our attention to compact manifolds (with or without boundary), we set

$$Q(u, v) = (A^*u, A^*v) + (Bu, Bv) + (u, v),$$

where $(\,,)$ denotes an appropriate L_2 inner product on $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ and $\mathscr{G}$ and where A^* is the L_2 adjoint of A. The following was proven by L. Nirenberg and the author.

Theorem. *If Q is compact (i.e., a set which is bounded relative to Q is pre-compact in L_2) and if the boundary of M is non-characteristic then the equation*

$$Au = f$$

with $f \in \mathscr{F}$ has a solution $u \in \mathscr{E}$ if and only if $Bf = 0$ and f is orthogonal to $\mathscr{N}$. Where $\mathscr{N} = \{\varphi \in \mathscr{F} \mid A^*\varphi = 0$ and $B\varphi = 0\}$.

Definition. *Q is coercive* if there exists a constant $c > 0$ such that

$$\| u \|_1^2 \leqslant cQ(u, u)$$

for all $u \in \mathscr{D}_{A^*} \cap \mathscr{F}$.

It is easily seen that on compact manifolds without boundary Q is coercive if and only if the symbol sequence

$$0 \longrightarrow E_x \xrightarrow{\sigma(A, \eta)} F_x \xrightarrow{\sigma(B, \eta)} G_x \longrightarrow 0$$

is exact for all $x \in M$ and all $\eta \in T_x^* - \{0\}$. Where E_x, F_x and G_x are the fibers of E, F and G over x and where T_x^* is the co-tangent space at x.

In case Q is coercive the above theorem follows from the theory of regular boundary value problems for elliptic systems of equations. However, in many important examples coerciveness fails. In the case of manifolds with boundary, Q need not be coercive even if the above sequence is exact. An example of this is provided by the $\bar{\partial}$ operator.

In the address, some conditions under which the hypotheses of the above theorem hold (without coerciveness) will be presented.

E. R. Kolchin

PROBLEMS IN DIFFERENTIAL ALGEBRA

The report will discuss a number of unsolved problems and will describe their present state. These problems are concerned with singular solutions of an algebraic differential equation, with differential specializations, with the size of an irreducible component of a system of algebraic differential equations, with the Galois group of a homogeneous linear ordinary differential equation, and with rational approximations to solutions of algebraic differential equations.

P. D. Lax

SCATTERING THEORY

The following is a rather general formulation of the scattering process: Let $U(t)$ be a one-parameter group of operators, not necessarily linear, such that for every f in the domain of this operator $U(t)f$ has a simple description for t large positive and t large negative; the scattering operator simply relates these two descriptions. We shall attempt to give such descriptions for solutions of the Korteweg — de Vries equation

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1}$$

This equation has for every given positive speed c solitary wave solutions, i.e. a solution of the form

$$u(x, t) = s(x - ct, c),$$

$s(x)$ tending to zero as x tends to $\pm\infty$. Following the very suggestive work of N. J. Zabusky and M. D. Kruskal [1] we conjecture that *every* solution of (1) which tends to zero properly as x tends to $\pm\infty$ can be represented for large t as a superposition of solitary waves:

$$u(x, t) \simeq \sum s(x - c_j t - \theta_j, c_j) \tag{2}$$

where the sequence $\{c_j\}$ of characteristic speeds tends to zero. Numerical calculations of Kruskal and Zabusky suggest that the characteristic speed c_j which appear in the asymptotic description of $u(x, t)$ for large positive t are the same ones which appear in the asymptotic description of u for large negative t. The phase shifts θ_i are different, and they would be related to each other by the scattering operator. These conjectures are supported so far by numerical calculations and by perturbation calculations but no rigorous proof.

The second part of my talk is a summary of joint work with Ralph Phillips on linear scattering. A summary report of this work has been given in [2] with applications to the wave equation in exterior domains. A further application is the Schrödinger equation presented by Ralph Phillips in his talk at this Congress. A monograph on this subject will be published by Springer, hopefully by the end of this year.

REFERENCES

[1] Kruskal M. D., Zabusky N. J., *Phys. Rev. Letters*, **15**, 6 (1965).
[2] Lax P. D., Phillips R. S., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**, 1, 130—142 (1964).

O. Lehto

QUASICONFORMAL MAPPINGS IN THE PLANE

During the past decade decisive progress has been made in the general theory of quasiconformal mappings in the plane. For many years the study of the relations between the various possible definitions for quasiconformality was one of the principal objects of research. Today, this part of the theory seems to be a fairly closed chapter. Therefore, the beginning of this survey, which deals with the definitions, is more of an historical nature. In the second part, attention is called to the important work of Ahlfors on quasiconformal reflection and to some new problems which have arisen in this connection. The concluding section contains some remarks on the parametric representation of quasiconformal mappings.

1. DEFINITIONS

The first quasiconformal mappings introduced by Grötzsch and Lavrentieff can be regarded as immediate generalizations of conformal mappings. In 1938 Morrey, on studying partial differential equations of elliptic type, defined a more general class of mappings. These were characterized as weak homeomorphic solutions of a Beltrami differential equation

$$w_{\bar{z}} = k w_z, \tag{1}$$

where k is measurable and $\sup |k| < 1$.

Grötzsch mappings are continuously differentiable solutions of (1) with non-zero Jacobian, and so for Grötzsch mappings k in (1) is continuous. However, not every continuous k yields a Grötzsch mapping. It is a classical result that uniform Hölder-continuity of k is a sufficient condition, and it is also well known that Hölder-continuity can be replaced by weaker integral conditions. But it seems to be difficult to characterize Grötzsch mappings in terms of k.

In contrast to this, Lavrentieff mappings are weak homeomorphic solutions of exactly those equations (1) in which k is continuous (Bojarski). It is a beautiful result that, apart from constants, Morrey mappings constitute the closure of Grötzsch and Lavrentieff mappings under uniform convergence on compact sets.

In the early fifties, Ahlfors and Pfluger defined quasiconformality with the help of the conformal modulus $M(Q)$ of a quadrilateral Q: A sense preserving homeomorphism f: $D \to D'$ is quasiconformal in D, if $M(f(Q))/M(Q)$ is bounded for all quadrilaterals $Q \subset D$. If the bound does not exceed K, f is called K-quasiconformal. It was one of the fundamental discoveries in the theory, about ten years ago, that this class of quasiconformal mappings coincides with the class of Morrey mappings.

Today many other definitions for quasiconformality are known. One way to obtain definitions is as follows: Take a conformal invariant (modulus of a quadrilateral, modulus of a ring domain, extremal length of a curve family, harmonic measure, hyperbolic measure, angle, etc.), consider its change under a K-quasiconformal mapping, and study whether a homeomorphism with this property is K-quasiconformal. For detailed results in this direction, we refer to a recent survey by Gehring.

2. QUASICONFORMAL CONTINUATION

Let f be a quasiconformal mapping of a domain D, and let $F \subset D$ be a compact set. Then there always exists a quasiconformal mapping g of the plane such that $g \mid F = f$. The extension g can be so constructed that in every component of the complement of the closure of D, g is a linear transformation.

In contrast to the above, it is not always possible to find a quasiconformal mapping g of the plane such that $g \mid D = f$. If D and $f(D)$ are bounded by a finite number of Jordan curves, such an extension is possible, if every boundary component of D and $f(D)$ is a so-called quasiconformal curve (quasiconformal circle), i.e. the image of a circle under a quasiconformal mapping of the plane. Ahlfors has given a very simple characterization of quasiconformal curves in geometric terms: If $C \ni \infty$ and z_1, z_2, z_3 are any three successive finite points of C, then C is quasiconformal if and only if there exists a finite number M such that

$$\left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right| < M. \tag{2}$$

Let now C be a Jordan arc. We call C quasiconformal if it is the image of an interval under a quasiconformal mapping of the plane. The problem of characterizing quasiconformal arcs has recently been solved by Rickman. Suppose in the following that C is bounded. If C is a closed arc, the validity of the Ahlfors condition (2) is necessary and sufficient for C to be quasiconformal. If C is open and condition (2) is fulfilled, then C has two endpoints and the closure $\bar{C}$ satisfies the same condition (2) as C. Hence, again C is quasiconformal. In this case the converse is not true: there exist bounded open quasiconformal arcs which do not satisfy any global condition (2). For open arcs a geometric characterization is obtained in local terms: an open arc C is quasiconformal if and only if the condition (2) is locally valid with a uniformly bounded M.

There are still open problems concerning quasiconformal continuation, e.g., how the maximal dilatation of an extended mapping depends on the properties of the boundary of the original domain.

3. CONTINUOUS DEFORMATION

Let D be the unit disc and S_K the family of all K-quasiconformal homeomorphisms f: $D \to D$, such that $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Every $f \in S_K$ can be extended as a K-quasiconformal mapping to the whole plane by reflection. S_K is a metric space if the distance $\rho(f, g)$ of the mappings $f, g \in S_K$ is defined by $\rho(f, g) = \max |f(z) - g(z)|$, $z \in \bar{D}$.

Let us consider a mapping $f \in S_K$ and denote its complex dilatation by k. Let k_t be a measurable function in D such that $|k_t(z)| \leqslant (K-1)/(K+1)$ and such that $k_t(z)$ is continuous with respect to the real parameter t on the interval $I = \{t \mid 0 \leqslant t \leqslant T\}$, uniformly for $z \in D$. Furthermore, we require that $k_0(z) = 0$, $k_T(z) = k(z)$. Let f_t be the (uniquely determined) mapping in S_K whose complex dilatation equals $k_t(z)$ for almost all $z \in D$. If $t, t' \in I$, we have for the complex dilatation $\tilde{k}$ of the mapping $f_{t'} \circ f_t^{-1}$,

$$|\tilde{k}(z)| = \left| \frac{k_t(z) - k_{t'}(z)}{1 - \overline{k_t(z)}\, k_{t'}(z)} \right| \tag{3}$$

a.e. This implies, by Teichmüller's distortion theorem, that $\rho(f_t, f_{t'}) \to 0$ as $t' \to t$. In other words, $\{f_t\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, is a continuous transformation in S_K of the identily mapping to the mapping f. (For deeper results in this direction, see Ahlfors and Bers.)

There are, of course, many possibilities to construct the homotopy f_t, $0 \leqslant t \leqslant T$. For instance, we can choose k_t such that the point $k_t(z)$ moves with constant velocity along the radius from the point 0 to the point $k(z)$, as t moves from 0 to T with constant velocity. In the k-plane length can be measured either with respect to the euclidean metric or the non-euclidean metric of the unit disc. In the latter case, it follows from (2) that $\tilde{k}(z)$ depends on the difference $t' - t$ but not on the value of t. In particular, if we take $t = T/2$, the absolute values of the complex dilatations of the mappings $f_{T/2}$ and $f \circ f_{T/2}^{-1}$ are the same. This implies the (well-known) result, that f

admits a representation

$$f = f_2 \circ f_1, \tag{4}$$

where $f_1, f_2 \in S_{\sqrt{K}}$.

Bojarski has proved that for every $f \in S_K$ and for every measurable set $A \subset D$, $m(f(A)) = O(m(A)^{\delta})$, where m denotes the two-dimensional Lebesgue-measure and $\delta > 0$. Application of the above deformation technique yields information about δ. At first the simple formula (4) alone was applied, while recently, Gehring and Reich have made a more profound use of the parametric representation in this connection.

L. Michel

THÉORIE DES GROUPES ET PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

On rappelle la nature des applications de la théorie des groupes aux spectres atomiques et à la physique nucléaire (notion d'isospin). Une particule est décrite par une représentation continue, unitaire, irréductible de la composante connexe du groupe de Lorentz inhomogène (les autres composantes sont exclues par l'expérience). L'étude détaillée des produits tensoriels de ces représentations permet l'analyse phénoménologique des expériences sur les particules élémentaires. Celles ci sont de plus classées par des représentations de $\boldsymbol{SU_3}$ (remarquable confirmation expérimentale de prédictions). L'hypothèse récente: les champs quantiques de particules engendrent des algèbres de Lie, semble féconde.

A. Néron

DEGRÉ D'INTERSECTION EN GÉOMÉTRIE DIOPHANTIENNE

1. INTRODUCTION

Soit K un corps. On notera *additivement* les valeurs absolues v de K. Autrement dit, si, pour $x \in K$ on représente par $|x|_v$ la valeur de v en x, avec la notation multiplicative habituelle, on posera $v(x) = \log x_v$.

On appellera *corps global* un corps K muni d'un système propre M de valeurs absolues de K au sens de [1] vérifiant la «formule du produit», i.e. tel qu'on ait $\Sigma_{v \in M} v(x) = 0$ quel que soit $x \in K$.

On a, en particulier, les deux exemples fondamentaux suivants de corps globaux:

(a) *Corps de nombres algébriques*: K est alors une extension algébrique de degré fini du corps $\boldsymbol{Q}$ des rationnels, et M est l'ensemble des valeurs absolues de K, normées de façon que

$$\begin{cases} v(x) = \log|x| \text{ pour } x \text{ réel, si } v \text{ est archimédienne} \\ v(p) = -\log p \text{ si } v \text{ prolonge la valeur absolue } p\text{-adique} \end{cases}$$

(b) *Corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps k* (on supposera pour simplifier que k est algébriquement clos): K peut alors être regardé comme le corps des fonctions sur une courbe complète sans point multiple W définie sur k. On sait que toutes les valuations de K, triviales sur k, sont discrètes. On peut alors prendre pour M l'ensemble des opposées de ces valuations (chacune d'elles étant normée de façon que l'ensemble de ses valeurs soit $\boldsymbol{Z}$).

Rappelons la définition habituelle de la notion de *hauteur* d'un point. Soit $x = (x_0, \ldots, x_n)$ un point de l'espace projectif P_n. Supposons d'abord x rationnel sur K (et prenons $x_i \in K$ pour tout i). On appelle hauteur de x le nombre réel

$$h(x) = \sum_{v \in M} \sup_i v(x_i).$$

Ce nombre ne dépend que de x, en vertu de la formule du produit. Plus généralement, supposons x algébrique sur K, i.e. $x_i \in K'$ pour tout i, où K' est une extension algébrique de degré fini d de K. On appelle alors *hauteur* de x le nombre réel

$$h(x) = \frac{1}{d} \sum_{w \in M'} n_w \sup_i w(x_i),$$

où w parcourt l'ensemble M' des valeurs absolues de K' prolongeant les valeurs absolues $v \in M$, et où l'on note n_w le degré local de l'extension K'/K relativement à w. Dans le cas de corps de nombres, on montre qu'il n'existe qu'un nombre fini des points qui sont de degré borné et de hauteur bornée dans P_n.

Si V est une variété algébrique définie sur K; et si $\varphi\colon V \to P_n$ est un morphisme défini sur K, à valeurs dans P_n, on pose $h_\varphi = h \circ \varphi$.

On dit d'autre part que deux fonctions f et g sur un ensemble E, à valeurs réelles, sont *équivalentes*, ce qu'on écrit $f \approx g$, si la différence $|f(x) - g(x)|$ est bornée.

L'une des propriétés essentielles des hauteurs est la suivante: h_φ ne dépend, modulo la relation $\approx$, que de la classe, pour l'équivalence linéaire, du système linéaire L sur V associé à φ. Pour cette raison, le symbole h_φ est également noté h_L, ou encore h_X, si X est un élément de L; on prolonge par linéarité la définition du symbole h_X au cas où X est un diviseur quelconque sur V, rationnel sur K.

La notion de hauteur joue, comme on sait, un rôle essentiel dans diverses questions de géométrie diophantienne, par exemple dans la méthode de descente infinie, intervenant dans la démonstration du théorème de Mordell — Weil et de ses variantes.

Cependant, on ne peut manquer d'observer le caractère artificiel de la définition de la hauteur h, et le fait que le symbole h_X est une notion «grossière», en ce sens qu'elle n'intervient que par sa classe modulo la relation $\approx$. Dans le but de mettre au point une théorie plus précise des hauteurs, il était naturel de commencer par approfondir les propriétés du symbole h_X dans le cas le plus simple, à savoir le cas (b), celui des corps de fonctions. En effet, pour $a \in V_K$, $h_X(a)$ est alors un nombre entier, qu'on peut interpréter par la théorie des intersections, au sens le plus classique en géométrie algébrique. Dans certains cas où $V = A$ est une variété abélienne, on peut faire le calcul explicite de ce symbole pour tous les $a \in A$ rationnels sur K. Il en est ainsi, par exemple, lorsque A est la courbe générique d'un pinceau de courbes elliptiques convenable; certains résultats dans ce sens, implicitement contenus dans [5] et [6], ont été développés de façon détaillée, et complétés par d'autres analogues, dans un article récent de Manin [4]. On observe dans chaque cas que $h_X(a)$ est une fonction *quadratique* de a, à l'addition éventuelle près de termes linéaires, et de termes «périodiques».

On sait maintenant développer une théorie englobant ces derniers résultats, valable pour un corps global quelconque, et possédant, en un certain sens, le même degré de précision dans le cas des corps de nombres que dans celui des corps de fonctions.

On a, en premier lieu, le théorème fondamental suivant

Théorème 1 (*caractère quadratique de la hauteur*). *Soit A une variete abélienne définie sur un corps global K, et soit X un diviseur sur A, rationnel sur K. Notons $A_{\overline{K}}$ le groupe des points de A rationnels sur la clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Il existe une forme quadratique q_X et une forme linéaire f_X sur $A_{\overline{K}}$, uniquement déterminées, à valeurs réelles, telles qu'on ait*

$$h_X \approx q_X + l_X.$$

(on appelle «forme quadratique» une fonction de la forme $f(x, x)$, où f est bilinéaire)

La première démonstration de ce théorème, et de loin la plus simple, est due à Tate; pour cette démonstration, nous renvoyons à [2], [3], [4]. Une autre démonstration est donnée ci-dessous, au n° 4. A titre d'application de ce théorème, on retrouve les résultats que j'avais énoncés ou conjecturés dans [7], concernant une valeur approchée du nombre des points rationnels sur A dont la hauteur admet une borne donnée (cf. [9], 11, n° 16, th. 6).

Compte tenu des propriétés des hauteurs, on déduit du théorème précédent que la fonction $g_X = q_X + l_X$ ne dépend que de la classe de X pour l'équivalence linéaire, et qu'elle est *birationnellement invariante* sur K. Autrement dit, g_X possède un caractère *intrinsèque*, et constitue en fait la «bonne» notion de hauteur, appelée sans aucun doute à supplanter l'ancienne notion h_X.

Mais il est possible également de généraliser l'interprétation signalée plus haut de la hauteur comme degré d'intersection. J'ai montré dans [9] que $g_X(a)$ peut, dans tous les cas, être exprimé sous forme d'une somme de termes locaux, i.e. respectivement associés aux différentes valeurs absolues $v \in M$. Désignant par A une variété abélienne définie sur K, par X un diviseur sur A, par **a** un cycle de dimension et de degré nuls sur A, tous deux rationnels sur K, l'outil utilisé est un certain symbole local $(X, \mathbf{a})_v$, appelé *degré d'intersection de X et* $\mathbf{a}$ *relatif à* v; il s'agit d'un certain nombre réel attaché au couple $(X, \mathbf{a})_v$ et à la valeur absolue v, et birationnellement invariant sur K. La suite de cet exposé est essentiellement consacrée à l'énoncé de la définition de ce symbole, et à une étude de ses propriétés résumant les principaux résultats de [9]. D'une part, on peut définir ce symbole de façon axiomatique, et prouver son existence par une méthode de passage à la limite, valable pour un corps global quelconque, puis prolonger sa définition au cas d'une variété complète sans point multiple arbitraire. D'autre part, on peut interpréter ce symbole (et, en même temps, redémontrer son existence) grâce à l'introduction des *modèles minimaux* des variétés abéliennes au sens de [8] (dans le cas d'une valuation discrète) ou à celle des *fonctions thêta* (dans le cas d'une valeur absolue à l'infini, i.e. archimédienne).

L'introduction du symbole $(X, \mathbf{a})_v$ semble constituer un premier pas vers une sorte de théorie globale des intersections valables pour des schémas sur $\boldsymbol{Z}$ (bien qu'à vrai dire la structure de schéma ne soit pas seule en cause, en raison du rôle essentiel joué par les valeurs absolues à l'infini). Parmi les problèmes à résoudre, signalons en tout cas celui de l'extension de la définition du symbole pour les cycles de dimension intermédiaire.

2. SYMBOLE $(X, \mathbf{a})_v$ (CAS D'UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE)

Dans ce n°, on considère un corps K, algébriquement clos, et muni d'une valeur absolue v.

Si V est une variété définie sur K, on désigne par V_K l'ensemble des points de V rationnels sur K, par $D\,(V)_K$ le groupe des diviseurs sur V rationnels sur K, par $D_a\,(V)_K$ (resp. $D_1\,(V)_K$) le sous-groupe de $D\,(V)_K$ composé de ceux de ses éléments qui sont algébriquement resp. linéairement) équivalents à zéro. L'équivalence linéaire pour les diviseurs est représentée par le signe $\sim$. Si X est un diviseur sur V, l'ouvert complémentaire du support de X est noté $U\,(X)$. Le groupe des cycles sur V qui sont de dimension 0 et rationnels sur K est noté $Z\,(V)_K$. L'élément $\mathbf{a}$ de ce groupe ayant pour composants les points $a_i \in V_K$, respectivement affectés des coefficients $m_i \in \boldsymbol{Z}$, est noté $\mathbf{a} = \sum_i m_i(a_i)$. La somme $m = \sum_i m_i$ est appelée le *degré* de $\mathbf{a}$. Le sous-groupe de $Z\,(V)_K$ composé de ceux de ses éléments qui sont de degré 0 est noté $Z_0\,(V)_K$. On dira que deux cycles sont *étrangers* si leurs supports sont sans point communs.

Soient $X \in D_l\,(V)_K$, et $\mathbf{a} \in Z_0\,(V)_K$. Si V est complète, il existe, d'après [12], IX, 4, th. 8, coroll. 2, une fonction f sur V, définie sur K, telle que $\operatorname{div}(f) = X$. Si $\mathbf{a} = \sum_i m_i\,(a_i)$, l'élément $f\,(\mathbf{a}) = \prod_i f\,(a_i)^{m_i}$ de K ne dépend que de X et de $\mathbf{a}$, mais non de f. On le désigne par $X\,(\mathbf{a})$.

Si A est une variété abélienne, et si X est un cycle sur A, le cycle déduit de X par la translation définie par $u \in A$ est noté X_u. Le transformé de X par la symétrie $x \mapsto -x$ est noté X^-.

Théorème 2. *Soit A une variété abélienne définie sur K. A tout couple $(X, \mathbf{a})$ composé d'un diviseur $X \in D(A)_K$ et d'un cycle $\mathbf{a} \in Z_0(A)_K$, mutuellement étrangers, on peut, d'une et d'une seule façon, faire correspondre un nombre réel $(X, \mathbf{a})_v$, de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites*:

(i) $(X, \mathbf{a})_v$ *dépend bilinéairement de X et de* $\mathbf{a}$.

(ii) *Pour* $X \sim 0$, *on a* $(X, \mathbf{a})_v = -v(X(\mathbf{a}))$.

(iii) $(X, \mathbf{a})_v$ *est invariant par toute translation sur A rationnelle sur K.*

(iv) *Pour $a \in U(X)$, fixé, l'application $\lambda : U(X)_K \to \mathbf{R}$* obtenue en posant $\lambda(a) = (X, (a) - (a_0))_v$ est localement bornée, i.e. est bornée sur tout sous-ensemble borné (pour la métrique définie par v) de l'ensemble $U(X)_K$.

(En abrégé: on pose $(X, \mathbf{a})_v = -v(X(\mathbf{a}))$[1]) lorsque $X \sim 0$, et on affirme qu'il existe une et une seule manière «raisonnable» de prolonger cette définition pour $X \in D(A)_K$ quelconque):

Pour la démonstration de l'existence de $(X, \mathbf{a})_v$, nous renvoyons à [9] ou, pour un bref résumé, à [3][2]). La méthode employée consiste à définir le symbole comme limite d'une certaine suite réelle; elle comporte l'introduction de la notion de *quasi-fonction*, constituant une version modifiée de la notion de *distribution* au sens de Weil.

Nous nous bornons ici à reproduire la démonstration de l'unicité de $(X, \mathbf{a})_v$. Supposons qu'il existe deux symboles $(X, \mathbf{a})_K$ et $(X, \mathbf{a})'_v$ vérifiant les conditions du théorème, et posons $\xi(X, \mathbf{a}) = (X, \mathbf{a})'_v - (X, \mathbf{a})_v$. On voit immédiatement que ξ est bilinéaire en X et $\mathbf{a}$, et s'annule pour $X \sim 0$. Donc, si $X' \sim X$, le nombre $\xi(X', \mathbf{a})$ ne dépend pas du choix de X', et ceci permet de définir $\xi(X, \mathbf{a})$ même si X et $\mathbf{a}$ ne sont pas étrangers, en faisant «bouger» X. On peut recouvrir V par un nombre fini d'ouverts de la forme $U(X'_i)$, avec $X'_i \sim X$ pour tout i. Compte tenu de la condition (iv), on en déduit que $\xi(X, (a) - (a_0))$ est une fonction bornée de a. Montrons que ξ s'annule lorsque $X \in D_a(A)_K$ et $\mathbf{a} \in V_0(A)_K$. En effet, supposons d'abord que A appartient au noyau d'Albanese de A, i.e. qu'on a $\sum_i m_i a_i = 0$. Comme K est algébriquement clos, les a_i sont rationnels sur K; on se

---

[1]) J'ai commis une faute de signe dans [9]: dans, les prop. 3 et 5 du n° 6 du chap. III, il faut remplacer deg $(\overline{X}.\overline{\mathbf{a}})$ par $-$deg $(\overline{X}.\overline{\mathbf{a}})$. Pour que la terminologie soit compatible avec celle de la théorie usuelle des intersections, il faut donc modifier la définition, et poser $(X, \mathbf{a})_v = -v(X(\mathbf{a}))$ comme ci-dessus, au lieu de $(X, \mathbf{a})_v = v(X(\mathbf{a}))$.

[2]) Dans [3], il n'était question que du cas où X est algébriquement équivalent à zéro; mais il est facile de passer de là au cas général.

ramène, par linéarité, au cas où **a** est de la forme $\mathbf{a} = (a + b) - (a) - (b) + (0)$ avec a et $b \in A_K$. Compte tenu de (iii), on a alors $\xi(X, \mathbf{a}) = \xi(X_{-b} - X, (a) - (0))$; comme $X_{-b} - X \sim 0$, on a donc bien $\xi(X, \mathbf{a}) = 0$, en vertu de (ii). Soit toujours $X \in D_a(A)_K$, et prenons $\mathbf{a} \in \boldsymbol{Z}_0(A)_K$ quelconque. Pour tout entier m, notons $m\delta$ l'homomorphisme de multiplication par m sur A. Le cycle $(m\delta)(\mathbf{a}) - m\mathbf{a}$ appartient au noyau d'Albanese, et on a donc $\xi(X, (m\delta)(\mathbf{a})) = m\xi(X, \mathbf{a})$. Pour **a** fixé, le premier membre est borné quel que soit m, d'après ce qui précède. On a donc encore nécessairement $\xi(X, \mathbf{a}) = 0$.

Pour traiter enfin le cas où $X \in D(A)_K$ est quelconque, on distingue à nouveau le cas où **a** appartient au noyau d'Albanese, qu'on ramène à celui, plus particulier, où **a** est de la forme $(a + b) - (a)(b) + (0)$. On utilise cette fois la relation $X_{-b} - X \in D_a(A)_K$; pour passer de là au cas général, on introduit encore l'entier m, et on répète le raisonnement fait plus haut.

3. SYMBOLE $(X, \mathbf{a})_v$ (CAS D'UNE VARIÈTÉ COMPLÈTE SANS POINT MULTIPLE QUELCONQUE)

On considère toujours un corps K, qu'on ne suppose plus ici nécessairement algébriquement clos, et une valeur absolue propre v de K.

Soit V une variété complète sans point multiple, définie sur K. Introduisons un morphisme canonique $\alpha: V \to A$ (défini sur la clôture algébrique $\overline{K}$ de K) de V dans sa *variété d'Albanese* A. Il est nécessaire ici de considérer, au lieu du groupe $D(V)_K$ de tous les diviseurs sur V, rationnels sur K, le sous-groupe de ce dernier, qu'on note $\widetilde{D}(V)_K$, composé des diviseurs dont un multiple entier est linéairement équivalent à un diviseur de la forme $\alpha^{-1}(Y)$, avec $Y \in D(A)_K$. On voit facilement qu'on a toujours $D_a(V)_K \subset \widetilde{D}(V)_K$. Lorsque V est une variété abélienne, ou lorsque V est une courbe de genre au moins égal à 1, on a $\widetilde{D}(V)_K = D(V)_K$, mais ceci n'a pas lieu dans tous les cas: c'est faux, en particulier, pour les courbes de genre 0, car alors $\widetilde{D}(V)_K$ est le groupe des diviseurs de degré nul, qui est distinct de $D(V)_K$.

Théorème 3. *A toute variété V complète sans point multiple, définie sur K, et à tout couple $(X, \mathbf{a})$ composé d'un diviseur $X \in \widetilde{D}(V)_K$ et d'un cycle $\mathbf{a} \in Z_0(V)_K$, mutuellement étrangers, on peut, d'une et d'une seule façon, faire correspondre un nombre réel $(X, \mathbf{a})_v$, de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites*:

(i) *$(X, \mathbf{a})_v$ est bilinéaire en X et **a**.*

(ii) *Pour $X \sim 0$, on a $(X, \mathbf{a})_v = -v(X(\mathbf{a}))$.*

(iii) *Pour tout K-morphisme φ: $V' \to V$, et pour $X \in D(V)_K$, $\mathbf{a}' \in \boldsymbol{Z}_0(V')_K$, on a*

$$(\varphi^{-1}(X),\ \mathbf{a}')_v' = (X, \varphi(\mathbf{a}'))_v,$$

toutes les fois que les deux membres ont un sens.

(iv) *Pour* $a_0 \in U(X)_K$ *fixe, l'application* λ: $U(X)_K \to \boldsymbol{R}$ *obtenue en posant* $\lambda(a) = (X, (a) - (a_0))_v$ *est localement bornée, au sens introduit dans le th.* 2.

Ce théorème se ramène au précédent, par passage à la variété d'Albanese de V. On peut compléter son énoncé par les précisions suivantes:

(a) Le symbole $(X, \mathbf{a})_v$ ainsi défini généralise celui du th. 2.

(b) Il est birationnellement invariant sur K (d'après (iii)).

(c) Il ne dépend pas du corps K, i.e. il est invariant lorsqu'on remplace K par un sous-corps et v par la valeur absolue induite sur ce sous-corps.

(d) Si K est un corps global, on a $(X, \mathbf{a})_v = 0$ pour presque toute $v \in M$ (cf. les notations du n° 1), i.e. pour toute v n'appartenant pas à un certain sous-ensemble fini de M.

4. SYMBOLE GLOBAL $(X, \mathbf{a})$. LIEN AVEC LA NOTION DE HAUTEUR

Supposons à nouveau que K est un corps global, et reprenons les notations du n° 1. Pour $X \in \widetilde{D}(V)_K$, et $\mathbf{a} \in Z_0(V)_K$, mutuellement étrangers, considérons la somme

$$(X, \mathbf{a}) = \sum_{v \in M} (X, \mathbf{a})_v.$$

Cette somme est définie, d'après la remarque (d) ci-dessus. En outre, le symbole $(X, \mathbf{a})$ dépend bilinéairement de X et $\mathbf{a}$, et s'annule lorsque $X \sim 0$. Ceci permet, en faisant «bouger» X, de prolonger la définition de $(X, \mathbf{a})$ au cas où X et $\mathbf{a}$ sont quelconques, non nécessairement étrangers.

Nous pouvons maintenant, en utilisant ce qui précède, retrouver le th. 1, et montrer que la fonction g_X intervenant dans ce dernier n'est autre que

$$g_X(a) = (X, (a) - (0)). \tag{1}$$

En effet, désignons le second membre par $g'(a) = g'_X(a)$. Nous allons d'abord montrer que g' est la somme d'une fonction quadratique et d'une fonction linéaire. Pour cela, remarquons que l'expression

$$\langle a, b\rangle_X = (X, (a+b) - (a) - (b) + (0))$$

est bilinéaire symétrique en a et b, donc que

$$g'(a) + g'(-a) = -\frac{1}{2}\langle a, -a\rangle_X$$

est quadratique en a. D'autre part, on a, d'après (iii),

$$g'(-a) = (X, (-a) - (0)) = (X^-, (a) - (0)).$$

On a donc

$$g'(a) = -\frac{1}{2}\langle a, -a\rangle_X + (X - X^-, (a) - (0)).$$

Or on sait que $X - X^-$ et algébriquement équivalent à zero, donc linéairement équivalent à un diviseur de la forme $X_c - X$, avec $c \in A_{\overline{K}}$ et on en déduit que le second terme de cette expression est linéaire en a. Notre assertion est donc démontrée.

Il reste à prouver qu'on a $h_X \approx g'_X$. On peut supposer que A est plongée dans l'espace projectif P_n, et que X est une section hyperplane de A. Pour $a \in A_K$, de coordonnées homogènes $a_0, \ldots, a_n$, on a $h(a) = \Sigma_v \sup_i v(a_i/a_{i0})$, l'indice i_0 étant choisi tel que $a_{i_0} \neq 0$. Quitte a effectuer un changement de coordonnées linéaire, on peut supposer que l'origine sur A est le point de coordonnées $1, \ldots, 1$. Pour tout i, notons X_i la section hyperplane de A obtenue en annulant la coordonnée d'indice i. On a, pour tout i,

$$v(a_i/a_{i_0}) = (X_i - X_{i_0},\ (a) - (0))_v,$$

d'où

$$h_X(a) = \sum_{v \in M} \sup_i (X_i,\ (a) - (0))_v + g'_X(a).$$

Les ouverts $U(X_i)$ étant sans point commun, on déduit de la condition (iv) du th. 2 que le premier terme du second membre est borné. On a donc bien démontré le th. 1, ainsi que la formule (1).

5. INTERPRÉTATION DE $(X, \mathbf{a})_v$ (CAS D'UNE VALUATION DISCRÈTE)

Dans ce n°, nous considérons un corps K muni d'une valeur absolue de la forme $v = -\omega$, où ω est une valuation discrète de K, normée de façon que l'ensemble de ses valeurs soit $\boldsymbol{Z}$. Nous désignons par R l'anneau de valuation correspondant, par p son idéal maximal, et par K^0 le corps résiduel. Si V est une p-variété définie sur K, au sens de Shimura [10] (par exemple une variété projective définie sur K), on peut parler du cycle réduit $V^0 = \rho(V)$ de V (mod p). Considérons un point $a \in V_K$, tel que le point réduit $a^0 = \rho(a)$ soit simple sur V^0, et soit f une fonction sur V, définie sur K. On dit que X *est représenté par f en a^0* si a^0 n'appartient pas à l'ensemble réduit du support du diviseur $X - \operatorname{div}(f)$, et s'il n'appartient pas non plus au support du p-diviseur de f (au sens de [8], 1, n° 12) i.e. si f est génériquement inversible sur la composante de V^0 qui contient a^0. Si f représente X en a, le nombre entier $-V(f(a)) = \omega(f(a))$ ne dépend que de X et de a, mais non de f. On l'appelle *v-multiplicité d'intersection de X et a*, et on le note $i(X, a)$ ou $i_v(X, a)$. On note d'autre part $Z'(V)_K$ (resp. $Z'_0(V)_K$) le sous-groupe de $Z(V)_K$ (resp. de $Z_0(V)_K$) formé des cycles dont tous les composants sont rationnels sur K. Pour tout cycle $\mathbf{a} \in Z'(V)_K$, on définit $i(X, \mathbf{a}) = i_v(X, \mathbf{a})$ en prolongeant par linéarité définition précédente.

R e m a r q u e 1. Examinons le cas particulier où K est un corps de fonctions d'une variable sur un corps k, et prenons pour modèle de l'extension K/k une courbe W complète sans point multiple définie sur k (cf. n° 1). On a $K = k(x)$, où x est un point générique de W sur k, et la valeur absolue v correspond à un point x^0 de W, rationnel sur k. La variété V peut être regardée comme l'élément générique d'une famille paramétrée par W. Si $\overline{V}$ est le graphe de cette famille, on a une projection canonique π: $\overline{V} \to W$. La variété V s'identifie à la «fibre générique» $\pi^{-1}(x)$, tandis que V^0 s'identifie à la «fibre spéciale» $\pi^{-1}(x^0)$. A toute sous-variété V' de V définie sur K (resp. à tout cycle X sur V rationnel sur K), de dimension r, il correspond une sous-variété $\overline{V}'$ de $\overline{V}$, définie sur k (resp. un cycle $\overline{X}$ sur $\overline{V}$, rationnel sur k, et n'admettant pas de composantes «verticales»), de dimension $r+1$, telle qu'on ait $V' = \overline{V}' \cdot V$ (resp. $X = \overline{X} \cdot V$). On voit, dans ces conditions, que $i_v(X, \mathbf{a})$ *est le degré de la contribution des points de la fibre spéciale* V^0 *dans le cycle produit d'intersection* $X \cdot \mathbf{a}$, ce dernier étant entendu au sens classique des «Foundations» de Weil.

Soit maintenant A une variété abélienne définie sur K, faiblement p-simpla p-minimale au sens de [8], i.e. telle que les conditions suivantes soient satisfaites:

(a) A est faiblement p-simple, i.e. tout point rationnel p-adique de A (donc, en particulier, tout point $\in A_K$) se réduit en un point simple de A^0.

(b) A vérifie la propriété d'application universelle suivante: Si V est une p-variété définie sur K, toute application rationnelle φ: $V \to A$, définie sur K est p-morphique en tout point simple de $V^0 = \rho(V)$.

Rappelons que toute variété abélienne définie sur K admet un K-modèle de ce type ([8], II, th. 2). Rappelons aussi que l'ensemble G^0 des points simples de $A^0 = \rho(A)$ est alors canoniquement muni d'une structure de groupe algébrique sur le corps résiduel K^0. Dans ces conditions, quels que soient $X \in D(A)_K$ et $\mathbf{a} \in Z'_0(A)_K$, le symbole $i_v(X, \mathbf{a})$ est toujours défini.

Lorsque le groupe G^0 est connexe (i.e. ne possède qu'une composante) on a la formule

$$(X, \mathbf{a})_v = i_v(X, \mathbf{a}). \tag{2}$$

En effet, dans le cas particulier où $X \sim 0$, cela résulte trivialement des définitions; on passe facilement de là au cas général en montrant que le second membre $i_v(x, \mathbf{a})$ vérifie toutes les conditions du th. 2.

Dans le cas où G^0 n'est pas connexe, la formule (2) n'est plus vraie en général, mais si on pose

$$(X, \mathbf{a})_v = i_v(X, \mathbf{a}) + j_v(X, \mathbf{a}), \tag{3}$$

il est possible d'interpréter d'une manière simple le terme complémentaire $j(X, \mathbf{a}) = j_v(X, \mathbf{a})$. Pour cela, posons $\mathrm{a} = \sum_i m_i(a_i)$ $(a_i \in A_K)$ Dans le cas où $X \sim 0$, X est le diviseur d'une fonction f définie sur K, et on trouve $j(X, \mathbf{a}) = \sum_i m_i \nu_i$, en désignant par ν_i le coefficient, dans le p-diviseur de f, de la composante G_i^0 de G^0 contenant a_i^0 (dans le cas particulier des corps de fonctions (cf. remarque 1 ci-dessus), $j(X, \mathbf{a})$ peut encore être interprété comme le degré du produit d'intersection

$Y^0 \cdot \mathbf{a}$, en désignant par Y^0 la contribution de la fibre spéciale dans le diviseur de la fonction $\overline{f}$ obtenue en étendant f à $\overline{V}$). On voit ensuite que cette interprétation peut être prolongée de façon naturelle au cas où X est un élément quelconque de $D\ (A)_K$. On observe en même temps que $j\ (X, \mathbf{a})$ est un nombre *rationnel*, et que c'est une fonction «périodique» de chacun des composants de $\mathbf{a}$ (i.e. ne dépendant que de la classe de chacun d'eux modulo un sous-groupe d'indice fini du groupe de Mordell — Weil).

Dans le cas d'un corps de fonctions algébriques d'une variable, on en déduit que le symbole $(X, \mathbf{a})_v$ (sur une variété V complète sans point multiple quelconque) est toujours un nombre *rationnel*, dont le dénominateur ne dépend pas en outre du couple $(X, \mathbf{a})$, mais seulement de V et de K. Il en résulte en particulier que le nombre $g_x\ (a)$ défini au n° 1 est alors aussi un nombre rationnel, dont le déterminateur ne dépend pas du couple $(X, \mathbf{a})$.

R e m a r q u e 2. On peut, sous certaines hypothèses, considérer, dans les définitions qui précèdent, des cycles $\mathbf{a} \in Z_0\ (V)_K$ n'appartenant pas nécessairement à $Z_0'\ (V)_K$, i.e. ayant des composants algébriques (non nécessairement rationnels) sur K (cf. [9], III). Les résultats exposés ci-dessus suffisent cependant pour l'interprétation que nous avions en vue: pour $\mathbf{a}$ donné, on peut en effet agrandir K de sorte que les composants de $\mathbf{a}$ deviennent rationnels sur K.

R e m a r q u e 3. II existe différentes situations, concernant les variétés complètes sans point multiple, et dans lesquelles la formule (1) ci-dessus est encore valable ([9], III, 5, th. 3).

6. INTERPRÉTATION DE $(X, \mathbf{a})_v$ (CAS D'UNE VALEUR ABSOLUE ARCHIMÉDIENNE). LIEN AVEC LES FONCTIONS THÊTA

On peut alors supposer que K est le corps des nombres complexes $\boldsymbol{C}$. Toute variété abélienne A définie sur $\boldsymbol{C}$ peut être identifiée à un tore, i.e. à un quotient de la forme $\boldsymbol{C}\ /\Delta$, où Δ est un sous-groupe discret maximal de $\boldsymbol{C}^n$- Notons alors μ l'application canonique $\boldsymbol{C}^n \to A$. On sait que, pour tout diviseur $X \in D\ (A)_{\boldsymbol{C}}$, on peut trouver une fonction thêta θ sur $\boldsymbol{C}^n$ admettant pour diviseur $\mu^{-1}\ (X)$. On sait en outre (cf. [13], IV, 5) qu'il existe une forme hermitienne H sur $\boldsymbol{C}^n$ telle que, pour $u \in \boldsymbol{C}^0$, l'expression

$$\psi(u) = \log|\theta(u)| - H(u, \overline{u})$$

soit invariante par Δ. Il existe donc une et une seule application φ: $A_{\boldsymbol{C}} \to \boldsymbol{R}$ telle que $\varphi \circ \mu = \psi$. Par linéarité, on peut étendre φ à une application $\varphi^* : Z(A)_{\boldsymbol{C}} \to \boldsymbol{R}$. Pour $\mathbf{a} \in Z_0(A)_{\boldsymbol{C}}$, on voit de plus que le nombre réel $\varphi^*\ (\mathbf{a})$ ne dépend que de X et de $\mathbf{a}$, mais non du choix de θ. On peut désigner ce nombre par $(X, \mathbf{a})^*$. Les propriétés des fonctions thêta permettent de vérifier que ce symbole vérifie toutes les conditions du th. 2. On a donc dans ce cas $(X, \mathbf{a})_v = (X, \mathbf{a})^*$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lang S., Diophantine geometry, Interscience Tracts, New-York, 1959.
[2] Lang S., Diophantine approximation on toruses, *Amer. J. Math.*, **86**, 521—523 (1964).
[3] Lang S., Conférence au Sêminaire Bourbaki, n° 274, mai 1964.
[4] Manin Yu. I., *Izvestya*, **28**, 6, 1363—1390 (1964).
[5] Néron A., Une propriété des faisceaux linéaires de courbes de genre 1, *C. R. Acad. Sc. Paris*, mai 1948.
[6] Néron A., Un théorème sur le rang des courbes algébriques dans les corps de degré de transcendance finie, *C. R. Acad. Sc. Paris*, mars 1949.
[7] Néron A., Valeur asymptotique du nombre des points de hauteur bornée sur une courbe elliptique, Int. Congr. of Math., Edinburgh, 1958.
[8] Néron A., Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, Publ. Inst. Hautes Et. Scientifiques, 21 (1964).
[9] Néron A., Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes, *Ann. of Math.*, **82**, 2 249—331 (1965).
[10] Shimura G., Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field, *Amer. J. Math.*, **77**, 134—176 (1955).
[11] Weil A., Arithmetic on algebraic varieties, *Ann. of Math.*, **78**, 3, 412—444 (1956).
[12] Weil A., Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 29 (1962), 2e ed.
[13] Weil A., Variétés kählériennes, Act. Sc. et Ind., n° 1267 (1958).

T. Ono

ON TAMAGAWA NUMBERS

We shall use $\boldsymbol{C}$ as a universal domain when we consider the topological properties of the variety defined over $\boldsymbol{Q}$. Let G be a connected semi-simple algebraic group defined over $\boldsymbol{Q}$ and $\tau\ (G)$ be the Tamagawa number. The most important fact about $\tau\ (G)$ is that this number is closely related to the fundamental group $\pi_1\ (G)$. In fact, Weil has conjectured that

$$\pi_1 (G) = 0 \Rightarrow \tau (G) = 1. \qquad \text{(W)}$$

Let us now consider a variety X defined over $\boldsymbol{Q}$ on which acts an algebraic group G transitively. Examples we have in mind are: (1) $X = \boldsymbol{C}^n - \{0\}$, $G = SL\ (n)_{\boldsymbol{C}}$, (2) $X = S^n$ (complex n-sphere), $G = O^+ (n+1)_{\boldsymbol{C}}$. Observe that $\pi_1\ (X) = \pi_2\ (X) = 0$ if $n \geqslant 2$ in (1) and $n \geqslant 3$ in (2). Note also that if $X = G$, a group, $\pi_2\ (G) = 0$ is automatically satisfied. Hence it will be natural to define $\tau\ (X)$ for certain class of homogeneous spaces so that one can expect the following generalization of (W):

$$\pi_1 (X) = \pi_2 (X) = 0 \Rightarrow \tau (X) = 1. \qquad \text{(W}')$$

In fact, we shall define $\tau\ (X)$ as a number which measures a deviation from the validity of the mean value theorem for the algebraic transformation space (G, X). Let G be a connected algebraic group over $\boldsymbol{Q}$ which has no non-trivial characters, let X be a variety defined over $\boldsymbol{Q}$ on which G acts transitively. We assume that for $x \in X$, the isotropy group H_x is also connected and without characters, that $X_Q \neq \emptyset$ and that X_Q is discrete in the adele space X_A. One can then define a canonical measure dX_A on X_A. For a function f on X_A which is continuous with compact support, consider the following integrals

$$\int f\, dX_A = \frac{\int F d\,(G_A/G_Q)}{\int d\,(G_A/G_Q)}\,, \qquad (*)$$

where $F = \sum_{\xi \in X_Q} f\,(g,\xi)$ is a function on G_A/G_Q. We shall call (*) the Tamagawa number of X, written $\tau\,(X)$, if it is finite and does not depend on the choice of f. If, in particular, $X = G$, this definition coincides with the ordinary definition of $\tau\,(G)$. Anyway, $\tau\,(X) = 1$ and the mean value theorem for (G, X) are synonymous. In order that $\tau\,(X)$ is well-defined, for example, the existence of a rational $\boldsymbol{Q}$-section for the fibering $G \to X$ is sufficient, which are the case for (1), (2). For such case, one can derive (W') from (W).

It seems to us interesting that the vanishing of the first two homotopy groups of the underlying complex manifolds is the reason for the validity of the mean value theorem in the geometry of numbers.

G. Papy

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ENSEIGNEMENT MODERNE DE LA MATHÉMATIQUE

Le programme de l'expérience belge pour les cinq premières années du cycle secondaire (12 à 17 ans) est conforme aux voeux unanimes émis par toutes les réunions de mathématiciens purs et appliqués que se sont penchés sur le problème de l'enseignement:

1. La mathématique actuellement utile est la mathématique moderne. Elle a le plus de chances d'entrer en résonance avec l'esprit des enfants d'aujourd'hui.
2. Il faut apprendre à mathématiser des situations.
3. Les programmes du cycle secondaire doivent comporter: ensembles, relations, graphes, groupes, espaces vectoriels (y compris les vectoriels à produit scalaire euclidien), les débuts de l'analyse mathématique et du calcul différentiel et intégral.

Le point le plus central, le plus fondamental du programme précédent est sans conteste:

ESPACES VECTORIELS

La mise en évidence systématique des espaces vectoriels sous-jacents, dans les branches les plus variées, est un des traits caractéristiques du vrai visage de la mathématique d'aujourd'hui. L'étude de problèmes difficiles de topologie utilise notamment la structure d'anneau-module, qui généralise celle d'espace vectoriel.

Qui ne voit l'impossibilité actuelle de développer honnêtement un cours d'analyse mathématique sans utiliser de manière fondamentale les espaces vectoriels [D1]. Est-il admissible de dissimuler que différentielles et intégrales sont des exemples importants d'applications linéaires?

Gustave Choquet a indiqué avec combien de force et de raison que les vectoriels à produit scalaire constituent la Voie Royale de la Géométrie. La théorie des vectoriels à produit scalaire est le cadre naturel du précieux legs de la tradition euclidienne!

Est-il possible d'étudier les espaces vectoriels sans introduire la structure de groupe... alors qu'un vectoriel est, avant tout, un groupe commutatif... et qu'apparaîtront inévitablement les groupes de transformations linéaires?

La plupart des groupes envisagés sont des groupes de permutations. Il s'agira de distinguer les permutations parmi les transformations.

L'ensemble des classes latérales de tout sousvectoriel constitue une partition.

Et nous n'avons pas encore évoqué le champ des coefficients. Les vectoriels considérés sont réels: il s'agit donc d'introduire le champ ordonné des nombres réels, dans lequel la structure d'ordre joue un rôle tout à fait fondamental.

Inutile de prolonger cette énumération en cascade, un bon enseignement des éléments des vectoriels utilise inévitablement tous les concepts de la théorie élémentaire des ensembles, des relations et des groupes.

L'inscription de l'étude du vectoriel réel au programme de l'enseignement secondaire, impose les grandes lignes de ce programme que nous allons examiner ci-dessous de manière plus détaillée, en suivant l'ordre chronologique, et en polarisant nos observations sur la géométrie et le vectoriel euclidien plan.

* * *

En 1961, au moment même où l'entreprise belge de rénovation de l'enseignement de la mathématique démarrait dans les classes de 6ème (12—13 ans), j'ai pris une classe de 3ème scientifique (élèves de 15 à 16 ans, 7 périodes de 45 min. par semaine) pour voir s'il n'y avait pas moyen d'enseigner directement la théorie des vectoriels à des élèves de 15 ans ayant suivi un enseignement traditionnel.

Cette expérience m'a amené à la conclusion que voici:

1. L'enseignement traditionnel avant 15 ans, avait déjà conditionné les élèves dans un sens opposé à l'esprit de la mathématique moderne. De grands efforts devaient etre consentis pour les désintoxiquer. Le conditionnement antérieur n'avait rien de naturel ni de spontané: des trésors de pédagogie et d'abnégation traditionnelles avaient été dépensés pour arriver à ce résultat... qu'il convenait maintenant de détruire. Quelle perte de temps et d'énergie!

2. Les notions fondamentales concernant ensembles et relations s'enseignent plus aisément à 12 ans qu'à 15. Elles embouteillent le cours de la classe de 15 ans où trop de concepts doivent s'introduire simultanément.

3. Ensembles, relations, groupes... étant enseignés dès 12—13 ans, il est possible d'utiliser harmonieusement ces concepts comme outils-moteurs de la construction même de l'édifice mathématique et en particulier de la géométrie. Il en résulte un énorme gain de temps et de motivation et la mathématique apparaît ainsi dans une vision unitaire.

Classe de sixième (12—13 ans) (4 pèriodes hebdomadaires de 45 min) [1]

La première moitié de cette année est réservée aux ensembles et relations, enseignés en s'aidant des représentations géométriques par diagrammes de Venn et graphes multicolores.

Tous ceux qui ont procédé de la sorte — et ont pris leur temps pour cet enseignement — ont pu constater, les années ultérieures, que les principales notions de cette théorie élémentaire et naïve étaient définitivement assimilées et faisaient même partie de la connaissance acquise immédiatement disponible.

L'usage des diagrammes de Venn et des graphes apprend subsidiairement à dessiner des schémas et à schématiser des situations, ce qui est fondamental pour toutes les études ultérieures.

On aborde la géométrie au cours de la deuxième moitié de cette année en utilisant à la fois les notions ensemblistes acquises et la méthode axiomatique des sciences expérimentales. Le plan est regardé comme un donné que l'on idéalise de manière harmonieuse lorsque l'expérience proprement dite cesse de donner des réponses. Le maître choisit des situations qui provoquent l'expression de certaines affirmations plus ou moins descriptives. C'est parmi celles-ci que l'on choisit les axiomes d'incidence de la géométrie plane.

Il est souvent difficile de raisonner sur des figures parce que l'on y *voit* les réponses sans *raisonner*. On obvie à cet inconvénient par l'utilisation des diagrammes de Venn ([MM1] pp 68—71) et notamment en demandant de dessiner dans le plan des situations primitivement décrites par des diagrammes.

L'axiome des parallèles est introduit sous forme globale ([MM1] pp 73—75).

Les chaînes de parallélogrammes conduisent tout naturellement à la notion de couples équipollents. Le caractère arguésien du plan est contenu dans l'axiome affirmant la transitivité de l'équipollence.

---

[1]) Certaines classes belges de sixième disposent de 5 à 6 périodes hebdomadaires. C'est l'idéal. Personnellement, nous avons mené l' expérience dans des classes à quatre périodes.

Les translations ou vecteurs (classes d'équivalence de l'équipollence), apparaissent d'emblée comme permutations du plan. L'indentification délibérée de vecteur et translation à une permutation du plan économise des concepts et évite des distingues subtils mais inutiles.

En ce qui concerne la géométrie, le cours de sixième se termine par la mise en èvidence du groupe commutatif des vecteurs auquel s'indentifie le plan Π dès la fixation d'une origine. Les élèves effectueront des calculs dans le groupe $\Pi_0, +$ qui est en lui-même une prodigieuse situation pédagogique.

En plus des translations, on considère dans cette classe les projections parallèles du plan sur une droite et l'une des premières démonstrations dignes de ce nom consiste à prouver que les projections parallèles de couples équipollents sont équipollentes, premier pas vers le théorème de Thalès. On utilisera, à cet effet, le moyen pédagogique des bandes dessinées pour marquer les étapes de la démonstration ([MM1] p 362).

Une telle présentation de la géométrie est possible parce que nos élèves ont étudié au préalable ensembles et relations, et notamment les permutations.

Classe de cinquième (13—14 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

Cette année est presque entièrement consacrée à la genèse simultanée du champ ordonné des réels et de la structure vectorielle plane. Le fait important à retenir ici, est qu'il *existe au moins une méthode permettant d'introduire ces notions importantes, de manière à la fois rigoureuse et intuitive, à des enfants de* 13 *à* 14 *ans*.

Cet enseignement a pu réussir gràce à la présentation antérieure des éléments de géométrie sous forme ensembliste, axiomatique et relationnelle. La numération de position joue un rôle essentiel dans l'introduction de l'ensemble ordonnè des réels. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à [F1], petit ouvrage destiné aux enseignants, où à [MM2], manuel destiné aux élèves et écrit après l'expérience.

Un patient cheminement nous a conduit des axiomes originels de caractère intuitif à la structure de vectoriel réel de dimension deux. Au fur et à mesure du développement du cours, on invoque de moins en moins les axiomes originels et les propositions intermédiaires et de plus en plus lès propriétés qui caractérisent la structure de vectoriel réel du plan.

Le cours *culmine* par la mise en évidence de cette structure et se *termine* par son utilisation systématique. On prépare ainsi le retournement psychologique du début de la classe de troisième où la structure vectorielle est la base axiomatique de départ.

C l a s s e d e q u a t r i è m e (14—15 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min)

«Le cadre du vectoriel euclidien plan est la voie royale pour l'enseignement de la géométrie». Encore convient-il d'accéder sans heurt à cette voie. Tel est le but de notre enseignement de la géométrie métrique dans la classe de quatrième.

A partir de la notion bien intuitive de symétrie orthogonale, on introduit ou l'on retrouve déplacements (rotations ou translations) et retournements (symétries glissées ou non).

Le moyen pédagogique des droites numérotées facilite l'accès au groupe des isométries et à celui des déplacements ([GP] et [MM3]).

L'utilisation simultanée de ces groupes et des repères affins des droites introduit la notion de distance sous sa forme moderne comme application de $\Pi \times \Pi$ dans R^+, ce qui sous-entend de choix préalable de l'unité. Il n'y a aucune objection à la fixation de celle-ci, puisque le changement d'unité pose un problème dont la solution est banale.

Le groupe commutatif des rotations de centre donné conduit au groupe des angles. Comme la mesure des angles ne joue aucun rôle en géométrie élémentaire, le problème que pose son introduction est reporté à la classe de seconde où il est résolu dans le cadre de la théorie des fonctions circulaires. La préhension numérique de l'angle se fera d'abord par l'intermédiaire du cosinus.

Distance et cosinus introduisent le produit scalaire. Sa commutativité et sa bilinéarité entraînent théorème de Pythagore, inégalité de Cauchy-Schwartz et inégalité triangulaire.

Le cours *culmine* par la mise en évidence de la structure de vectoriel euclidien plan et se *termine* par son utilisation systématique.

C l a s s e d e t r o i s i è m e s c i e n t i f i q u e (15—16 ans) (7 périodes hebdomadaires de 45 min)

Les élèves ont eu l'occasion de se rendre compte de l'importance de la structure de vectoriel ce qui motive une petite étude intrinsèque dont le point crucial est le théorème de la base:

Si un vectoriel admet une base de n éléments

Alors toute base de ce vectoriel comprend n éléments.

Ce théorème est mis à la portée des élèves de 15 ans grâce à un moyen pédagogique qui matérialise les subtitutions dans le passage d'une base à une autre. Ce procédé est décrit de manière schématique dans [F2] pp 32—33.

Ce point acquis, le moment est venu d'effectuer le retournement psychologique auquel nous avons déjà fait allusion. La fin des cours des classes de cinquième et de quatrième a déjà appris à se servir, en fait, des axiomes de définition de la structure de vectoriel euclidien plan.

Les élèves qui ont parcouru avec nous le chemin menant des axiomes originels à cette structure ont souvent une certaine angoisse à l'idée de ne pas retenir le détail de l'itinéraire parcouru. Le retournement psychologique vient à son heure: il est apaisant et réconfortant de savoir que l'on a le droit de ne plus retenir que les axiomes de définition des réels et ceux de la structure de vectoriel euclidien plan.

La dimension n'intervient pas dans les démonstrations concernant le carré scalaire d'une somme et le théorème de Pythagore. On fait d'une pierre deux coups, puisque ces résultats restent valables dans l'espace.

La plus grande partie du cours de troisième, en ce qui concerne la géométrie, est néanmoins consacrée à une étude plus systématique du vectoriel euclidien plan. Il serait navrant de n'utiliser cette importante structure que pour établir de manière nouvelle des résultats déjà acquis dans l'enseignement antérieur et notamment dans la classe de quatrième. Le déroulement du cours de troisième doit convaincre les élèves que le vectoriel euclidien plan est une formidable base de départ pour la conquête de notions absolument fondamentales de la mathématique de toujours.

La linéarité des projections parallèles, des homothéties et des symétries parallèles (et orthogonales) mise en évidence dans les classes de 5ème et 4ème, motive l'étude des transformations linéaires du vectoriel plan.

Toute transformation linéaire est déterminée par l'image des éléments d'une base. On devine aussitôt le bénéfice que l'on pourra tirer d'une utilisation adéquate de la méthode des graphes, dont l'intérêt rebondit ici de manière subite. A chacun de ces graphes partiels est associée la matrice de la transformations dans la base considérée. Cette étude met en évidence l'anneau des transformations linéaires (et subsidiairement celui des matrices $R^{2\times 2}, +, \cdot$) et le groupe linéaire général (voir [A7], Ch. 2).

On a vu, dans les classes antérieures, que les isométries centrées sont linéaires. D'où le problème inverse: quelles sont les transformations orthogonales (ou transformations linéaires qui conservent le produit scalaire)? On est heureux d'établir que les seules transformations orthogonales sont celles que l'on connait déjà: symétries et rotations. L'étude des matrices de ces transformations dans une base orthonormée conduit au cosinus d'une rotation ainsi qu'au demi-tour et aux *deux* quarts de tour.

Le groupe des similitudes et le sous-groupe des similitudes directes s'obtiennent en composant homothéties et transformations orthogonales. On établit enfin que l'ensemble des similitudes directes est un champ (ou corps commutatif).

Une des manières d'*orienter* le vectoriel consiste à décider d'appeler i l'un des quarts de tour. Toute similitude directe s'indentifie au nombre complexe $a + bi$. La partie réelle a ne dépend pas de l'orientation contrairement au signe de sa partie imaginaire b. Dans le plan orienté, on définit le sinus d'une rotation ou d'un angle.

Les angles sont introduits comme éléments d'un groupe additif isomorphe au groupe compositionnel des rotations ou au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Il est facile de déduire les quelques formules trigonométriques importantes des propriétés des nombres complexes.

Pour plus de détails, nous renvoyons au bel ouvrage [D] de Jean Dieudonné écrit à l'intention des enseignants intrépides et à [GP] directement destiné aux élèves.

Dans la classe de seconde (16—17', la géométrie dans l'espace est développée à partir du vectoriel euclidien de dimension trois.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages

1. (A) Artin : — Geometric Algebra (Interscience Publishers—New-York 1957) (Gauthier-Villars, 1966)
2. (D1) Dieudonné : — Foundations of Modern Analysis (Academic Press inc., New-York, 1960)
   — Fondements de l'Analyse Moderne (Gauthier-Villars, Paris 1963)
3. (D2) Dieudonné : — Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire (Herman-Paris, 1964)
4. (G) Papy : — Groupes (Presses Universitaires de Bruxelles Bruxelles-Dunod, Paris 1961)
   — Groups (Macmillan, London 1964)
   — I gruppi (Feltrinelli Editore, Milano, 1964)
5. (EE) Papy : — Erste Elementen der Moderne Mathematik (Otto Salle Verlag, Frankfurt — Hamburg 1962—1963)
6. (F1) Papy-Debbaut : — Géométrie affine plane et nombres réels (Presses Universitaires de Bruxelles Bruxelles, Gauthier-Villars, Paris 1962)
   : — Ebene Affine Geometrie und reelle Zahlen (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965)
7. (F2) Papy : — Initiation aux Espace Vectoriels (Presses Universitaires de Bruxelles — Bruxelles, Gauthier-Villars, Paris 1963)
   — Einführung in die Vectorraumlehre (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965)
8. (MM1) Papy : — Mathématique Moderne 1 (Editions Didier — Bruxelles — Paris 1963)
   — Moderne Wiskunde 1 (Didier, Bruxelles — Paris 1965)
   — Matematica Moderna 1 (Edutura Tineretului, Bucaresti 1965)
   — Modern Mathematics 1 (Collier-Macmillan, London — New-York 1965)
9. (MM2) Papy : — Mathématique Moderne 2 (Didier — Bruxelles, Paris 1965) (avec la collaboration des Assistants du C.B.P.M.)
10. (A7) Papy : — Arlon 7. Documentation pour l'enseignement du Vectoriel euclidien plan. (Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique — 183, avenue Brugmann — Bruxelles 6)

11. (GP) Papy : — Géométrie Plane (Labor Bruxelles, Nathan, Paris, 1966)

12. (MM3) Papy : — Mathématique Moderne 3 (Didier — Bruxelles, Paris 1966)

Articles

13. Papy : — Introduction aux espaces vectoriels (La math. du 20e siècle. Vol. II — Bruxelles 1961 (33 pages)

14. Papy : — Méthodes et techniques de présentation des nouveaux concepts de mathématiques dans les classes du premier cycle de l'enseignement secondaire (Mathématique moderne. OCDE Athènes 1963)
— Médios y técnicas para exponer los conceptos de matematica moderna. (Elementos n° 9, Nov. Dic. 1964, pp. 73—80 n° 10 En. Feb. 1965 pp. 99—104, n° 11 Mar. Abr. 1965, pp. 127—130)
— Method and techniques of explaining new mathematical concepts in the lower forms of secondary schools. (The Mathematics Teacher-Vol. LVIII n° 4 April 1965, pp. 345—352, n° 5, May 1965, pp. 448—453)

15. Papy : — Comment introduire les notions d'ensembles et de relations (Publications de l'Unesco)

16. Papy : — L'enseignement de la géométrie aux enfants de 12 à 15 ans. (Publications de l'Unesco)

V. Ponomarev

ON SPACES WHICH ARE CO-ABSOLUTE WITH METRIC SPACES

All spaces are supposed regular T_1-spaces, all mappings are continuous.

Two spaces will be said co-absolute if they have homeomorphic absolute. It is proved that the co-absoluteness of two spaces X and Y is necessary and sufficient for the existence of an irreducible perfect (but in general multivalued) mapping of the one space onto the other.

In a multivalued mapping $f\colon X \to Y$ to each $x \in X$ corresponds a closed $fx \subseteq Y$. Continuity is supposed in the sense of uppersemicontinuity: to each neighbourhood $V(fx)$ corresponds a neighbourhood Ux such that $f(Ux) \subseteq V(fx)$. Counter-images $f^{-1}y$ are defined as $f^{-1}y = (x,\ fx \ni y)$.

A (multivalued) mapping $f\colon X \to Y$ is perfect, if f is continuous (in the above sense), closed and bicompact in both directions, what means that all images fx and all counter-images $f^{-1}y$ are bicompact. For any perfect multivalued mapping $f\colon X \to Y$ (and only for such a mapping) a space Z and two single-valued mappings $g\colon Z \to X$ and $h\colon Z \to Y$ can be found such that $f = hg^{-1}$.

If the mappings g and h can be chosen to be irreducible single valued (in the sense that no proper closed subset of Z be mapped by them on the whole of X resp. of Y) then f is called an irreducible (multivalued) mapping.

D e f i n i t i o n. The family Σ, whose elements are open sets of the given topological space X is called *dense* in X if in every open set of X a set of the family Σ is contained.

The minimal cardinality of a dense family of open sets in the space X is called the *π-weight* of X.

T h e o r e m 1. In order that a space X allows a single valued perfect irreducible mapping onto a metric space it is necessary and sufficient that X be a paracompact p-space satisfying any one of the following two conditions:

1) There exists in X a dense σ-locally finite family of open sets.

2) There exists in X a dense family Σ of open sets which is the union of a countable system of disjoint and locally finite sub-families.

The so-called p-spaces are defined and studied by A. Arkhangelski. The paracompact p-spaces (the only which are of importance for us in the present paper) are exactly those spaces which allow univalued perfect mappings onto metric spaces. A paracompact space complete in the sense of Čech is necessarily a p-space.

T h e o r e m 2. If the p-space X allows a multivalued perfect irreducible mapping onto a metric space Y then X allows also a single-valued perfect irreducible mapping onto a metric space Y' (which is in general different from Y).

T h e o r e m 3. A space X allows a single valued perfect irreducible mapping onto a separable metric space if and only if it is finally compact (-Lindelof) and of a countable π-weight. If the p-space X allows a multivalued perfect irreducible mapping onto a separable metric space Y then the π-weight of X is countable and there exists a singlevalued perfect irreducible mapping of X onto a metric space Y' (in general different from Y).

T h e o r e m 4. A bicompactum (-bicompact Hausdorff space) X allows a singlevalued irreducible mapping onto a compactum (-compact metric space) Y if and only if the π-weight of X is countable. If the space allows a multivalued irreducible perfect mapping onto a compactum Y then it allows a singlevalued mapping of the same kind onto a compactum Y'.

From Theorem 4 follows the answer on a problem posed by P. Alexandroff, namely:

T h e o r e m 5. A perfectly normal bicompactum X is co-absolute with a metric space (and allows therefore a single valued mapping onto a compactum) if and only if X is separable (i. e. contains an everywhere dense countable point set).

T h e o r e m 6. A bicompactum X is co-absolute with the Cantor perfect set if and only if X has a countable π-weight and contains no isolated points.

T h e o r e m 7. The space X allows a singlevalued perfect irreducible mapping onto a complete metric space if and only if X is a paracompact space which is complete in the sense of Čech and satisfies one of the conditions 1), 2) of Theorem 1. Moreover we have in this Theorem and in the following one the same equivalence between the existence of single- and multivalued mappings as in Theorems 2 and 4.

T h e o r e m 8. A bicompactum X with the π-weight τ allows an irreducible mapping onto a bicompactum of the ordinary topological weight.

T h e o r e m 9. The π-weight of a dyadic bicompactum equals its topological weight.

T h e o r e m 10. Let a dyadic bicompactum X contain a dense point set X_1 which is co-absolute with a metric space, Y_1. Then all of the three spaces X, Y_1 and (of course X_1) have countable bases.

T h e o r e m 11. An extremally disconnected bicompactum X contains a subspace X_1 allowing a closed irreducible mapping onto a metric space in the case and in that case only when there exists in X a dense σ-disjoint family of open sets.

The following theorem gives a positive answer on a well known and old problem of P. Alexandroff:

T h e o r e m 12. Let X be an uncountable perfectly normal bicompactum. Then every class of the Borel classification of point sets in X is non void.

A space is called extremally disconnected if the closure of every canonical open set in it is open. The extremally disconnected spaces are precisely spaces satisfying the condition $(\bar{\delta})$ of Urysohn.

H. R o s s i

DIFFERENTIABLE SUBMANIFOLDS OF COMPLEX EUCLIDEAN SPACE

Let M^k be a real differentiable submanifold on $\boldsymbol{C}^n$. We may consider the tangent bundle T to M as a (real) subbundle of the tangent bundle $M \times \boldsymbol{C}^n$ to $\boldsymbol{C}^n$ along M. We assume that the fibers of the distribution $S = T \cap \sqrt{-1}\,(T)$ all have the same dimension. Each fiber of S inherits the structure of a complex manifold. If $k > n$, then the minimal possible (complex) dimension of S_x is $k - n$; we say the distribution is *regular* if this is the dimension. A differentiable function on M is called *holomorphic* if its differential is complex linear when restricted to each S_x. The collection of holomorphic functions $H\,(M)$ forms a ring which is not uniformly dense in all continuous functions and which contains the restrictions of functions holomorphic in $\boldsymbol{C}^n$. One central problem is to describe intrinsically this ring of functions. Another is the study of the possibility of analytic extension of the functions in $H\,(M)$ into some set in $\boldsymbol{C}^n$, and description of that set. These problems are completely solvable in the case $k = 2n - 1$ by the Levi form of M. An attempt is made to define an analogue in the case of higher codimension, and to determine its influence on the behavior of the functions in $H\,(M)$.

Problems of this nature have been considered by various authors: Hartogs, Poincaré, E. E. Levi, Krzoska, Sommer, R. Hermann, R. O. Wells and most significantly Hans Lewy and E. A. Bishop. These works will be discussed.

The structure described above can be abstractly formulated and, in the real analytic case, it is shown that nothing new is added. It is also shown in the real analytic case that if $T \cap \sqrt{-1}\,(T) = \{0\}$ everywhere then M is holomorphically convex. The differentiable case appears to be very difficult.

I. E. Segal

FUNCTIONAL INTEGRATION AND NON-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Probability measures in infinite-dimensional linear spaces arise naturally in the theory of stochastic processes, in quantum field theory, and in quantum statistics. Quite frequently, these measures are countably additive only relative to finite-dimensional spaces; the linearity of the space compensates in a way for the lack of full countable additivity. Such a measure may be extended to a fully countably additive one on a larger space in an infinite variety of ways, whose relative utility is a function of the analytical role and origin of the measure in question.

For example, there is a virtually unique such (weak, probability) distribution on an infinite-dimensional Hilbert space which is invariant under its full isomorphism group (i.e., orthogonal or unitary group); it is a mixture of the isotropic normal distributions centered at the origin, of arbitrary variances; it is fully countably additive only in the trivial case of zero variance. For any suitable concrete realization of the Hilbert space H, for example as the space $L_2\,(M)$

of all square-integrable functions on a measure space M of an appropriate nature, there will be a countably additive extension of the measure; thus, for $H = L_2(0, 1)$, the map $f \to F$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, carries H into the space $C([0, 1])$ of all continuous functions on $[0, 1]$ which vanish at 0, i.e. Wiener space; the naturally induced measure on $C([0, 1])$ is countably additive, and indeed identical with Wiener measure. As is typical, this attainment of countable additivity in a concrete space has involved the loss of simple invariance features.

Many difficult and important questions remain in the area of linear functional integration theory, but the foundations of the subject have been effectively studied in the past twelve years, and are now basically quite well understood. We might summarize the situation as follows: countable additivity plays an essential role for measures on locally compact or similar spaces; it can also play a quite important technical role for measures on infinite-dimensional spaces, but integration-theoretically, these spaces appear most naturally as limits of finite-dimensional ones.

The clarification of this general question is important in order to proceed to the case of non-linear spaces, e. g. the solution manifold of a non-linear equation of evolution. In general, the probability distributions of particular interest on these manifolds are likely to have distinguished group-invariance properties, which are correlated with weakened regularity and countable-additivity, which in turn leads to difficulties in the definition of non-linear functionals and transforms on the manifold. While there is in general no great difficulty in approximating even a non-linear manifold by a finite-dimensional one, it is difficult to do so in a fashion which commutes with the respective actions of the temporal translation or other groups on the manifolds. Since potential applications to the treatment of stochastic and quantized partial differential equations have been the major source of recent developments in functional integration theory, it seems appropriate and perhaps essential, at this stage, to develop the theory further in close relation to the theory of the partial differential equations in question,— as well as in abstracto. We turn therefore to the consideration of the solution manifold of a given non-linear evolutionary partial differential equation. In so doing, we concentrate on equations of the type considered in the heuristic study of quantum-fields (i.e. operator-valued distributions satisfying certain prescribed commutation or similar relations), for mathematical rather than physical purposes; namely, the breadth and depth of the mathematical difficulties of non-linear functional integration theory may well be at their greatest in this direction. Indeed, physically there has been a long-term trend away from the belief that local partial differential equations in Minkowski space form an appropriate basis for the analysis of microscopic elementary particle phenomena. However, the really fundamental ideas of quantum field theory are quite possibly largely independent of localization of the field in Minkowski space, and should be mathematically realizable in such a framework, even if its physically validity is uncertain. In macroscopic physics there is little doubt about the importance of hyperbolic partial differential equations; and mathematically, models are provided for the study of a number of key problems of non-linear functional analysis (among them the treatment of non-linear functions of generalized functions; and the theory of infinite-dimensional symplectic and hermitian manifolds).

The basic partial differential equations of quantum mechanics are naturally taken in the evolutionary form

$$u' = Au + K(u, t); \tag{1}$$

here $u = u(t)$ has values in a function space; $K(u, t)$ is a given non-linear function of u and t; in this form the basic equations of fluid mechanics are also essentially included. An important special case, to which we confine ourselves, partly for brevity, is that of a time-independent second-order equation; this may conveniently be taken in the form

$$\Phi'' + B^2\Phi = J(\Phi), \tag{2}$$

where B is a given non-negative self-adjoint operator in a Hilbert space H, and J is a given non-linear operator from the completion $[D_B]$ of the domain of B, relative to the inner product: $\langle x, y\rangle_B = \langle Bx, By\rangle$, to H. For example, the equation

$$\square\varphi = m^2\varphi + F\varphi\ (\square = \Delta - a_t^2;\ F(0) = F'(0) = 0) \tag{3}$$

in a flat space-time of dimension $n + 1$, is subsumed by taking $H = L_2(S)$, S=space, $B = (m^2I - \Delta)^{1/2}$, $\Phi(t) = \varphi(., t)$ (.= space variable), and J: $\Phi \to -F(\varphi)$; J is then an unbounded non-linear operator, in general. The point of the formulation of J as an operator from $[D_B]$ to H appears in the reformulation of the equation as one of first order: u is a vector in the space $H' = [D_B] + H$, A is the skew-adjoint operator in H' whose matrix is $\begin{pmatrix} 0 & I \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}$, and $K(u, t)$ is the map, $u = (f, g) \to (0, J(f))$; this equation is of the form (1) with A a skew-adjoint operator and $K(u, t)$ a non-linear time-independent operator in H'. Combining classical methods and functional analytic ideas, one may show

Theorem 1. *If J is locally Lipschitzian from $[D_B]$ to H, then the Cauchy problem for the equation* (2); $\Phi(t_0) = f$, $\Phi'(t_0) = g$, $(f, g) \in H'$, *has a unique local solution in time (to its integrated form). If additionally there exists a non-positive Frechet-differentiable function E on H such that $\partial_v E(v) = \langle J(v), .\rangle$, then the solution exists (and is unique) globally in time.*

For example, the equation

$$\square \varphi = m^2\varphi + g\varphi^p \quad (g > 0,\ p \text{ odd}, > 1) \tag{4}$$

has unique global solutions in one and two space dimensions, and also when $p = 3$ in three space dimensions, as first shown by K. Jörgens by a classical (non-abstract) treatment; here $E(v) = -c \int v^{p+1}\, d\vec{x}$, c a positive constant. On the other hand, in $n = 3$ and $p > 3$, or if $n > 3$ and $p > 1$, the mapping $v \to v^p$ carries D_B outside of H, and Theorem 1 does not apply. Nevertheless, by approximation with "cut-off" equations, to which Theorem 1 is applicable, and applying a compactness argument, one may show

T h e o r e m 2. *The Cauchy problem for equation* (4) *with arbitrary finite-energy initial data, has a global weak solution,* (*in any number of space dimensions, for arbitrary odd* p).

It seems difficult to determine whether the solution is unique; or whether it is globally regular if initially so; these questions lead to problems concerning the singular differential operators $\Delta - V$, where the non-negative potentials V lie in the Lebesgue space $L_{1+\varepsilon}$ for small values of ε. On the other hand, the dispersion (also called 'scattering' or 'collision') theory of these equations is in some respects simpler than that for equations which are better behaved from the standpoint of uniqueness and regularity of solutions.

General dispersion theory results are fairly complicated in their statement; for succinctness, we merely describe them as being dependent on: 1) the use of an auxiliary norm or norms N, which in practice are taken as L_q norms of the "field" Φ for $q = \infty$ or q near ∞; 2) the use of a priori bounds and |or decay estimates (as $|t| \to \infty$) on the solutions of the original non-linear equation; 3) sharper estimates on the decay of $N(\Phi)$ for suitably regular solutions Φ of the associated linear, or "free", equation $\Phi'' + B^2\Phi = 0$. Representative of the type of results which may be derived in this fashion is

T h e o r e m 3. *The forward wave operator* (*from solutions of the free to solutions of the non-linear equation*) *exists and is unique within a specified regularity class for the equation* (3) *provided*: $F(\lambda)$ *vanishes to a sufficiently high order* $r(n)$ *near* $\lambda = 0$; *either* $n > 1$ *or* $m > 0$; *the initial datum* (*free solution*) *is sufficiently regular*; F *is of class* C^1.

The required order $r(n)$ decreases as n increases; for $n > 3$, any order $\geqslant 3$ is sufficient, showing that the wave operator exists for the equations (4) in more than 3 space dimensions; when $n = 3$, $p \geqslant 3$ is sufficient if $m > 0$, but if $m = 0$, $p > 5$ is required; when $n = 1$, the hypothesis $m > 0$ is clearly essential, and it is sufficient if $p \geqslant 5$. The total energy of the non-linear solution equals in all cases the energy of the initial free solution. For the existence of the wave operator it is irrelevant whether $g > 0$ or p is odd, but if these conditions are not satisfied the solution of the non-linear equation which is the image under the wave operator of a given free solution need exist only for all sufficiently early times.

The question of the existence of the wave operator from solutions of the non-linear equation to solutions of the free equation proceeds somewhat differently; again the existence holds for a rather general class of functions F, but for brevity only the case of equation (4) is considered in

Theorem 4. *Any finite-energy weak solution of the (integrated form of the) equation* (4) *is weakly asymptotic as* $t \to \infty$ *to a unique finite-energy solution of the free equation, if* $n > 3$ *or if* $n = 3$ *and* $m > 0$.

Corollary 4.1. *If* φ_0 *is a solution of the free equation* $\Box\varphi_0 = m^2\varphi_0$ *of finite energy and whose Fourier transform has compact support, there exists a solution* φ *of equation* (4) *which is strongly asymptotic to* φ_0 *as* $t \to -\infty$; φ *is in turn weakly asymptotic to a unique finite-energy solution of the free equation, provided* $n \geqslant 3$, $m > 0$.

In recent work with W. Strauss, it has been shown that strong asymptoticity is valid as $t \to \infty$ for the equation $\Box\varphi = g\varphi^3$; since solutions of this equation should be expected to have a slower rate of decay than in the case of any of the equations considered in Corollary 4.1, it seems probable that the indicated weak convergence is actually strong, at least in the case $n = p = 3$.

The set of all solutions to a second-order hyperbolic partial differential equation may be regarded as an infinite-dimensional analogue to the phase space of a dynamical system. The existence of a suitable wave operator makes it possible to transform an adequately regular temporally invariant (weak) probability distribution on the solution manifold of the free equation into a temporally invariant (weak) measure on the solution manifold of the non-linear equation, which forms a partial analogue to Liouville's measure. The analogy with the Liouville theory is strongly reinforced by the existence of a natural fundamental second-order differential form playing a role similar to that of the fundamental form in the finite-dimensional case.

Theorem 5. *If in equation* (2) J *is infinitely (Frechet) differentiable, the manifold of all finite-energy solutions is of class* C^∞, *and its tangent vectors at any solution* $\Phi(t)$ *may be naturally represented by solutions* ψ *of the first-order variational equation; on defining, for any two such tangent vectors*

$$\Omega_\Phi(\psi_1, \psi_2) = \langle\psi_1, \psi_2'\rangle - \langle\psi_2, \psi_1'\rangle,$$

Ω *is a closed, non-degenerate, temporally-invariant,* C^∞ *differential form. It is transformed into the corresponding form in the free solution manifold by the wave operator, and this free differential form is inva-*

riant under the dispersion operator, when these operators exist and are sufficiently regular.

In the case of a relativistic equation such as (3), Ω *is invariant under the Poincaré group, when restricted to solutions and tangent vectors which are infinitely differentiable and of compact spatial support.*

The relativistic invariance of the theory is further manifested by its development on a general curved space-time manifold from the local viewpoint taken in the work of Leray on the foundations of the general theory of hyperbolic equations, as initiated by Y. Choquet-Bruhat and A. Lichnerowicz. The formulation of the fundamental differential equation as an abstract equation of evolution is here quite inconvenient, and the fundamental form Ω must be defined differently as follows, treating for brevity the case of the equation: $\Box\, \varphi = F(\varphi)$ on a Lorentzian space-time manifold, and restricting consideration to C^∞ solutions. A tangent vector to the solution manifold at a solution φ may be identified with a solution λ of the equation: $\Box\, \lambda = F'(\varphi)\, \lambda$. The commutator distribution $D_\varphi(x, x')$ may be defined as a solution of this equation as a function of x whose Cauchy data are specified by the requirements that relative to any local space-time coordinates, $D(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = 0$ and $\partial_t D(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ when $t = t'$ (more invariantly, it is the difference of the advanced and retarded elementary solutions given by the Leray theory). According to a result of Choquet-Bruhat, every tangent vector λ is of the form: $\lambda(x) = \int D(x, x') f(x')\, dx'$. for some C^∞ function f of compact support; now defining

$$\Omega_\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \int \int D_\varphi(x, x') f_1(x) f_2(x')\, dx\, dx',$$

we may state

T h e o r e m 6. Ω *is a closed, non-degenerate,* C^∞ *differential form on the manifold of all local solutions of equation* (3) *in the vicinity of any point on the given Lorentzian manifold, and is invariant under local automorphisms of the manifold.*

In terms of the commutator function $D_\varphi(x, x')$ it is possible to express in closed form the commutator of the vector fields on the solution manifold which generate vector displacements in the Cauchy data space, as given on any two space-like surfaces; the algebraic treatment of domains of dependence and regions of influence is thereby facilitated. The commutator function also represents the commutator of the Bose-Einstein quantization of the field defined by the first-order variational equation.

Up to this point the results indicated have been entirely classical, i.e. concerned with solutions of partial differential equations whose values are numerical or in a finite-dimensional vector space. They are however applicable to the treatment of stochastic and quantized partial differential equations, i.e. equations whose solutions have values which are random variables or operators in Hilbert space; in general, however, these solutions will be generalized functions, non-linear functions of which have no *a priori* meaning.

One line of mathematical development proceeds from the earlier observation of the classical significance of the quantum-mechanical commutator, and may be indicated by the

Theorem 7. *Let M be the solution manifold of the partial differential equation:* $\Box\varphi = m^2\varphi + V(\vec{x})\, F(\varphi)$, *where F is as above and V is a given C^∞ function (possibly constant). Then there exists a generalized function φ on space-time whose values are first-order linear differential operators on the space $C^\infty(M)$ of all infinitely differentiable functionals on M which satisfies:* (i) *the canonical commutation relations,* (ii) *a partial differential equation related to the given one (and formally identical to it in case F is linear),* (iii) *invariance relative to the group of the equation, under the natural representation of the group on $C^\infty(M)$ (in particular, Lorentz invariance in case $V(\vec{x})$ is constant).*

The interpretation of the field operators $\Phi(f)$ as self-adjoint operators in a Hilbert space, in accordance with the usual quantum phenomenology, derives from the introduction of a suitable invariant measure on M; in the non-linear case, the only presently known method of establishing the existence of this measure is via the dispersion theory indicated above. The condition on F given in the next result will probably be weakened soon to cover cases in which F is a polynomial.

Corollary 7.1. *For the relativistic equation* $\Box\varphi = m^2\varphi + F(\varphi)$, *the field operators $\Phi(f)$ are self-adjoint as operators in $L_2(M, \mu)$, where μ is the image under the induced action of the wave operator of suitable time-independent normal distributions in the free equation solution manifold, which can be chosen so that their characteristic functions are arbitrarily close to that of the normal distribution associated with the free "vacuum", provided $F(\lambda)$ vanishes near $\lambda = 0$, and is of class C^1 with $F'(\lambda)$ bounded.*

The free "vacuum" normal distribution in a Hilbert space H may be defined for brevity as that whose characteristic function is $e^{-(1/4)\|z\|^2}$ $(z \in H)$. The formal "physical vacuum" distribution is the transform of this distribution under the wave operator, but the distribution is too singular and the wave operator of a relativistic equation too strongly non-linear for this transform to exist in the usual mathematical sense. The difficulty of dealing with non-linear functions of weak distributions arises also in a second line of mathematical development, which deals only with finite times. The fundamental problem is that of giving an effective meaning to non-linear functions, of a random generalized function; due to "local commutativity", a quantized field at a particular time, relative to the presumptive physical vacuum, constitutes such a random function. The "Wick product" provides, relative to the "free vacuum", an approach to these matters. It is possible to define powers $\varphi(x)^n$ for a general class of non-linear random generalized functions $\varphi(x)$ in one dimension, uniquely determined by normalization and transformation properties under displacement in function space $\varphi(x) \to \varphi(x) + f(x)$, where $f(x)$ is a non-random, numerical function), which generalize the Wick powers, and moreover by virtue of the stochastic interpretation provide their simultaneous spectral resolution. Such generalized powers provide a relatively direct approach to the problem of giving a meaning to equations such as (4) for a random generalized function φ.

Both lines of development are effective in providing a simple rigorous formulation of linear quantum field theory; even for the simple linear equation $\square\varphi = m^2\varphi + V(\vec{x})\varphi$, the quantum field dynamics are in general not unitarily implementable relative to the free-field system defined by the equation $\square\varphi = m^2\varphi$, so that it is not trivial to adapt conventional heuristic treatments to a precise one. For suitable V, for example of compact support, the quantum-mechanical dispersion operator for the quantized field defined by the indicated equation is identical with the induced action of the classical dispersion operator, on the subspace of those square-integrable functionals which are *holomorphic*, relative to a V-dependent complex structure in the solution manifold. The analysis of such holomorphic functions is in some respects much simpler than that of general functionals; it would be interesting to determine an invariant holomorphic structure in the solution manifold of a non-linear equation which is similarly compatible with its symplectic structure; there are results pointing in the direction of a canonical such structure invariant under the dispersion operator.

REFERENCES

[1] Choquet-Bruhat Y., *C.R. Acad. Sci. Paris* **242**, 1956 (1956).

[2] Jörgens K., *Math. Z.* **77**, 295—308 (1961).

[3] Lichnerowicz A., *Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sci.* n° 10, P. U.F., Paris, 1961; Cours de l'Ecole d'Eté de Phys. Th. des Houches, 1963.

[4] Segal I., *Jour. Math. Phys.* 1960; *Annals of Math.* **78**, 339—364 (1963); *Bull. Soc. Math. Fr.* **91**, 129—135 (1963); *J. Math. pur. appl.* **44** (1965), 71—132; *C.R. Acad. Sci. Paris* **259**, 301—303 (1964) et **261**, 5323—5326 (1965); Conferences, Collège de France, 1965; to appear in Proc. Conf. Math. Theory of Elementary Particles, Mass. Inst. Tech. 1965.

[5] Strauss W., *C. R. Acad. Sci. Paris* **256** 2749—2750 et 5045—5046 (1963).

G. Shimura

NUMBER FIELDS AND ZETA FUNCTIONS ASSOCIATED WITH DISCONTINUOUS GROUPS AND ALGEBRAIC VARIETIES

1. INTRODUCTION

Let Γ be an arithmetically defined discontinuous group operating on a bounded symmetric domain H, and φ a holomorphic mapping of H into a projective space which induces a biregular morphism of H/Γ onto a Zariski open subset V of a projective variety. Then one can set the following problems.

(A) Find a model V defined over an algebraic number field.

(B) With suitably chosen V and φ, characterize number-theoretically the field generated by the coordinates of $\varphi(z_0)$ for an elliptic fixed point z_0 of an analytic automorphism α of H such that $\alpha\Gamma\alpha^{-1}$ is commensurable with Γ.

(C) Find a connection between the zeta function of V and the Hecke operators defined for the automorphic forms with respect to Γ.

A typical example is the case where Γ is a principal congruence subgroup of the modular group $SL_2(\boldsymbol{Z})$ and H is the upper half plane. Then one finds a curve V so as to be defined over the rational number field $\boldsymbol{Q}$. The classical theory of complex multiplication solves Problem (B). The last problem (C) has been investigated by Eichler [1] and the author [2].

The main purpose of this lecture is to answer the above questions for all possible arithmetic Γ (at least up to commensurability) acting on the upper half plane. This provides a complete analogue to the results obtained for $SL_2(\boldsymbol{Z})$. It turns out especially that the maximal abelian extension of a totally imaginary quadratic extension of a totally real algebraic number field F can be generated, over the maximal abelian extension of F, by the special values of automorphic functions of one variable. Although the principal part is thus concerned with the one-dimensional H, we shall first discuss Problems (A) and (B) in the higher dimensional case, because it will give a clear sight in the whole theory.

2. THE MODULI-VARIETY FOR A FAMILY OF ABELIAN VARIETIES

In many cases, we can attach to H and Γ a family $\Sigma = \{Q_z \mid z \in H\}$, parametrized by the points on H, of structures Q_z, each of which is formed by an abelian variety A_z, a polarization of A_z, endomorphisms of A_z, and points of finite order on A_z. Two members Q_z and Q_w of Σ are isomorphic if and only if $\gamma(z) = w$ for some $\gamma \in \Gamma$. We say that H/Γ is of *type* (P), if the members of Σ can be characterized only by the type of polarization, endomorphisms, and points of finite order. In such a case, one can approach Problems (A) and (B) as follows. First the algebro-geometric characterization of the members enables us to show the existence of an algebraic number field k with the property that, for every $Q_z \in \Sigma$ and an automorphism σ of $\boldsymbol{C}$, σ is the identity mapping on k if and only if $(Q_z)^\sigma$ is isomorphic to a member of Σ. Then one can choose V and φ so that the following conditions are satisfied [6].

(2.1) *V is defined over k.*

(2.2) *If Q and Q' are structures isomorphic to members Q_z and Q_w of Σ respectively, and if Q' is a specialization of Q over k, then* $(\varphi(w), Q')$ *is a specialization of* $(\varphi(z), Q)$ *over k.*

For a given Σ, such V and φ are unique up to biregular morphisms over k. The field $k(\varphi(z))$, for each point $z \in H$, has an invariant meaning for the structure Q_z, since it can be characterized by the following property. We call $k(\varphi(z))$ *the field of moduli of Q_z:*

(2.3) *An automorphism σ of $\boldsymbol{C}$ is the identity mapping on* $k(\varphi(z))$ *if and only if* $(Q_z)^\sigma$ *is isomorphic to Q_z.*

Now if z is an isolated fixed point of an analytic automorphism of H described in (B), then A_z has sufficiently many complex multiplications. Therefore the determination of the number field $k(\varphi(z))$ can be essentially done by applying the theory of complex multiplication of abelian varieties [7] to A_z. However it is not always a simple task but actually an interesting research problem to determine the structure of A_z. The study of some special ones among these A_z is very effectively employed to characterize k number-theoretically [5].

It should be observed that this recognition of H/Γ as moduli-variety does not necessarily give the ultimate answer to our problems, for some reasons which will be explained in the following section. Nevertheless, by this means, one can obtain at least the first approximation to the solution, which is really the best possible in a number of cases, as is seen in the classical case of $SL_2(\boldsymbol{Z})$ and elliptic curves.

3. REFLEXIONS TO THE IDEA OF SECTION 2

There are some spaces H'/Γ' which are not of type (P), but can be embedded into H/Γ of type (P) through injections $H' \to H$ and $\Gamma' \to \Gamma$. In such a case, one can still show that H'/Γ' has a model defined over an algebraic number field. To show this, first we take V and φ for H/Γ so as to satisfy (2.1) and (2.2), and then choose a point z on H' so that A_z has sufficiently many complex multiplications. The points w on H' such that A_w is isogenous to A_z form a dense subset X of H'. Since $k(\varphi(w))$ is the field of moduli of Q_w, we see that the coordinates of the points in $\varphi(X)$ are all algebraic numbers. Therefore, if σ is an automorphism of $\boldsymbol{C}$ over the algebraic closure of $\boldsymbol{Q}$, then one has $\varphi(X) = \varphi(X)^\sigma \subset \varphi(H')^\sigma$, so that $\varphi(H') = \varphi(H')^\sigma$. It follows that $\varphi(H')$, a model for H'/Γ' is defined over an algebraic number field. In this way, we know that H/Γ has a model defined over an algebraic number field, so far as there is a family of abelian varieties attached to H/Γ in the sense of Kuga and Satake. A careful analysis of the special members Q_z and the fields $k(\varphi(z))$ may yield a more precise result.

The field k determined for the family Σ of § 2 is not necessarily the smallest field of definition for the field of automorphic functions with respect to Γ. In reality k is a number field which has an essential meaning for the family Σ of abelian varieties, but not always so for H/Γ. For example, to a certain H/Γ one can attach infinitely many distinct families of abelian varieties. This can happen both in the cases of type (P) and not of type (P). Therefore if we ask for "absolute" statements concerning H/Γ without reference to abelian varieties, the answer of § 2 to our questions may be considered incomplete in such a case. However, by studying these families more closely, it is possible to obtain an "absolute result" for the one-dimensional H, which is our object in the following sections.

4. CONSTRUCTION OF CLASS-FIELDS BY AUTOMORPHIC FUNCTIONS WITH RESPECT TO AN ARITHMETIC FUCHSSIAN GROUP

Let B be a quaternion algebra over a totally real algebraic number field F of degree g. If r is the number of archimedean primes of F unramified in B, one can identify $B_{\boldsymbol{R}} = B \otimes_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{R}$ with the product $M_2(\boldsymbol{R})^r \times \boldsymbol{K}^{g-r}$ of r copies of the total matrix ring $M_2(\boldsymbol{R})$ of degree 2 over the real number field $\boldsymbol{R}$, and $g - r$ copies of the division ring of real quaternions $\boldsymbol{K}$. For every $\alpha \in B_{\boldsymbol{R}}$ let $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_g)$ with $\alpha_\nu \in M_2(\boldsymbol{R})$ or $\boldsymbol{K}$ according as $\nu \leqq r$ or $\nu > r$. If $\det(\alpha_\nu) > 0$ for $\nu \leqq r$, the action of α on the product $\mathfrak{H}^r$ of r copies of the upper half plane $\mathfrak{H} = \{z \in C \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ is defined by

$$\alpha(z_1, \ldots, z_r) = (w_1, \ldots, w_r),$$

$$w_\nu = (a_\nu z_\nu + b_\nu)/(c_\nu z_\nu + d_\nu),$$

$$\alpha_\nu = \begin{bmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu \end{bmatrix}.$$

Let $\mathfrak{o}$ be a maximal order in B, and $\mathfrak{c}$ an integral ideal in F. Let $\Gamma(\mathfrak{o}, \mathfrak{c})$ denote the set of all units γ in $\mathfrak{o}$ such that $1 - \gamma \in \mathfrak{c}\mathfrak{o}$ and $\det(\gamma_\nu) > 0$ for $\nu \leqq r$. Then $\Gamma(\mathfrak{o}, \mathfrak{c})$ can be considered as a discontinuous group acting on $\mathfrak{H}^r$. It is well-known that $\mathfrak{H}^r/\Gamma(\mathfrak{o}, \mathfrak{c})$ is compact if B is a division ring, especially if $r < g$. Hereafter let us assume that $r = 1$, and the archimedean prime of F corresponding to the unique factor $M_2(\boldsymbol{R})$ of $B_{\boldsymbol{R}}$ is obtained from the identity mapping of F.

Lemma. *Let M be a totally imaginary quadratic extension of F which is isomorphic to a quadratic subfield of B over F. Then the following assertions hold.*

(1) *If f is an F-linear isomorphism of M into B, every element in $f(M) - F$ has exactly one fixed point on $\mathfrak{H}$ which is common for all elements of $f(M) - F$.*

(2) *If* $\mathfrak{p}_M$ *denotes the ring of integers in* M, *then there exists an* F*-linear isomorphism* f *of* M *into* B *such that* $f(\mathfrak{p}_M) \subset \mathfrak{o}$.

For an algebraic number field K of finite degree and an integral ideal $\mathfrak{a}$ in K, we denote by $C(K, \mathfrak{a})$ the abelian extension of K in which a prime ideal $\mathfrak{n}$ of K, prime to $\mathfrak{a}$, decomposes completely if and only if $\mathfrak{n} = (b)$ with $b \in K$, $b \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$ and b is positive at every real archimedean prime of K.

Theorem 1. *The notation and assumption being as above, there exists a complete non-singular algebraic curve* V *and a holomorphic mapping* φ *of* $\mathfrak{H}$ *to* V *satisfying the following conditions.*

(1.1) V *is defined over* $C(F, \mathfrak{c})$.

(1.2) φ *gives a biregular isomorphism of* $\mathfrak{H}/\Gamma(\mathfrak{o}, \mathfrak{c})$ *into* V.

(1.3) *Let* M *and* f *be as in* (2) *of Lemma, and* Z *the fixed point of the elements of* $f(M) - F$ *on* $\mathfrak{H}$. *Then* $C(M, \mathfrak{c})$ *is the composite of* $M(\varphi(z))$ *and* $C(F, \mathfrak{c})$.

We call such a (V, φ) *a canonical model* for $\mathfrak{H}/\Gamma(\mathfrak{o}, \mathfrak{c})$. If (V, φ) and (V', φ') are two canonical models for $\mathfrak{H}/\Gamma(\mathfrak{o}, \mathfrak{c})$, then one can show the existence of a biregular morphism j of V to V', defined over $C(F, \mathfrak{c})$, such that $j \circ \varphi = \varphi'$. In this sense, (V, φ) is uniquely determined for $\mathfrak{H}/\Gamma(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$.

The reciprocity-law for the extension $C(M, \mathfrak{z})/M$ can be described explicitly by means of algebraic correspondences on V. For simplicity, let us consider the case $\mathfrak{z} = (1)$. We denote by $N(\alpha)$ the reduced norm (to F) of an element α of B. Let us classify all the right $\mathfrak{o}$-ideals with respect to the left multiplication by the elements α of B such that $N(\alpha)$ is totally positive. Let $\{\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n\}$ be a set of representatives for the classes of right $\mathfrak{o}$-ideals in this sense. Let $\mathfrak{o}_\lambda$ be the left orders of $\mathfrak{r}_\lambda$. Set $\mathfrak{r}_{\lambda\mu} = \mathfrak{r}_\lambda \mathfrak{r}_\mu^{-1}$. Let $N(\mathfrak{r}_{\lambda\mu})$ denote the ideal in F generated by the elements $N(\xi)$ for all $\xi \in \mathfrak{r}_{\lambda\mu}$. We notice that, for each μ, $\{N(\mathfrak{r}_{1\mu}), \ldots, N(\mathfrak{r}_{h\mu})\}$ is a set of representatives for the ideal-classes modulo the product $\mathfrak{u}$ of all archimedean primes in F, and $h = [C(F, 1) : F]$.

Theorem 2. *The notation being as above, there exists a system* $\{V_\lambda, \varphi_\lambda (\lambda = 1, \ldots, h)\}$ *satisfying the following conditions.*

(2.1) $(V_\lambda, \varphi_\lambda)$ *is a canonical model for* $\mathfrak{H}/\Gamma(\mathfrak{o}_\lambda, 1)$ *for each* λ.

(2.2) $$V_\lambda = V_\mu^\sigma \text{ if } \sigma = \left(\frac{C(F, 1)/F}{N(\mathfrak{r}_{\lambda\mu})}\right).$$

(2.3) *Let* M *and* f *be as in Lemma, under the condition* $f(\mathfrak{r}_M) \subset \mathfrak{o}_\mu$. *Let* z *be the fixed point on* $\mathfrak{H}$ *of the elements of* $f(M) - F$. *Let* $\mathfrak{b}$ *be an ideal in* M. *Then there exists an element* α *of* B *and a unique* λ *such that* $\alpha\mathfrak{b}_{\lambda\mu} = f(\mathfrak{b})\,\mathfrak{o}_\mu$ *and* $N(\alpha)$ *is totally positive. With such an element* α *and* $\tau = \dfrac{C(M, 1)/M}{\mathfrak{b}}$, *one has* $\varphi_\mu(z)^\tau = \varphi_\lambda(\alpha^{-1}(z))$.

Example. Let $d =$ either 7 or 9 or 11, and let $F = F_d = Q(\zeta + \zeta^{-1})$ with $\zeta = e^{2\pi i/d}$. Then there exists a quaternion algebra B over F which is unramified at exactly one archimedean prime of F corresponding to the identity mapping of F, and unramified at every finite prime spot of F. Such a B is unique up to isomorphisms over F. In this case $h = 1$ and $C(F, 1) = F$. Let $\mathfrak{o}$ be a maximal order in B. For every maximal order $\mathfrak{o}'$ in B, there exists an element μ of B such that $\mathfrak{o}' = \mu\mathfrak{o}\mu^{-1}$ and $N(\mu)$ is totally positive. One can show that $\Gamma(\mathfrak{o}, 1)$, modulo the center, is a triangle group with three classes of elliptic elements of order 2, 3, d, hence $\mathfrak{H}/\Gamma(\mathfrak{o}, 1)$ is of genus 0. Let z_2, z_3, z_d be corresponding elliptic points on $\mathfrak{H}$ which are unique modulo $\Gamma(\mathfrak{o}, 1)$. Then there is an automorphic function φ on $\mathfrak{H}$ with respect to $\Gamma(\mathfrak{o}, 1)$ which can be characterized by the property that $\varphi(z_2) = 0$, $\varphi(z_3) = 1$, $\varphi(z_d) = \infty$ and φ gives a biregular map of $\mathfrak{H}/\Gamma(\mathfrak{o}, 1)$ onto the complex projective line V. Then it can be shown that this (V, φ) is a canonical model for $\mathfrak{H}/\Gamma(\mathfrak{o}, 1)$. In this case, for *every* totally imaginary quadratic extension M of F, there exists an F-linear isomorphism f of M into B such that $f(\mathfrak{r}_M) \subset \mathfrak{o}$. Let $\{z_1, \ldots, z_q)\}$ be a set of representatives for the $\Gamma(\mathfrak{o}, 1)$-equivalence classes of the fixed points of $f(M) - F$ for all such f. Then q is exactly the class number of M, and from the statements (1, 3) and (2.3) one obtains the following assertion.

The values $\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_q)$ form a complete set of conjugates of $\varphi(z_1)$ over M, and $M(\varphi(z_i))$ is the maximal unramified abelian extension of M for each i.

Therefore φ affords a complete analogue of the classical modular function $j(\tau)$, with the field F_d in place of $\boldsymbol{Q}$.

5. THE ZETA-FUNCTIONS OF B AND V

Let V_λ, φ_λ and $\mathfrak{o}_\lambda$ be as in Theorem 2. Set $\Gamma_\lambda = \Gamma(\mathfrak{o}_\lambda, 1)$. We regard B as a subring of $M_2(\boldsymbol{R})$ through the projection of $B_{\boldsymbol{R}}$ to $M_2(\boldsymbol{R})$. Then $N(\alpha) = \det(\alpha)$ for every $\alpha \in B$. For every $\xi = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\boldsymbol{R})$ with $\det(\xi) > 0$, and for $z \in \mathfrak{H}$, set $j(\xi, z) = \det(\xi)^{-\frac{1}{2}}(cz + d)$. Let $S_m(\Gamma_\lambda)$, for a positive integer m, denote the vector space of all cusp forms of weight m with respect to Γ_λ. Every element of $S_m(\Gamma_\lambda)$ is a holomorphic function $f(z)$ on $\mathfrak{H}$ such that $f(\gamma(z)) = f(z)\, j(\gamma, z)^m$ for all $\gamma \in \Gamma_\lambda$. If $\alpha \in B$ and $\det(\alpha) < 0$, one can define a linear map $(\Gamma_\mu\alpha\Gamma_\lambda)_m : S_m(\Gamma_\lambda) \to S_m(\Gamma_\mu)$ as follows.

Let $\Gamma_\mu\alpha\Gamma_\lambda = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\Gamma_\lambda$ be a disjoint union. Then

$$(\Gamma_\mu\alpha\Gamma_\lambda)_m f = \sum_{i=1}^{e} f(\alpha_i^{-1}(z))\, j(\alpha_i^{-1}, z)^{-m}.$$

For an integral ideal $\mathfrak{a}$ in F, let $T_{\mu\lambda}(\mathfrak{a})_m = \sum (\Gamma_\mu\alpha\Gamma_\lambda)_m$ the sum being taken over all $\Gamma_\mu\alpha\Gamma_\lambda$ such that $\alpha\mathfrak{x}_{\lambda\mu}$ is integral and $N(\alpha\mathfrak{x}_{\lambda\mu}) =$.

It should be observed that λ and $\mathfrak{a}$ determines μ uniquely. Further let $R_{\mu\nu}(\mathfrak{a})_m = (\Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu)_m$ with an element $\beta \in B$ such that $\beta \mathfrak{r}_{\nu\mu} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}_\mu$. Then we let $T(\mathfrak{a})_m$ resp. $R(\mathfrak{a})_m$ denote the linear transformation on

$$S_m = S_m(\Gamma_1) + \ldots + S_m(\Gamma_h)$$

whose restriction to $S_m(\Gamma_\lambda)$ coincides with $T_{\mu\lambda}(\mathfrak{a})_m$ resp. $R_{\mu\lambda}(\mathfrak{a})_m$. Now define a Dirichlet series $D_m(s)$ by

$$D_m(s) = \sum T(\mathfrak{a})_m N(\mathfrak{a})^{-s},$$

where $\mathfrak{a}$ runs over all integral ideals in F. It can be shown that $D_m(s)$ converges for sufficiently large $\mathrm{Re}(s)$ and has an Euler product.

$$D_m(s) = \prod [1 - T(\mathfrak{p})_m N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1} \times$$

$$\times \prod [1 - T(\mathfrak{p})_m N(\mathfrak{p})^{-s} + R(\mathfrak{p})_m N(\mathfrak{p})^{1-2s}]^{-1},$$

where the first product is taken over all the prime ideals $\mathfrak{p}$ ramified in B, and the second over all $\mathfrak{p}$ unramified in B. Moreover, $D_m(s)$ is holomorphically continued to the whole s-plane and satisfies a functional equation [4]:

$$R_m(s) = \Gamma_m(s) D_m(s) = ZY \cdot R_m(2-s) \cdot Y^{-1},$$

$$\Gamma_m(s) = (2\pi)^{-gs} d^{s/2} \Gamma(s)^{g-1} \Gamma(s - 1 + m/2),$$

where Z and Y are certain invertible linear transformations on S_m, and d is a certain integer.

Let (V, φ) be as in Theorem 1. Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal in F, and $\mathfrak{P}$ a prime ideal in $C(F, 1)$ dividing $\mathfrak{P}$. Let us denote by $\mathfrak{P}(V)$ the reduction of V modulo $\mathfrak{P}$, and assume that $\mathfrak{P}(V)$ is a non-singular curve. The zeta function $Z_{\mathfrak{P}}(u)$ of the curve $\mathfrak{P}(V)$, over the residue field mod $\mathfrak{P}$, has the form

$$Z_{\mathfrak{P}}(u) = Z^1_{\mathfrak{P}}(u)/[(1-u)(1 - N(\mathfrak{P})u)],$$

where $Z^1_{\mathfrak{P}}(u)$ is a polynomial in u of degree $2t$, if t denotes the genus of V.

T h e o r e m 3. *The notation being as above, for almost all* $\mathfrak{p}$ *which is unramified in* B, *one has*

$$\prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} Z^1_{\mathfrak{P}}(N(\mathfrak{P})^{-s}) = \det[1 - T(\mathfrak{p})_2 N(\mathfrak{p})^{-s} + R(\mathfrak{p})_2 N(\mathfrak{p})^{1-2s}].$$

It follows that if we define the global zeta function $\zeta(s, V)$ of V, in the sense of Hasse and Weil, by

$$\zeta(s, V) = \prod{}'_{\mathfrak{P}} Z^1_{\mathfrak{P}}(N(\mathfrak{P})^{-s})^{-1},$$

the product being taken over all $\mathfrak{P}$ with good reduction, then $\zeta(s, V)$ differs from det $[D_2(s)]$ only by a finite number of $\mathfrak{p}$-factors. Therefore $\zeta(s, V)$ can be continued holomorphically to the whole s-plane and satisfies a functional equation.

One can attach two types of families of abelian varieties to $\mathfrak{H}/\Gamma(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$ of § 4—5. Let K be a totally imaginary quadratic extension of F and let $\tau_1, \ldots, \tau_g$ be isomorphisms of K into $\mathbf{C}$ such that $\{\tau_1, \ldots, \tau_g, \tau_1\rho, \ldots, \tau_g\rho\}$ is the set of all isomorphisms of K into $\mathbf{C}$, where ρ means complex conjugation. Let $L = B \otimes_F K$. We consider an abelian variety A of the following type.

(I) dim $(A) = 2g$; and there exists an isomorphism θ of K into $\mathrm{End}_{\boldsymbol{Q}}(A)$ such that the analytic representation of $\theta(a)$ is equivalent to $\tau_1 + \tau_1\varrho + 2\sum_{\nu=2}^{g}\tau_\nu$.

(II) dim $(A) = 4g$; and there exists an isomorphism θ of L into $\mathrm{End}_{\boldsymbol{Q}}(A)$ such that the analytic representation of $\theta(a)$ for $a \in K$ is equivalent to $2(\tau_1 + \tau_1\rho) + 4\sum_{\nu=2}^{g}\tau_\nu$.

With a suitable polarization and points of finite order, one obtains a family $\Sigma = \{Q_z \mid z \in \mathfrak{H}\}$ of the type described in § 1, with $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{o}, \mathfrak{c})$. For the families of type (I), one has to assume that B splits over K. Let K' denote the field generated over $\boldsymbol{Q}$ by $\sum_{\nu=2}^{g} x^{\tau_\nu}$ for all $x \in K$. Define the field k as in § 1 for this Σ. It can be shown that $k \subset C(K', \mathfrak{c})$. Here and in the following, we assume that $\mathfrak{c}$ is generated by a rational integer. (The general case can be easily reduced to this case). Take V and φ satisfying (2.1—2) for the present Σ. Let M and z be as in (1.3). Then either $B \otimes_F KM$ or KM is contained in the endomorphism algebra of the special member Q_z according as Q_z is of the above type (II) or (I). In any case Q_z has sufficiently many complex multiplications. The general theory [7] tells us that the field of moduli of Q_z, which coincides with $k(\varphi(z))$ by virtue of (2.3), is an abelian extension E of $K'M$. The nature of the class-field E has been investigated in [3]. Up to this point, we have chosen one K, and constructed (V, φ) with respect to this fixed K. Now there are infinitely many choices of K. The class-field $C(M, \mathfrak{c})$ can be obtained as the intersection of the composite $E \cdot C(K', \mathfrak{c})$ for all K. This fact enables us to apply Weil's criterion to lower the field of definition to $C(F, \mathfrak{c})$, and then to find a new model (V, φ) satisfying (1.1—3). Theorem 2 can be proved by investigating more closely the isogenies between Q_z and its transforms by Frobenius automorphisms of E.

To explain the proof of Theorem 3, let us first define some algebraic correspondenses. Let $\{V_\lambda, \varphi_\lambda\}$ be as in Theorem 2, and let

$$X_{\mu\lambda}(\mathfrak{p}) = \{\varphi_\lambda(z) \times \varphi_\mu(\alpha(z)) \mid z \in \mathfrak{H}\} \subset V_\lambda \times V_\mu,$$
$$Y_{\mu\nu}(\mathfrak{p}) = \{\varphi_\nu(z) \times \varphi_\mu(\beta(z)) \mid z \in \mathfrak{H}\} \subset V_\nu \times V_\mu,$$

with elements α and β of B such that $\alpha\mathfrak{x}_{\lambda\mu}$ is integral and $N(\alpha\mathfrak{x}_{\lambda\mu}) = \mathfrak{p}$, $\beta\mathfrak{x}_{\nu\mu} = \tilde{\mathfrak{p}}\mathfrak{o}_\mu$. Further let $\lambda \rightarrow \lambda'$ be a permutation of $\{1, \ldots, h\}$

such that $N(\mathfrak{x}_\lambda)$ and $N(\mathfrak{x}_\lambda^{-1})$ belong to the same ideal class modulo $\mathfrak{u}$ in F, and let δ_λ be an element of B such that $\delta_\lambda \mathfrak{x}_\lambda = N(\mathfrak{x}_\lambda)\, \mathfrak{x}_{\lambda'}$ (cf. [4, p. 257]). Let

$$U_\lambda = \{\varphi_\lambda(z) \times \varphi_{\lambda'}(\delta_\lambda(z)) \mid z \in \mathfrak{H}\} \subset V_\lambda \times V_{\lambda'}.$$

Then $X_{\mu\lambda}(\mathfrak{p})$, $Y_{\mu\nu}(\mathfrak{p})$ and U_λ are algebraic correspondences, and U_λ is birational. The operators $T_{\mu\lambda}(\mathfrak{p})_2$ and $R_{\mu\nu}(\mathfrak{p})_2$ are nothing but the representations of $X_{\mu\lambda}(\mathfrak{p})$ and $Y_{\mu\nu}(\mathfrak{p})$ by differential forms of the first kind on the curves. Let $\mathfrak{P}$ be a prime ideal in $C(F, 1)$ dividing $\mathfrak{p}$. Denote by tilde the reduction modulo $\mathfrak{P}$. Then one has

$$\widetilde{X}_{\mu\lambda}(\mathfrak{p}) = {}^t\Pi_\mu + \widetilde{U}_\mu^{-1} \circ \Pi_{\lambda'} \circ \widetilde{U}_\lambda, \tag{5.1}$$

$$\widetilde{Y}_{\mu\lambda}(\mathfrak{p}) = \widetilde{U}_\mu^{-1} \circ \widetilde{U}_\lambda^{N(\mathfrak{p})}. \tag{5.2}$$

Here π_λ denotes the locus of $x \times x^{N(\mathfrak{p})}$ on $V_\lambda \times V_\lambda^{N(\mathfrak{p})}$, and ${}^t\pi_\lambda$ its transpose. These congruence relations are obtained from the reciprocity law (2.3). By a simple computation, one can easily derive Theorem 3 from (5.1—2).

REFERENCES

[1] Eichler M., Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion, *Arch. Math.* **5** (1954), 355—366.
[2] Shimura G., Correspondances modulaires et les fonctions ζ de courbes algébriques, *J. Math. Soc. Japan*, **10** (1958), 1—28.
[3] Shimura G., On the class-fields obtained by complex multiplication of abelian varieties, *Osaka Math. J.* **14** (1962), 33—44.
[4] Shimura G., On Dirichlet series and abelian varieties attached to automorphic forms, *Ann. of Math.* **76** (1962), 237—294.
[5] Shimura G., On the field of definition for a field of automorphic functions, I, II, III, *Ann. of Math.* **80** (1964), 160—189, **81** (1965), 124—165, **83** (1966), 377—385.
[6] Shimura G., Moduli and fibre systems of abelian varieties, *Ann. of Math.* **83** (1966), 294—338.
[7] Shimura G., and Taniyama Y., Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory, *Publ. Math. Soc. Japan*, No. **6**, 1961.

R. Steinberg

CLASSES OF ELEMENTS OF SEMISIMPLE ALGEBRAIC GROUPS

If C is a conjugacy class of elements of a semisimple algebraic group G, it is natural to ask for the structure of C and its closure (as an algebraic variety and as a union of conjugacy classes), for a convenient set of regular functions determining this closure, and for a canonical representative for C; and to ask how the various classes fit together to form G. Answers to some of these questions and to some related ones have been obtained for certain classes of elements, e. g. regular and semisimple classes, but for other classes, in particular unipotent ones, very little is known. (We recall that an element is regular if its class has maximal dimension, semisimple if it is diagonalizable, and unipotent if its characteristic values are all 1.) Our aim is to discuss the results so far obtained and the problems yet to be solved.

V. Strassen

DER SATZ MIT DEM ITERIERTEN LOGARITHMUS

Sei X_i die i-te Rademacherfunktion auf [0, 1] und $S_n = \sum_{i \leqslant n} X_i$. Borel's starkes Gesetz der großen Zahl ($S_n = o(n)$ außerhalb einer Menge vom Lebesguemaß 0) eröffnete 1909 eine Folge von Arbeiten von Hausdorff, Hardy—Littlewood, Steinhaus und Khintschin, die 1924 durch Khintschin's brillianten Satz mit dem iterierten Logarithmus abgeschlossen wurde:

$$\overline{\lim}\,(n \log\log n)^{-1/2} S_n = \sqrt{2} \tag{1}$$

außerhalb einer Menge vom Lebesguemaß 0.

Ich möchte hier über einen Teil der seitdem erzielten Fortschritte berichten.

In den ersten beiden Abschnitten werden einige Verschärfungen behandelt, wobei der oben betrachtete diskrete stochastische Prozeß $(S_n)_{n \geqslant 1}$ aus Gründen der leichteren Formulierung durch den kontinuierlichen Prozeß der Brownschen Bewegung $(\zeta(t))_{t \geqslant 0}$ ersetzt wird. Im letzten Abschnitt werden Verallgemeinerungen des zugrundeliegenden Prozesses diskutiert.

1. DER KOLMOGOROV—PETROVSKIJ—ERDÖS TEST

Khintschin's Satz lautet für die Brownsche Bewegung:

$$\overline{\lim}\,(t \log\log t)^{-1/2} \zeta(t) = \sqrt{2} \quad \text{fastsicher,}$$

also

$$\Pr\{\zeta(t) < (ct \log\log t)^{1/2} \text{ schließlich für } t \to \infty\} = 0 \text{ oder } 1,$$

je nachdem $c < 2$ oder $c > 2$. Sehr viel weiter geht der Kolmogorov — Petrovskij — Erdös Test (Kolmogorov's Beweis ist nicht veröffentlicht, Petrovskij [16], Erdös [5], Feller [6], Motoo [15]):

Sei φ: $R^+ \to R^+$ stetig und so, daß $t^{-1/2}\varphi(t)$ mit t wächst. Dann ist

$$\Pr\{\zeta(t) < \varphi(t) \text{ schließlich für } t \to \infty\} = 0 \text{ oder } 1,$$

je nachdem

$$\int_1^\infty t^{-3/2} \varphi e^{-\varphi^2/(2t)}\, dt = \infty \text{ oder } < \infty. \tag{2}$$

Man hat heute eine Reihe von 0-1-Kriterien ähnlicher Bauart für die Brownsche Bewegung in einer oder in mehreren Dimensionen. Hierzu sei auf Itô — McKean [11] verwiesen (S. 33—38, 161—164, 255—261, 266—269; siehe auch Chung [3], Barndorff-Nielsen [1], Shepp [17], V, 19). Konvergiert (2), so ist fastsicher schließlich $\zeta < \varphi$, von welcher Stelle an, hängt natürlich vom Zufall ab. Sei

$$T_\varphi = \sup \{t : \zeta(t) \geqslant \varphi(t)\}.$$

P. Lévy [14], S. 271—276 erhält eine Reihe von oberen Abschätzungen für $\Pr\{T_\varphi > s\}$, die sich als Spezialfälle der eleganten Ungleichung

$$\Pr\{T_\varphi > s\} \leqslant 2 \int_s^\infty (2\pi t^3)^{-1/2} \varphi e^{-\varphi^2/(2t)}\, dt$$

in Itô — McKean [11], S. 34 erweisen (gültig unter einer zusätzlichen Monotoniebedingung an φ).

Ist nun φ sogar stetig differenzierbar mit

$$\varphi'(s) \sim \varphi'(t) \text{ für } s \sim t, \quad t \to \infty,$$

und ist fastsicher $T_\varphi < \infty$, so hat T_φ außerhalb 0 eine stetige Dichte D_φ und es gilt

$$D_\varphi(t) \sim \varphi'(t)\,(2\pi t)^{-1/2} e^{-\varphi(t)^2/(2t)} \text{ für } t \to \infty \tag{3}$$

([21], Theorem 3.6). Innerhalb der zugelassenen Funktionenklasse haben übrigens φ' und φ/t die gleiche Größenordnung, so daß man den Integranden in (2) auch durch die rechte Seite von (3) ersetzen kann. (3) liefert dann eine einfache wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung (und einen neuen Beweis) für den Kolmogorov — Petrovskij — Erdös Test. Ein Beispiel für (3):

$$D_{(ct \log\log t)^{1/2}} \sim \left(\frac{c \log\log t}{8\pi}\right)^{1/2} t^{-1} (\log t)^{-c/2}, \tag{4}$$

wenn $c > 2$.

2. DAS VERHALTEN DER GANZEN PFADE

Sei C der Banachraum der stetigen Funktionen x auf $[0, 1]$ mit $x(0) = 0$, und für $t \geqslant 0$ sei ζ_t die durch

$$\zeta_t(s) = \zeta(st) \quad (s \in [0, 1])$$

definierte Zufallsvariable mit Werten in C. ζ_t spiegelt das Verhalten von ζ bis zum Zeitpunkt t wieder. Khintschin's Satz kann (unwesentlich verschärft) so formuliert werden: Fastsicher ist $(t \log\log t)^{-1/2} \zeta_t(1)$ für $t \to \infty$ beschränkt und die Menge seiner Limespunkte ist $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Eine analoge Aussage läßt sich für die ζ_t als ganze machen ([19], Corollary 1, siehe auch Chover [2]): Fastsicher ist das Netz

$$((t \log \log t)^{-1/2} \zeta_t)_{t>e}$$

relativ normkompakt, und die Menge seiner Normlimespunkte für $t \to \infty$ ist

$$\left\{x : x \in C, \ x \text{ ist absolutstetig}, \ \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 \, d\mu \leqslant 1\right\}$$

(wobei μ das Lebesguemaß in $[0, 1]$ ist), besteht also aus genau den $x \in C$ mit "mittlerer kinetischer Energie $\leqslant 1$".

Dieses Ergebnis verhält sich zu Khintschin's Satz ähnlich wie Donsker's Invarianzprinzip [4] zum zentralen Grenzwertsatz (die für den Fall der Brownschen Bewegung allerdings trivial sind). Ebenso wie dort ergeben sich auch hier zahlreiche Folgerungen durch Anwenden von geeigneten Funktionalen, z.B. eine Art Gegenstück zu (4) für $c \leqslant 2$:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \mu \{s : s \in [0, t], \quad \zeta(s) > (cs \log \log s)^{1/2}\} =$$

$$= 1 - \exp\left\{-4\left(\frac{2}{c} - 1\right)\right\} \quad \text{fastsicher}$$

([19], S. 223. Erdös [5], S. 434 hat schon bemerkt, daß die linke Seite fastsicher eine gewisse stetige, strikt monoton von 1 nach 0 fallende Funktion von $c \in [0, 2]$ ist, vgl. auch P. Lévy [14], S. 268—271). Oder ein Resultat, das kürzlich in etwas anderer Gestalt von Gaposchkin für Summen unabhängiger Zufallsvariablen bewiesen wurde ([9], Theorem 3):

$$\lim_{a \downarrow 0} a^{3/2} \left(\log \log \frac{1}{a}\right)^{-1/2} \int_0^\infty \zeta(s)\, e^{-as}\, ds = 1 \quad \text{fastsicher}$$

(die linke Seite ist fastsicher

$$= \lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{a \downarrow 0}}\, a^{3/2} \left(\log \log \frac{1}{a}\right)^{-1/2} \int_0^{n/a} \zeta(s)\, e^{-as}\, ds =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{3/2}\, \overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^1 (t \log \log t)^{-1/2} \zeta_t(s)\, e^{-ns}\, ds,$$

so daß man [19], S. 218 (ii) anwenden kann). Für andere Beispiele siehe [19].

Es liegt nahe, nach einer Verallgemeinerung des Kolmogorov — Petrovskij — Erdös Test's für das Verhalten der ganzen Pfade zu fragen. Vielleicht ist die folgende Problemstellung nützlich:

Sei für jedes $t > 0$ $V_t \subset C$ offen und konvex so, daß $t^{-1/2}V_t \uparrow C$ (monoton), und sei

$$v_t = \inf \left\{ \left(\int_0^1 x^2 \, d\mu \right)^{1/2} : x \in C - V_t \right\}.$$

Welche zusätzlichen Bedingungen sind an die V_t zu stellen, damit:

$$\Pr\{\zeta_t \in V_t \text{ schließlich für } t \to \infty\} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^\infty t^{-3/2} v_t e^{-v_t^2/(2t)} \, dt < \infty?$$

3. ÜBERTRAGUNG AUF ANDERE PROZESSE

Kolmogorov [13] verallgemeinert Khintschin's Satz auf eine große Klasse von Prozessen $(S_n)_{n \geq 1}$ mit $S_n = \sum_{i \leq n} X_i$ und unabhängigen X_i, und P.Lévy überträgt diese Ergebnisse auf Martingale (siehe [14], S. 258—268).

Im Falle unabhängiger, identisch verteilter X_i zeigen Hartman—Wintner [10] etwas schärfer, daß $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$ für (1) hinreicht. Diese Bedingung ist auch notwendig, wenn man (1) durch

$$\underline{\lim} \, (n \log \log n)^{-1/2} S_n = -\sqrt{2} \quad \text{fastsicher}$$

ergänzt ([20], Corollary). Dagegen gibt es (D. Freedman, siehe [20]) unabhängige, identisch verteilte symmetrische X_i mit unendlicher Varianz und positive Konstante c_n so, daß

$$\overline{\lim} \; c_n^{-1} \; S_n = 1 \text{ fastsicher,}$$

Feller [6] und [7] dehnt den Kolmogorov—Petrovskij—Erdös Test auf sehr allgemeine Klassen von Prozessen $(S_n)_{n \geq 1}$ mit unabhängigen X_i aus, wo die S_n nicht einmal mehr asymptotisch normal zu sein brauchen.

In [19] und [21] werden die Ergebnisse der vorangehenden beiden Abschnitte mit Hilfe von Fastüberall-Invarianzprinzipien verallgemeinert. Diese sind fastsichere Gegenstücke zum Erdös—Kac—Donskerschen Verteilungsinvarianzprinzip (unter einem anderen Aspekt betrachtet als in Abschnitt 2). Ihr Beweis beruht auf einem wichtigen Satz von Skorokhod ([18], Theorem auf S. 163). Als Beispiel zitieren wir Theorem 1.3 (4.4) in [21] (ein Spezialfall hiervon stammt von Dubins und Freedman).

Sei $S_n = \sum_{i \leq n} X_i$ ein quadratisch integrierbares Martingale. Fastsicher gelte

$$V_n = \sum_{i \leq n} E(X_i^2 \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) \uparrow \infty$$

für $n \uparrow \infty$ und

$$\sum_{n \geqslant 1} f(V_n)^{-1} \int_{x^2 > f(V_n)} x^2 d \Pr\{X_n \leqslant x \mid X_1, \ldots, X_{n-1}\} < \infty,$$

wobei $f: R^+ \rightarrow R^+$ monoton wächst, aber schwächer als die identische Abbildung. Ist dann der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum reichhaltig genug, so gibt es eine Brownsche Bewegung ζ mit

$$S_n = \zeta(V_n) + o\left((V_n f(V_n))^{1/4} \log V_n\right) \quad \text{fastsicher.}$$

Dies gestattet es leicht, den Kolmogorov—Petrovskij—Erdös Test und die Ergebnisse von Abschnitt 2 (auch z. B. das Resultat von Chung [3] und eine Version von Shepp's Dichotomie [17], V, 19) auf Martingale zu übertragen unter Bedingungen, die für Summen unabhängiger Zufallsvariablen kaum schärfer sind als Feller's Bedingung auf S. 399 von [6]. Es wäre interessant, fastsichere Invarianzprinzipien für Prozesse zu finden, die nicht asymptotisch normal sind.

Freedman [8] überträgt Abschnitt 2 auf Funktionale von Markoffschen Ketten.

Auch (3) kann mit einigen Abstrichen durch ein geeignetes Invarianzprinzip verallgemeinert werden ([21] Theorem 4.8 und Corollary 4.9), und zwar auf Irrfahrten mit endlicher erzeugender Funktion in einer Umgebung von 0.

LITERATUR

[1] Barndorff-Nielsen O., On the rate of growth of the partial maxima of a sequence of independent identically distributed random variables. *Math. Scand.* **9** 383—394 (1961).

[2] Chover J., On Strassen's version of the loglog law. Vervielfältigt am Department of Mathematics, University of Wisconsin, Madison (1966).

[3] Chung K. L., On the maximal partial sum of sequences of independent random variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* **64**, 205—233 (1948).

[4] Donsker M. D., An invariance principle for certain probability limit theorems. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **6**, 1—12 (1951).

[5] Erdös P., On the law of the iterated logarithm. *Annals of Mathematics* **43**, 419—436 (1942).

[6] Feller W., The general form of the so-called law of the iterated logarithm. *Trans. Amer. Math. Soc.* **54**, 373—402 (1943).

[7] Feller W., The law of the iterated logarithm for identically distributed random variables. *Ann. of Math.*, II, *Ser.*, **47**, 631—638 (1946).

[8] Freedman D., Some invariance principles for functionals of a Markov Chain. Vervielfältigt am Department of Statistics, University of California, Berkeley (1965).

[9] Gaposchkin V. F., Der Satz mit dem iterierten Logarithmus für Cesaro's und Abel's Summationsmethode (russisch). *Teoria Verojatnostei i ee Primenenia* **X**, **3**, 449—459 (1965).

[10] Hartman P., Wintner A., On the law of the iterated logarithm. *Amer. J. Math.* **63**, 169—176 (1941).

[11] Itô K., McKean H. P., Diffusion Processes and their Sample Paths. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band **125**, Berlin 1965.

[12] Khintchin A., Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Fund. Math.* **6**, 9—20 (1924).

[13] Kolmogorov A., Das Gesetz des iterierten Logarithmus. *Math. Annalen* **101**, 126—135 (1929).
[14] Lévy P., Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires. Gauthiers-Villars, Paris 1954.
[15] Motoo M., Proof of the law of the iterated logarithm through diffusion equation. *Ann. Inst. Statist. Math.* **10**, 21—28 (1959).
[16] Petrovskij I., Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung. *Compositio Math.* **1**, 383—419 (1935).
[17] Shepp L. A., Radon-Nikodym derivatives of Gaussian measures. Vervielfältigt an den Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, New Jersey (1965).
[18] Skorokhod A. B., Research on the Theory of Random Processes (Russian). Kiew 1961.
[19] Strassen V., An invariance principle for the law of the iterated logarithm. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie* **3**, 211—226 (1964).
[20] Strassen V., A converse to the law of the iterated logarithm. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie* **4**, 265—268 (1966).
[21] Strassen V., Almost sure behaviour of sums of independent random variables and martingales. Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1965.

J. T. Stuart

HYDRODYNAMIC STABILITY AT FINITE AMPLITUDES AND ITS RELATION TO TRANSITION TO TURBULENCE

In hydrodynamic stability, nonlinear problems of partial differential equations have occurred in at least two forms. These are exemplified by the classic prototype configurations of (i) the boundary-layer fluid flow on a flat plate, and (ii) the fluid flow between two long concentric rotating circular cylinders (or, with some similarity, the thermal convection between parallel planes). In the former case (i) we are concerned with the spatial development of (random, three-dimensional) turbulence from initially-regular waves, and attention has been focussed on simple mathematical models (in the form of partial differential equations) of isolated parts of this complex process. In the latter case (ii), on the other hand, there are more-conventional problems of bifurcation; as a parameter is varied, the stable solution of the partial differential system may change abruptly from one form to another at critical values of the parameter. Calculations have been made of these critical values and of the neighbouring solutions of the differential system.

In each of these two basic cases a summary will be presented of the present stage of the theory, and of its relevance to experiment.

K. Urbanik

INFORMATION AND THERMODYNAMICS

The ordinary formalism of quantum theory may be described in hurried outline as follows. To every physical system there corresponds a Hilbert space $\mathscr{H}$. All elements ψ belonging to the unit sphere of $\mathscr{H}$

are called microstates of the physical system. Further, to every physical quantity or observable there corresponds a self-adjoint (not necessarily bounded) linear operator in $\mathcal{H}$. Let $\boldsymbol{A}$ be an operator corresponding to an observable and let $\boldsymbol{A} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda Q_K(\Delta\lambda)$ be its spectral decomposition. It should be noted that the projector-valued spectral measure Q_A defined on Borel subsets of the real line is uniquely determined. The fundamental statistical law of quantum theory states that the formula $p_A^{\psi}(E) = (Q_A(E)\psi, \psi)$ gives the probability that a measurement at a microstate ψ of the observable corresponding to the operator $\boldsymbol{A}$ will lie in the set E. The mean value of the observable $\boldsymbol{A}$ at a microstate ψ, i.e., the integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda p_A^{\psi}(d\lambda)$, will be denoted by $m_A(\psi)$, provided that it exists. Further, the entropy $s_A(\psi)$ of $\boldsymbol{A}$ at the microstate ψ is defined by the formula

$$s_A(\psi) = \sup\left(-\sum_{k=1}^{n} p_A^{\psi}(E_k)\log p_A^{\psi}(E_k)\right),$$

where the supremum is extended over all finite decomposition of the real line into Borel sets $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

We shall now quote some basic notions of macrophysics introduced in [2]. Two microstates φ and ψ are said to be equivalent with respect to the observable $\boldsymbol{A}$, in symbols $\varphi \tilde{A} \psi$, if $m_A(\varphi) = m_A(\psi)$. The relation $\tilde{A}$ divides the set of all microstates in which $\boldsymbol{A}$ has finite mean value into disjoint classes. These classes will be called macrostates with respect to $\boldsymbol{A}$ or shortly macrostates and denoted by capital Greek letters $\Phi, \Psi, \ldots$ The macrostate containing a microstate φ will be also denoted by $[\varphi]$. The mean value $M_A(\Phi)$ of the observable $\boldsymbol{A}$ at the macrostate is defined as the common value $m_A(\varphi)$ for all microstates φ belonging to Φ. In order to define the entropy $S_A(\Phi)$ of $\boldsymbol{A}$ at the macrostate Φ we apply the principle of maximum uncertainty formulated by Jaynes ([3]). According to this principle we define $S(\Phi)$ as the maximal uncertainty concerning $\boldsymbol{A}$ when the mean value $M_A(\Phi)$ is known. More precisely, we put $S_A(\Phi) = \sup\{s_A(\varphi) : \varphi \in \Phi\}$. It was proved in [2] that the entropy $S_A(\Phi)$ is finite at every macrostate Φ if and only if the spectrum of $\boldsymbol{A}$ is discrete and if there exists a real constant c such that $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \exp(c\lambda_k) < \infty$, where $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ are proper values of the operator $\boldsymbol{A}$. Each operator $\boldsymbol{A}$ satisfying the last condition is called thermodynamically regular. The class of thermodynamically regular operators is the largest class of operators for which the generalized thermodynamics can be developed. In what follows we shall consider only thermodynamically regular operators.

In analogy to the usual thermodynamics we define a generalized temperature $T_A(\Phi)$ corresponding to the observable $\boldsymbol{A}$ at the macrostate Φ by the formula $T_A(\Phi) = \left[\frac{dS_A(\Phi)}{dM_A(\Phi)}\right]^{-1}$. This definition is justified by the remark that the entropy $S_A(\Phi)$ is a differentiable function of the mean value $M_A(\Phi)$ (see [2]). We note that if A is the total energy operator, then the generalized temperature coincides up to the Boltzmann constant with the usual temperature expressed in the Kelvin scale. One can prove the relation $S_A(\Phi) \to 0$, whenever, $T_A(\Phi) \to 0$, which can be regarded as the Third Law of Thermodynamics for arbitrary thermodynamically regular operators.

The evolution of the physical system in time brings about a systematic and continuous change of microstates. This change is determined by the equation $\psi(t) = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}H\right)\psi$ $(t \geqslant 0)$, which may be written in differential form as the Schrödinger equation of the motion $i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = H\psi(t)$ with the initial condition $\psi(0) = \psi$. Here H is the Hamiltonian operator, i.e., the total energy operator for the system in question and $\hbar$ is an abbreviation for Planck's constant divided by 2π. In what follows we assume that the Hamiltonian does not depend on the time t, i.e., the system is conservative. The entropy in evolving physical systems was discussed in [4]. Since, in general, macrostates with respect to operators non-commuting with the Hamiltonian branch out during the motion of the system, it was necessary to introduce the concept of the entropy at an instant t for a macrostate Φ, in symbols $S_A^t(\Phi)$. According to Jaynes principle $S_A^t(\Phi)$ is defined to be the maximal uncertainty at time t concerning $\boldsymbol{A}$ when the initial mean value $M_A(\Phi)$ is known, i.e.

$$S_A^t(\Phi) = \sup\{S_A([\varphi(t)]) : \varphi(0) \in \Phi\}.$$

The following theorem can be proved ([4], [5]).

Principle of increase of entropy. *For any operator $\boldsymbol{A}$, any motion of the system and any macrostate Φ the inequality $S_A^t(\Phi) \geqslant S_A(\Phi)$ $(t \geqslant 0)$ holds. Moreover, the equation $S_A^t(\Phi) = S_A(\Phi)$ holds for all macrostates Φ and $t \geqslant 0$ if and only if the operator $\boldsymbol{A}$ commutes with the Hamiltonian.*

This theorem can be regarded as an analogue of the Second Law of Thermodynamics ([1]).

REFERENCES

[1] ter Haar D., Foundations of statistical mechanics, *Rev. of Modern Physics*, **27**, 289—338 (1955).

[2] Ingarden R. S., Urbanik K., Quantum informational thermodynamics, *Acta Physca Polonica*, **21**, 281—304 (1962).

[3] J a y n e s E. T., Information theory and statistical mechanics, *Phys. Rev.*, **106**, 620—630 (1957).
[4] U r b a n i k K., The principle of increase of entropy in quantum mechanics, Transactions of the Third Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Prague (1964), 743—764.
[5] U r b a n i k K., The principle of increase of entropy, *Bulletin de l'Acad. Polon. Sci.*, Serie des sci. math., astr. et phys. (1966) (in print).

R. L. V a u g h t

MODEL THEORY AND SET THEORY

Some results and problems in model theory will be discussed which lie near the borderline of model theory and set theory.

N o t a t i o n: k, λ, μ denote infinite cardinals; α, β ordinals. A relational structure $\mathfrak{M}=\langle M, U^{\mathfrak{M}}, R_n^{\mathfrak{M}}\rangle_{n<\omega}$ (U unary) has type $\langle k, \lambda\rangle$ if $\overline{\overline{M}}=k$ and $\overline{\overline{U^{\mathfrak{M}}}}=\lambda$. $k,\lambda\Rightarrow k',\lambda'$, means that any countable set of elementary sentences having a model of type $\langle k, \lambda\rangle$ also has a model of type $\langle k', \lambda'\rangle$. The language Q_k is obtained from the elementary language by adding a new quantifier Qx meaning "there are at least k x such that". $k\to\lambda$ means that any countable set of Q-sentences having a Q_k-model also has a Q_λ-model. The Hanf number $\nu_\lambda\ L$ of a language L is the smallest μ such that, for any set Σ of fewer than λ L-sentences, if Σ has a model of power $\geqslant\mu$, then Σ has arbitrarily large models. An order $\langle X, <\rangle$ is k-like if $\overline{\overline{X}}=k$, but, for each $x\in X$, $\overline{\overline{\{y : y<x\}}}<k$. Unmarked references can be found in [1]. References marked [2] are all to abstracts in Notices, American Mathematical Society, 1964—6. To simplify, we adopt henceforth the *GCH*.

T h e o r e m 1. (MacDowell and Specker) *Let $\mathfrak{P}'$ be any theory extending the usual elementary version $\mathfrak{P}$ of Peano's arithmetic by having, in addition to $<$, $+$, and $\cdot$, predicates $R_n\,(n<\omega)$ which are allowed in the induction scheme. Every model $\mathfrak{M}$ of $\mathfrak{P}'$ has an elementary "end" extension $\mathfrak{M}'$ ("end" means that $x\in M$ and $y\in M'-M$ imply $x<y$).*

T h e o r e m 2. (a) (R. Robinson) $\omega_{\alpha+n},\ \omega_\alpha \not\Rightarrow \omega_{\beta+n+1},\ \omega_\beta$. (b) (Vaught) *If $k>\lambda$, then $k,\lambda\Rightarrow\omega_1,\omega$.* (c) (Chang-Keisler) k, $\lambda\Rightarrow$ $\Rightarrow k', \lambda'$ *if $k\geqslant k'\geqslant\lambda'\geqslant\lambda$.* (d) (Chang) k, $\lambda\Rightarrow\mu^+$, μ *if $k>\lambda$, $\mu>\omega$, μ regular.* (e) (Vaught) $\omega_{\alpha+\omega},\ \omega_\alpha\Rightarrow\lambda,\ \mu$.

It is conjectured that, in general, $\omega_{\alpha+n},\ \omega_\alpha\Rightarrow\omega_{\beta+n},\ \omega_\beta$.

The author's proof of (e) has various further consequences, e.g.: (e') $\omega_\omega,\ \omega_1,\ \omega\Rightarrow k,\ \omega_1,\ \omega$; ($e''$) $\omega_{\alpha_0}, \ldots, \omega_{\alpha_n}\Rightarrow k_0, \ldots, k_n$, if each $\alpha_i\geqslant\alpha_{i+1}+\omega$. Morley found a different proof of (e).

Fuhrken discovered that various model-theoretic questions about the languages Q can be reduced to simpler questions by means of two normal form theorems which he established. These say, roughly, that a set Σ' of Q-sentences has a Q_{k^+}-model (a Q_λ-model) iff a related set Σ' of elementary sentences has a model of type $\langle k^+, k\rangle$ (a λ-like model). Fuhrken established the following theorem, by using his normal form theorems plus 2 (b) and 2 (d) for 3 (b), 1 (for 3 (d)), and a new result (*) (for 3 (c)).

Theorem 3. (a) *$k \not\rightarrow \lambda$ if k is singular, λ not; or if k is a successor cardinal, λ not; or if $k \neq \omega$, $\lambda = \omega$.* (b) *$k^+ \rightarrow \lambda^+$ if λ is regular.* (c) *$k \rightarrow \omega_1$ if k is inaccessible.* (d) *$\omega \rightarrow k$.*

Fuhrken has conjectured that $k \rightarrow \lambda$ holds in all cases not blocked by 3 (a). Recently some more cases of this conjecture have been established:

Theorem 3. (e) (Helling [2]) *$k \rightarrow \lambda$ if $\lambda \neq \omega$ and k is weakly compact.* (f) (Silver [2]) *$k \rightarrow \lambda$ if k is inaccessible and λ singular.*

Call L complete if its valid sentences are r. e. (recursively enumerable); ω-compact if a countable set of L-sentences has a model if all its finite subsets do. Using ultraproducts, Fuhrken showed that Q_k is ω-compact if $k \notin \mathscr{C}_\omega = \{\lambda\colon \text{cf } \lambda = \omega\} \cup \{\lambda^+\colon \text{cf } \lambda = \omega\}$. From the proof of 2 (b) and his normal form theorem, Fuhrken inferred that Q_{ω_1} is ω-compact. In the same way, the author inferred that Q_{ω_1} is complete (and hence by 2 (d), so is any Q_{k^+}, if k is regular). An intermediate step is that the set T of all elementary sentences true in all models of type $\langle\omega_1, \omega\rangle$ is r. e. Keisler [2] has recently given an explicit set of axioms for T. For most cases not discussed above, it is unknown whether Q_k is ω-compact or complete.

Recently Keisler [2] has obtained some nice results which include a strengthening of 2 (b) and (*) (or 3 (c)). Let $Q_{k,\lambda}$ be the language having two new quantifiers Q and Q', interpreted as Q_k and Q_λ, respectively. By Fuhrken's normal form theorems, Keisler's results imply, in particular:

Theorem 4. *If a countable set Σ of Q, Q'-sentences has a $Q_{k,\omega}$-model, where $k \neq \omega$ and k is regular, then Σ has a $Q_{\omega_1,\omega}$-model.*

Keisler's proof is not related to the old proofs of 2 (b) and (*), but rather, is related to the proof of 1.

By using stronger forms of 2 (e), such as 2 (e′), the author established:

Theorem 5. (a) $\nu_\omega Q_{\omega_1} = \nu_{\omega_1} Q_{\omega_1} = \omega_\omega$. (b) *If $k = \omega_\alpha \notin \mathscr{C}_\omega$, then* $\nu_\omega Q_k = \nu_k + Q_k = \omega_{\alpha+\omega}$.

Morley discovered a powerful method for obtaining Hanf numbers, which uses a transfinite version of Ramsey's Theorem due to Erdös and Rado. For example:

Theorem 6. (Morley) $\nu_{\omega_1} Q_\omega = \omega_{\omega_1}$.

Further results on Hanf numbers were obtained from Morley's results or method of proof by Morley himself, Helling, and others. For a summary of these results and related open problems, see [1].

Recently, Silver [2] has obtained detailed information about the Hanf number of the very strong β-language (in which $<$ always denotes a well-ordering).

REFERENCE

[1] Vaught R., The Lövenheim — Skolem Theorem, Proc. 1964 Int'l Congress for Logic. etc., held in Jerusalem, pp. 81—89.

E. Vesentini

RIGIDITY OF QUOTIENTS OF BOUNDED SYMMETRIC DOMAINS

The aim of this lecture is to give a summary of recent results concerning the rigidity of quotients of bounded symmetric domains.

The following topics will be discussed:

1. Curvature properties of the Bergman metric of a bounded symmetric domain.
2. Holomorphic families of quotients of bounded domains by properly discontinuous subgroups of automorphisms.
3. Differentiable families of compact quotients of bounded symmetric domains.
4. Differentiable families, rigid at infinity, of quotients by pseudoconcave groups.

Ch. T. C. Wall

HOMEORMOPHISM AND DIFFEMORPHISM CLASSIFICATIONS OF MANIFOLDS

Four related problems will be discussed: the problem of classification by diffeomorphism of compact smooth manifolds, by *PL*-homeomorphism of compact *PL*-manifolds, by homeomorphism of compact manifolds, and by homotopy equivalence of Poincaré complexes and pairs (a Poincaré complex is a *CW* complex, dominated by a finite one, which satisfies Poincaré duality; a Poincaré pair satisfies Lefschetz duality). There are corresponding bundle theories with (stable) structure groups and monoid *O*, *PL*, Top, *G*: stable normal bundles exist and are unique. A technique of Novikov and Browder may be phrased as follows: given a Poincaré complex (or pair), and a reduction of the group of its stable normal bundle from *G* to *O* or *PL*, we can use surgery to study the problems of existence and classification of corresponding smooth or *PL*-manifolds. Only the *PL*-case (which is simpler) need be discussed in detail, since Hirsch and Masur have shown that equivalence classes of compatible smoothings on a PL-manifold correspond bijectively to classes of reductions of the group of its stable normal bundle from PL to O. To pass from Poincaré complexes to PL-manifolds we must study $\pi_i(G, PL)$: this vanishes if i is odd, is infinite cyclic if $i \equiv 0 \pmod 4$ and of order 2 if $i \equiv 2 \pmod 4$. There is a close relation between these groups and the Kervaire — Milnor surgery obstructions, which throws further light on G/PL. The non simply-connected case will also be discussed. The homeomorphism problem is sandwiched between the last two: also, Novikov has given a proof of topological invariance of Pontrjagin classes which can be sharpened to show that $\pi_n(G, PL) \to \pi_n(G, \mathrm{Top})$ is a split monomorphism. Applications of this to the Hauptvermutung have been given by Sullivan and Wagoner. These techniques reduce the first three problems to the fourth. This can be studied directly in low dimensions $\neq 2$ by standard homotopy theory. In higher dimensions it is necessary to develop new techniques, and it is found that Poincaré complexes can be treated very much like smooth manifolds. For example, surgery can be performed and handle decompositions constructed.

J. H. Wilkinson

A PRIORI ERROR ANALYSIS OF ALGEBRAIC PROCESSES

INTRODUCTION

Modern error analysis of matrix processes may be said to have started with the work of Goldstine and von Neumann in their analysis of the fixed-point elimination of a positive definite matrix [2, 4]. Since then a considerable number of analyses of algorithms for the inversion of matrices and the calculation of eigensystems have been made covering both fixed-point and floating-point computation. The stage has now been reached at which this work may be reviewed as a whole and the significance of a priori analyses reassessed.

1. MATHEMATICAL PROPERTIES OF CHOLESKY FACTORIZATION

As an example of the general type of analysis we have in mind we reconsider the Cholesky factorization of a positive definite matrix using floating-point arithmetic without accumulation of inner-products. The result proved here has been well known to the author for several years and I have quoted it from time to time but there does not appear to be an explicit proof in the literature.

We consider first the simple mathematical properties of the factorization. Let $A^{(1)}$ be a positive definite matrix of order n and $L^{(1)}$ its Cholesky factor. Writing

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_1^T \\ a_1 & A^{(2)} \end{bmatrix}, \quad L^{(1)}=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_1 & L^{(2)} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

we have

$$l_{11}^{(2)} = a_{11}^{(2)}, \quad l_{11} l_1 = a_1, \quad l_1 l_1^T + L^{(2)} (L^{(2)})^T = A^{(2} \tag{1.2}$$

and we may define $B^{(2)}$ by the relation

$$B^{(2)} = L^{(2)} (L^{(2)})^T = A^{(2)} - l_1 l_1^T. \tag{1.3}$$

Theorem 1. *$B^{(2)}$ is positive definite and*

$$\| B^{(2)} \|_2 \leqslant \| A^{(2)} \|_2 \leqslant \| A^{(1)} \|_2,$$

$$\| l_1 l_1^T \|_2 = \| l_1 \|_2^2 = \| a_1 \|_2^2 / a_{11}^{(1)} \leqslant \| A^{(2)} \|_2 \leqslant \| A^{(1)} \|_2.$$

The final inequality in each group is an immediate consequence of the classical separation theorem for symmetric matrices.

If we assume that $B^{(2)}$ is not positive definite then there exists an $x \neq 0$ such that

$$x^T B_x^{(2)} \leqslant 0, \tag{1.4}$$

giving

$$x^T A^{(2)} x - x^T l_1 l_1^T x = x^T A^{(2)} x - (a_1^T x)^2 / a_{11}^{(1)} \leqslant 0. \tag{1.5}$$

Taking $y^T = (\alpha x^T)$ we have

$$y^T A^{(1)} y = a_{11}^{(1)} \alpha^2 + 2\alpha (a_1^T x) + x^{T\prime} A^{(2)} x. \tag{1.6}$$

With $\alpha = -(a_1^T x) / a_{11}^{(1)}$ this gives

$$y^T A^{(1)} y = -(a_1^T x)^2 / a_{11}^{(1)} + x^T A^{(2)} x \leqslant 0 \tag{1.7}$$

by (1.5), contradicting the positive definiteness of $A^{(1)}$, and hence the hypothesis that $B^{(2)}$ is not positive definite is false.

Now for any z we have

$$z^T B^{(2)} z = z^T A^{(2)} z - (l_1^T z)^2 \leqslant z^T A^{(2)} z. \tag{1.8}$$

Hence $\| B^{(2)} \|_2 \leqslant \| A^{(2)} \|_2$. Finally if x is defined by

$$x = l_1 / \| l_1 \|_2 \qquad (\| x \|_2 = 1) \tag{1.9}$$

then $x^T B^{(2)} x = x^T A^{(2)} x - \| l_1 \|_2^2 \leqslant \| A^{(2)} \|_2 - \| l_1 \|_2^2$

giving

$$\| l_1 \|_2^2 \leqslant \| A^{(2)} \|_2 - x^T B^{(2)} x \leqslant \| A^{(2)} \|_2 \tag{1.10}$$

since $B^{(2)}$ is positive definite.

We observe that the Cholesky decomposition of $A^{(1)}$ of order n consists of

(i) The determination of the first column of $L^{(1)}$.

(ii) The Cholesky decomposition of the matrix $B^{(2)}$ of order $(n-1)$.

In the same way after finding the first column of $L^{(2)}$ we required the Cholesky decomposition of a matrix $B^{(3)}$ of order $(n-2)$, etc.

2. ERRORS IN FLOATING-POINT ARITHMETIC

We shall make certain assumptions about the rounding errors made in the basic operations. These differ a little from one computer to another [10] but not in such a way as to alter materially any of our results. Specifically we assume

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{fl}\ (a \pm b) &= a(1+\varepsilon_1) \pm b(1+\varepsilon_2), \\ \mathrm{fl}\ (a \times b) &= ab(1+\varepsilon_3). \\ \mathrm{fl}\ (a/b) &= a(1+\varepsilon_4)/b, \end{aligned}\right\} \ |\varepsilon_i| \leqslant 2^{-t} \qquad (2.1)$$

where a mantissa of t binary digits is used. The notation fl $(a + b)$ etc. denotes the result of adding two floating-point numbers a and b using standard floating point arithmetic.

An analysis of repeated additions, multiplications etc. leads to bounds involving terms of the type $(1 \pm 2^{-t})^r$ which are somewhat inconvenient. If $r2^{-t} < 0.1$ it is easy to show that

$$(1+2^{-t})^r < 1+(1.06)\,r2^{-t} = 1+r2^{-t_1}, \qquad (2.2)$$

$$(1-2^{-t})^r > 1-(1.06)\,r2^{-t} = 1-r2^{-t_1} \qquad (2.3)$$

where $t_1 = t - \log_2(1.06)$.
Notice that t_1 is only marginally different from t. In practice storage considerations and time limitations always ensure that the restriction on r is met in any case.

The only other error bound we shall require is that for the square root. This bound depends to some extent on the procedure which is used; we shall assume that if

$$x = \mathrm{fl}\ (\mathrm{sqrt}\, a) \qquad (2.4)$$

then

$$x^2 = a(1+\varepsilon) \text{ with } |\varepsilon| \leqslant 2 \cdot 2^{-t_1}. \qquad (2.5)$$

This result is not critical in our analysis.

3. THE PRACTICAL CHOLESKY PROSESS

We now turn to the computational process itself. For simplicity l_{ij}, $b_{ij}^{(2)}$ will be used to denote the actual computed quantities. No confusion need arise because we do not compare these quantities with those arising in the exact Cholesky factorization of $A^{(1)}$. The elements of $L^{(1)}$ may be determined column by column the relevant equations being

$$l_{jj} = \mathrm{fl}\ [\mathrm{sqrt}\ (a_{jj}^{(1)} - l_{j1}l_{j1} - l_{j2}l_{j2} - \ldots - l_{j,j-1}\, l_{j,j-1})], \qquad (3.1)$$

$$l_{ij} = \mathrm{fl}\ [(a_{ij}^{(1)} - l_{i1}l_{j1} - l_{i2}l_{j2} - \ldots - l_{i,j-1}\, l_{j,j-1})/l_{jj}] \qquad (3.2)$$

where, of course, the previously computed l_{pq} are used when evaluating the right-hand sides.

We may express the computation of the right hand side of (3.2) say in the form

$$\left.\begin{array}{ll} b_{ij}^{(2)} = \mathrm{fl}\,(a_{ij}^{(1)} - l_{i1}l_{j1}), & i,\ j=2,\ \ldots,\ n, \\ b_{ij}^{(3)} = \mathrm{fl}\,(b_{ij}^{(2)} - l_{i2}l_{j2}). & i,\ j=3,\ \ldots,\ n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ b_{ij}^{(k+1)} = \mathrm{fl}\,(b_{ij}^{(k)} - l_{ik}l_{jk}), & i,\ j=k+1,\ \ldots,\ n, \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

where the $b_{ij}{}^{(k)}$ are the computed elements of the $B^{(k)}$ discussed at the end of section 1.

The full practical factorization of $A^{(1)}$ is therefore computationally equivalent (including equivalence of rounding errors) to the computation of the first column of $L^{(1)}$ and the computation of $B^{(2)}$ followed by the practical factorization of the computed $B^{(2)}$, a matrix of order $(n-1)$.

Theorem 2. *If A is a positive definite digital matrix of order n then provided*

$$\lambda_{\min} = 1/\|A^{-1}\|_2 \geqslant V_n^{3/2}\, 2^{-t_1}\, \|A\|_2 \tag{3.4}$$

the Cholesky factor L can be computed without breakdown and the computed L satisfies the relation

$$LL^T = A+E, \quad \|E\|_2 \leqslant 2\cdot 2^{-t_1}\,[1+(n^{1/2}-2.2)\,2^{-t_1}]^n \times$$
$$\times \left[\frac{2}{3}(n+1)^{3/2}+1.1n\right] \|A\|_2. \tag{3.5}$$

In other words L is the exact Cholesky factor of some matrix $A+E$ where E satisfies the given bound.

The condition (3.4) ensures that $A+E$ is positive definite. It may be written in the form

$$2n^{3/2}\, 2^{-t_1}\, \|A\|_2\, \|A^{-1}\|_2 \leqslant 0.1 \tag{3.6}$$

i.e.

$$2n^{3/2}\, 2^{-t_1}\, k(A) \leqslant 0.1. \tag{3.7}$$

Since $k(A) \not< 1$ for any matrix relation (3.7) gives *a fortiori*

$$2n^{3/2}\, 2^{-t_1} \leqslant 0.1.$$

The condition $n2^{-t} < 0.1$ is therefore certainly satisfied.

The proof is by induction. Assume that the result is true for matrices of order $n-1$.

Consider now the computation of the first column of $L^{(1)}$ and of the matrix $B^{(2)}$ for the matrix $A^{(1)}$ of order n. We have

$$l_{11} = \mathrm{fl}\,[\mathrm{sqrt}\,(a_{11}^{(1)})] \text{ giving } l_{11}^2 = a_{11}^{(1)}(1+\varepsilon_{11}) \quad (|\varepsilon_{11}| < 2.2^{-t_1}) \tag{3.9}$$

from (2.5). The remaining elements of the first column of $L^{(1)}$ are defined by

$$l_{i1} = \mathrm{fl}\,(a_{i1}^{(1)}/l_{11}) = a_{i1}^{(1)}(1+\varepsilon_{i1})/l_{11} \quad (|\varepsilon_{i1}| < 2^{-t_1}), \tag{3.10}$$

$$l_{i1}l_{11} = a_{i1}^{(1)}(1+\varepsilon_{i1}) \qquad (i = 2, \ldots, n). \tag{3.11}$$

Equations (3.9) and (3.11) state that $l_{11}, \ldots, l_{n1}$ are exact for the matrix $A^{(1)} + F^{(1)}$ where $F^{(1)}$ is defined by .

$$f_{11}^{(1)} = a_{11}^{(1)}\varepsilon_{11}, \quad f_{i1}^{(1)} = f_{1i}^{(1)} = a_{i1}^{(1)}\varepsilon_{i1}, \quad f_{ij}^{(1)} = 0 \quad \text{otherwise}. \tag{3.12}$$

We therefore have certainly

$$\| F^{(1)} \|_2 \leqslant \|\, | F^{(1)} | \,\|_2 \leqslant 2.2^{-t_1} \|\, | A^{(1)} | \,\|_2 \leqslant 2n^{1/2}\, 2^{-t_1} \| A^{(1)} \|_2. \tag{3.13}$$

It follows from (3.4) that $A^{(1)} + F^{(1)}$ is positive definite and hence from Theorem 1

$$\| l_1 l_1^T \|_2 = \| l_1 \|_2^2 \leqslant \| A^{(1)} + F^{(1)} \|_2 \leqslant (1 + 2n^{1/2}\, 2^{-t_1}) \| A^{(1)} \|_2. \tag{3.14}$$

The elements of $B^{(2)}$ are defined by

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(2)} &= \mathrm{fl}\,(a_{ij}^{(1)} - l_{i1}l_{j1}) \\ &= a_{ij}^{(1)}(1+\varepsilon_{ij}) - l_{i1}l_{j1}(1+\eta_{ij}) \quad (|\varepsilon_{ij}| < 2^{-t_1}, \quad |\eta_{ij}| < 2.2^{-t_1}) \\ &= (a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij} - l_{i1}l_{j1}\eta_{ij}) - l_{i1}l_{j1}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Hence we can say that the computed first column of $L^{(1)}$ and the computed $B^{(2)}$ would be obtained exactly with the matrix $A^{(1)} + E^{(1)}$ where $E^{(1)}$ is defined by

$$e_{11}^{(1)} = L_{11}^{(1)}\varepsilon_{11}, \quad e_{1i}^{(1)} - e_{i1}^{(1)} = a_{i1}^{(1)}\varepsilon_{i1} \tag{3.16}$$

$$e_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij} - l_{i1}l_{j1}\eta_{ij} \quad (i, j = 2, \ldots, n). \tag{3.17}$$

From the bound on the ε_{pq} and the η_{pq}

$$| e_{11}^{(1)} | \leqslant 2.2^{-t_1} | a_{11}^{(1)} |, \quad | e_{1i}^{(1)} | = | e_{i1}^{(1)} | \leqslant 2^{-t_1} | a_{i1}^{(1)} |, \tag{3.18}$$

$$| e_{ij}^{(1)} | \leqslant 2^{-t_1} | a_{ij}^{(1)} | + 2.2^{-t_1} | l_{i1} |\, | l_{j1} |, \tag{3.19}$$

and hence

$$\begin{aligned} \| E^{(1)} \|_2 &\leqslant \|\, | E^{(1)} | \,\|_2 \leqslant 2.2^{-t_1} \|\, | A^{(1)} | \,\|_2 + 2.2^{-t_1} \|\, | l_1 |\, | l_1^T | \,\|_2 \\ &= 2.2^{-t_1} \|\, | A^{(1)} | \,\|_2 + 2.2^{-t_1} \|\, | l_1 | \,\|_2^2 \\ &\leqslant 2.2^{-t_1} (n^{1/2} + 1 + 2n^{1/2}\, 2^{-t_1}) \| A^{(1)} \|_2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

since $\|\, | l_1 | \,\|_2 = \| l_1 \|_2$.

Again applying Theorem 1 we have

$$\| B^{(2)} \|_2 \leqslant \| A^{(2)} + G^{(1)} \|_2 \tag{3.21}$$

where $G^{(1)}$ is the matrix $E^{(1)}$ without its first row and column. Clearly

$$\begin{aligned} \| B^{(2)} \|_2 &\leqslant \| A^{(2)} \|_2 + \|\, | G^{(1)} | \,\|_2 \leqslant \\ &\leqslant \| A^{(2)} \|_2 + 2^{-t_1} [\|\, | A^{(2)} | \,\|_2 + 2(1 + 2n^{1/2} 2^{-t_1}) \| A^{(1)} \|_2] \\ &\leqslant \| A^{(1)} \|_2 \{1 + [n^{1/2} + 2(1 + 2n^{1/2} 2^{-t_1})]\, 2^{-t_1}\}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

We may use the overall bound given in (3.8) to simplify these results. The relations (3.20), (3.22) become certainly

$$\| E^{(1)} \|_2 \leqslant 2.2^{-t_1} (n^{1/2} + 1.1) \| A^{(1)} \|_2 \tag{3.23}$$

and

$$\| B^{(2)} \|_2 \leqslant \| A^{(1)} \|_2 [1 + (n^{1/2} + 2.2) 2^{-t_1}]. \tag{3.24}$$

From our inductive hypothesis we know that $L^{(2)}$ which is the computed Cholesky factor derived from the computed $B^{(2)}$ satisfies the relation

$$L^{(2)} (L^{(2)})^T = B^{(2)} + E^{(2)} \tag{3.25}$$

where

$$\| E^{(2)} \|_2 \leqslant 2.2^{-t_1} \{1 + [(n-1)^{1/2} + 2.2] 2^{-t_1}\}^{n-1} \times \times \left[\frac{2}{3} n^{3/2} + (1.1)(n-1) \right] \| B^{(2)} \|_2. \tag{3.26}$$

Combining the first column of $L^{(1)}$ with $L^{(2)}$ we obtain the computed $L^{(1)}$ and this satisfies

$$L^{(1)} (L^{(1)})^T = A^{(1)} + E^{(1)} + \bar{E}^{(2)}, \tag{3.27}$$

where $\bar{E}^{(2)}$ is $E^{(2)}$ augmented by a null first row and column and

$$\| E^{(1)} + \bar{E}^{(2)} \|_2 \leqslant \| E^{(1)} \|_2 + \| \bar{E}^{(2)} \|_2. \tag{3.28}$$

A little manipulation gives certainly

$$\| E^{(1)} + \bar{E}^{(2)} \|_2 \leqslant 2.2^{-t_1} \left[\frac{2}{3} (n+1)^{3/2} + 1.1n \right] \times [1 + (n^{1/2} + 2.2) 2^{-t_1}]^n \| A^{(1)} \|_2 \tag{3.29}$$

which is the required result.

For values of n greater than 10 satisfying condition (3.8) the result (3.29) can be expressed in the simpler form

$$LL^T = A + E, \quad \| E \|_2 \leqslant 2.5 n^{3/2} 2^{-t_1} \| A^{(1)} \|_2. \tag{3.30}$$

The constant 2.5 has not been computed with any great care but could not be reduced to less than (say) 2.3.

4. ACCURACY OF A COMPUTED INVERSE

To invert A the most convenient procedure is to compute L^{-1} and then $(L^{-1})^T L^{-1}$, the full computation including that of L requiring $^1/_2 n^3$ multiplications. Error analyses of the two remaining steps have been given elsewhere [10, 12]. They show that when A is not well-conditioned the error made in the Cholesky decomposition is easily the most damaging. If the other two parts were performed exactly the computed inverse would be $X = (A + E)^{-1}$ and we have

$$\frac{\| X - A^{-1} \|_2}{\| A^{-1} \|_2} \leqslant \frac{\| E \|_2 \| A^{-1} \|_2}{1 - \| E \|_2 \| A^{-1} \|_2} \tag{4.1}$$

provided $\| E \|_2 \| A^{-1} \|_2 < 1$. Since we have

$$\| E \|_2 \| A^{-1} \|_2 \leqslant 2.5 n^{3/2} 2^{-t_1} \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 < 0.125 \tag{4.2}$$

by condition (3.6) the existence of $(A + E)^{-1}$ is assured. Provided (3.6) is satisfied (4.1) can be written in the form

$$\| X - A^{-1} \|_2 / \| A^{-1} \|_2 \leqslant 2.86 n^{3/2} 2^{-t_1} k(A). \tag{4.3}$$

To put the result in perspective the result obtained by Goldstine and von Neumann [4] for the fixed point inversion of a positive definite matrix was effectively

$$\| X - A^{-1} \|_2 / \| A^{-1} \|_2 \leqslant 14.24 n^2 2^{-t_1} k(A) \tag{4.4}$$

so that (4.3) is significantly sharper.

As far as I know it is the sharpest bound so far attained though greater attention to trivial details would obviously reduce the factor 2.86 to some extent. This seems scarcely worth considering.

A similar analysis based on the use of floating-point arithmetic but with accumulation of inner-products gives the bound

$$\| X - A^{-1} \|_2 / \| A^{-1} \|_2 \leqslant 3.14 n^{1/2} 2^{-t_1} k(A). \tag{4.5}$$

5. COMMENTS ON THE ERROR BOUNDS

The first comment one might make is that in one sense the bounds can scarcely be regarded as a priori bounds since one cannot make practical use of them without a knowledge of $k(A)$. This is certainly true but I feel that this objection reduces to a mere argument about words. My claim is that the bound does relate the accuracy of the computed result with the inherent sensitivity of the original problem and we cannot expect a general result to do more than that.

The analysis has been carried out in the now classical tradition. The result is completely rigorous and covers all errors arising from second and higher order effects. In this respect it has followed the model established by Goldstine and von Neumann in their pioneering paper. In my opinion the time has now arrived when this policy might well be reconsidered.

At the time when the Goldstine—von Neumann paper was written very pessimistic views were widely held on the cumulative effect of rounding errors in matrix processes. In order to dispel this pessimism it was essential that the analysis should be completely above suspicion. Moreover it was desirable that the final result should give a clear concise and unequivocal statement concerning the overall limitations of the algorithm since few would have time to read the details of the analysis.

In the light of experiences over the last twenty years I doubt whether present-day error analysts ever carry out such a meticulous analysis for their own benefit. For example, the bare essentials of the result given above were established on a single sheet of paper and left no doubt that a bound of the form

$$\| E \|_2 \leqslant k n^{3/2} 2^{-t} \| A \|_2 \tag{5.1}$$

(where k was some suitable constant) could be rigorously established. The rigour was added afterwards and was a tedious but, by now, routine process.

Again, in my opinion, it is quite common for too much weight to be attached to the precise bounds that have been attained. Before elaborating on this point it is illuminating to make the following comments on the bounds given in (4.3) and (4.5) respectively.

Consider the upper bounds of the errors caused by replacing A by $A + F$ where F satisfies

$$\text{(i)} \quad | f_{ij} | \leqslant 2.86 n \, | a_{ij} | \, 2^{-t_1}, \tag{5.2}$$

$$\text{(ii)} \quad | f_{ij} | \leqslant 3.14 \, | a_{ij} | \, 2^{-t_1}. \tag{5.3}$$

It is immediately obvious that in the first case we have

$$\| (A+F)^{-1} - A^{-1} \|_2 / \| A^{-1} \|_2 \leqslant 2.86 n^{3/2} 2^{-t_1} k(A) / (1 - 2.86 n^{3/2} k(A)) \tag{5.4}$$

and in the second

$$\| (A+F)^{-1} - A^{-1} \|_2 / \| A^{-1} \|_2 \leqslant 3.14 n^{1/2} 2^{-t_1} k(A) / (1 - 3.14 n^{1/2} k(A)). \tag{5.5}$$

These are essentially the same bounds as in (4.3) and (4.5) respectively. Notice that in (5.2) and (5.3) the bound on each element of F is proportional to the corresponding element of A.

If the matrix A is not exactly representable by t digit binary numbers then *ab initio* we must work with $A + G$ where

$$| g_{ij} | \leqslant | a_{ij} | \, 2^{-t} \tag{5.6}$$

Comparing (5.6) with (5.3) we see that the effect of rounding errors made during the solution are unlikely to be significantly more important than the effect of the initial digital representation. In (5.2) we have the additional factor n which is not surprising since the a_{nn} element at least is involved in n independent operations involving roundings. These considerations suggest that it is rather unlikely that either of our overall bounds can be improved upon in any significant way.

6. INADEQUACY OF THE OVERALL BOUNDS

Experiments in which the computed errors are compared with the upper bounds given above seem to be becoming increasingly common. Inevitably they lead to the conclusion that even the bounds given above are much too pessimistic. This should occasion no surprise.

Indeed a study of the error analysis itself as distinct from a concentration on the final result leads one to expect this.

For example, in the analysis no account is taken of the statistical distribution of the rounding errors. Unless n is small one might expect that for this reason alone the factors $n^{3/2}$ and $n^{1/2}$ in (4.3) and (4.5) could safely be replaced by $n^{3/4}$ and $n^{1/4}$ respectively. Again in order to obtain a succinct result the quantities $||B^{(r)}||_2$ have been replaced by $||A^{(1)}||_2$ for all relevant r thoughthis will obviously be a severe overestimate in general.

When we turn to special classes of matrices further reductions can often be made. For example if A is positive $|A| = A$ and therefore $|| \, |A| \, ||_2 = ||A||_2$. In the analysis $|| \, |A| \, ||_2$ has been replaced everywhere by $n^{1/2} \, ||A||_2$ so that there is an unnecessary factor of $n^{1/2}$. When A is a band matrix with band-width s, L is also a band matrix and the error matrix E is of the same width as A. A simple modification of the analysis shows that the factor $n^{3/2}$ in (4.3) can certainly be replaced by $n^{1/2} \, s$ and if s is small compared with n this is a substantial reduction.

These remarks are of course trivial and yet the errors made when working with matrices belonging to these special classes are often compared with those given in (4.3) and (4.5), or rather with the somewhat poorer overall bounds currently available in the literature! Comparisons of this kind are extremely misleading and may give the impression that the analysis leading up to the quoted bounds is suspect.

The finite segments of the Hilbert matrix are often used for test purposes. For such matrices the errors in the computed inverses are particularly small compared with the bounds we have given especially when accumulation of inner-products is used. A study of the error analysis shows immediately why this should be. In the first instance such matrices are positive and hence there is a superfluous factor of $n^{1/2}$ in the bounds. Secondly, ignoring higher order effects, the analysis shows that when inner products are accumulated the computed L satisfies the relation

$$LL^T = A + E \tag{6.1}$$

where

$$|e_{ij}| \leqslant 2^{-t} \, |l_{ij}| \, |l_{jj}| \qquad (i > j). \tag{6.2}$$

Hence if many of the elements of L are very small the corresponding elements of E are also particularly small. Now in the factorization of a Hilbert segment the l_{ij} do indeed get progressively smaller as i and j increase. This compensates to some extent the ill-conditioned nature of A. Indeed the l_{ij} become progressively smaller precisely because A is so ill-conditioned. Careful study of the details of the error analysis enables us to forecast the behaviour quite accurately and the overall bound in terms of $||A||_2$ and $||A^{-1}||_2$ is clearly seen to be irrelevant.

7. GENERAL CONCLUSIONS

The following tentative conclusions may be drawn from the above discussion. The main purpose of an *a priori* analysis is to reveal the strengths and weaknesses of an algorithm. It is not worthwhile expending too much effort on the production of concise overall bounds since there are certain to be severe overestimates in general.

The essential points revealed by the analysis of sections 1—4 is that the Cholesky factorization will give satisfactory inverses for a useful range of condition numbers and values of n and that this is achieved without any form of pivoting. Although the accuracy attainable may be expected to vary from one choice of pivot to another this is in general a secondary effect, though with special types of matrices a certain choice of pivots might give an inverse of unexpectedly high accuracy having regard to the condition of the matrix. This contrasts with the situation for general matrices for which elimination methods without pivoting may fail to give any accuracy even for perfectly conditioned matrices (i.e. matrices for which $k(A) = 1$) of low order! Finally it shows that for *all* positive definite matrices the effect of rounding errors is unlikely to be more important than the initial rounding of the coefficients when innerproducts are accumulated. For matrices of Hilbert type the error will generally be far less than that resulting from the initial roundings.

The overall upper bound itself should not be taken too seriously and it is important to study details of the error analysis in order to determine whether matrices of special classes can be expected to give exceptionally accurate results.

Only in rare cases will an *a priori* bound be of practical use. The best examples of such algorithms are those based on the unitary reduction of hermitian matrices. For several of these it may be shown that the effect of rounding error is equivalent to an initial hermitian perturbation E of A where the bound for $\|E\|_2$ is of the form $2^{-t} f(n) \|A\|_2$. Here $f(n)$ represents a simple function of n which depends on the algorithm and the type of arithmetic being used. The bound for E implies that if λ_i' and λ_i are the computed and true eigenvalues of A then

$$|\lambda_i - \lambda_i'| \leqslant 2^{-t} f(n) \|A\|_2 = 2^{-t} f(n) \max |\lambda_i|. \tag{7.1}$$

For several algorithms of this type $f(n)$ is sufficiently small for the bound given in (6.1) to be quite usable as it stands for many practical purposes [1, 3, 9, 11, 12, 13].

However, it is my opinion that in practice one should use *a posteriori* bounds for error estimates and not the overall a priori bounds, since the former take full advantage of the special nature of the matrix involved and of the distribution of rounding errors that have occurred. Discussion of such bounds has been given in [10, 12] for the linear equation problem and in [8, 12] for the algebraic eigenproblem.

A c k n o w l e d g e m e n t s. The work described here has been carried out as part of the research programme of the National Physical Laboratory and is published by permission of the Director of the Laboratory.

REFERENCES

[1] G i v e n s W., Numerical computation of the characteristic values of a real symmetric matrix, Oak Ridge National Laboratory, ORNL-1574 (1954).
[2] G o l d s t i n e H. H. and v o n N e u m a n n J., Numerical inverting of matrices of high order II, *Proc. Amer. math. Soc.* **2**, 188—202 (1951)
[3] H o u s e h o l d e r A. S., Generated error in rotational tridiagonalization, *J. Ass. comp. Mach.*, **5**, 335—338 (1958).
[4] v o n N e u m a n n J., G o l d s t i n e H. H., Numerical inverting of matrices of high. order, *Bull. Amer. math. Soc.*, **53**, 1021—1099 (1947)
[5] N e w m a n M., T o d d J., The evaluation of matrix inversion programs, *J. Soc. industr. app. Math.*, **6**, 466—476 (1958).
[6] O r t e g a J. M., An error analysis of Householder's method for the symmetric eigenvalue problem, *Numerische Math.*, **5**, 211—225 (1963).
[7] T u r i n g A. M., Rounding errors in matrix processes, *Quart. J. Mech.*, **1**, 287—308 (1948).
[8] W i l k i n s o n J. H., Rigorous error bounds for computed eigensystems, *Computer J.*, **4**, 230—241 (1961).
[9] W i l k i n s o n J. H., Error analysis of eigenvalue techniques based on orthogonal transformations, *J. Soc. industr. appl. Math.*, **10**, 162—195 (1962).
[10] W i l k i n s o n J. H., Rounding errors in algebraic processes, notes on applied science No. 32, Her Majesty's Stationery Office, London, Prentice-Hall, New Jersey (1963).
[11] W i l k i n s o n J. H., Plane rotations in floating-point arithmetic, Proceedings A. M. S. symposium in applied mathematics 15, 185—198 (1963).
[12] W i l k i n s o n J. H., The algebraic eigenvalue problem. Oxford University Press, London (1965).
[13] W i l k i n s o n J. H., Error analysis of transformations based on the use of matrices of the form $I - 2\,ww^H$, Error in Digital Computation (edited by L. B. Rall), 77—101. John Wiley and Son. New York (1965).

L. A. Z a d e h

RESEARCH ON SOME NON-CLASSICAL CONTROL PROBLEMS IN THE UNITED STATES

This expository report survey some recent work in the United States dealing with non-classical control problems and decision processes. The questions to be discussed will center on one or more of the following topics: A) optimization under vector valued criteria employing dynamic programming and other techniques; B) optimization under fuzzy constraints; C) algorithms for the estimation of characteristic functions of fuzzy sets; D) algorithms for the estimation of the maximum of a unimodal function when the observatings carry a cost and there is a penalty associated with the error in estimation; E) extensions and applications of the theory of fuzzy sets.

E. C. Zeeman

KNOTS OF SPHERES IN SOLID TORI

An interesting problem in geometric topology is to study the embeddings of one manifold in another, and to classify them in terms of homotopy. In the piecewise linear category the results that we have so far in codimension $\geqslant 3$ look simple, and ought to belong to a larger algebraic pattern, including an obstruction theory.

Let M^m be a closed manifold, and Q^q without boundary, $m \leqslant q - 3$. Let E denote the space of embeddings of M in Q and F the space of maps from M to Q. The inclusion φ: $E \subset F$ induces homomorphisms of homotopy groups $\varphi_i : \pi_i(E) \to \pi_i(F)$. Do the φ_i belong to an exact sequence? So far we only have information about φ_0, which maps isotopy classes of embeddings to homotopy classes of maps.

Theorem 1. *φ_0 is one-one if M is $(2m - q + 1)$-connected and Q is $(2m - q + 2)$-connected.*

What happens when Q is not sufficiently connected for Theorem 1 to apply? The simplest case is when Q is a solid torus.

Theorem 2. *Let $M = S^m$, $Q = S^r \times E^{q-r}$ where $2m - q + 2 \geqslant r$, and suppose $\pi_0(F) \cong \pi_m(S^r)$ is stable $(m \leqslant 2r - 2)$. Then $\pi_0(E) \leqslant \pi_{q-r} S_{q-m-1}$ and φ_0 is the suspension homomorphism.*

М. А. Айзерман, Э. М. Браверман, Л. И. Розоноэр

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И МЕТОД ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

При проектировании и исследовании самонастраивающихся и обучающихся систем автоматического управления (в частности, обучающихся распознаванию образов) возникают прболемы, которые можно понимать как проблемы экстраполяции и интерполяции функции. В задачах такого рода часто оказывается возможным ввести пространство X (определяемое условиями конкретной задачи) и некоторую функцию $f(x)$, заданную на X так, что процесс обучения можно интерпретировать как появление точек $x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ из X с одновременным сообщением некоторой информации о значениях $f(x)$ в этих точках. Результатом обучения при этом является построение функции, в том или ином смысле близкой к $f(x)$.

Обычные методы экстраполяции часто оказываются практически неприменимыми для решения таких задач главным образом потому, что точки x^i появляются независимо от нас некоторым нерегулярным образом (например, в соответствии с неизвестным заранее вероятностным законом). Кроме того, пространство X часто имеет высокую размерность, и это также затрудняет применение обычных методов экстраполяции. Наконец, сообщаемая при обучении информация о значениях функции $f(x)$ в точках x^i может быть неполной (например, может сообщаться лишь знак $f(x^i)$ или значение $f(x^i)$ вместе с помехой), в этом случае близость приближающей функции к $f(x)$ понимается в соответствующем смысле (например, в смысле совпадения знаков или в смысле сходимости по вероятности). В докладе приводятся примеры точных постановок задач такого рода.

Общая схема постановки и решения таких задач имеет следующий вид. Пусть $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots,$ — некоторая полная (не обязательно ортонормированная) система функций, заданных на X. Предполагается, что восстанавливаемая функция $f(x)$ представима разложением[1])

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x). \tag{1}$$

Разумеется, коэффициенты c_i заранее неизвестны. Предполагается, что функция $f(x)$ —«достаточно гладкая», т. е. что коэффициенты c_i убывают достаточно быстро.

В рассматриваемых задачах точки x^i появляются последовательно, шаг за шагом и независимо, в соответствии с неизвестной плотностью вероятности $p(x)$. Каждый такой шаг называется «показом». Цель работы состоит в построении рекуррентного процесса, последовательно приближающего в нужном смысле функцию $f(x)$ с ростом числа показов на подмножестве из X, где $p(x) > 0$.

Для решения формулируемых далее задач используется один и тот же метод, названный авторами методом потенциальных функций [2]). Вводится в рассмотрение функция двух переменных («потенциальная функция»)

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \varphi_i(x) \varphi_i(y), \tag{2}$$

где действительные числа λ_i выбраны так, что функция $K(x, y)$ ограничена. При n-м показе строится $(n-1)$-е приближение функ-

---

[1]) При небольших и очевидных видоизменениях предлагаемые ниже конструкции пригодны и в случае, когда $f(x)$ представима интегралом $f(x) = \int c_\omega \varphi_\omega(x)\, d\omega$. Для простоты изложения в докладе, однако, имеется в виду представление (1).

[2]) Как показал Я. З. Цыпкин, задачи, решаемые этим методом, близки по своему характеру к задачам теории стохастической аппроксимации, и, в частности, некоторые из приводимых ниже алгоритмов сводятся к процессу Робинса-Монро.

ции $f(x)$ с помощью рекуррентного соотношения [1])

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + r_n K(x, x^n); \qquad f_0(x) \equiv 0. \tag{3}$$

Здесь r_n определяется информацией об $f(x^n)$, полученной при n-м показе, и значением $f_{n-1}(x^n)$. Применение рекуррентной процедуры (3) в различных задачах отличается лишь конкретным способом выбора r_n. В любом случае выбор таков, чтобы $f_n(x^n)$ лучше, чем $f_{n-1}(x^n)$, приближало $f(x^n)$, т. е. чтобы добавление члена $r_n K(x, x^n)$ улучшало приближение в точке, выбранной при очередном показе. Разумеется, при этом приближение функции в иных точках (в том числе и показанных ранее) может ухудшаться; но несмотря на это, во всех рассматриваемых задачах имеет место сходимость процесса.

Доклад содержит теоремы, устанавливающие сходимость процесса и оценивающие быстроту сходимости. Метод потенциальных функций использовался авторами при решении задач об обучении машин распознаванию образов, о восстановлении степени достоверности принадлежности точек из X некоторым множествам, для восстановления функций многих переменных по их значениям при наличии помех и для восстановления линейных дифференциальных уравнений по наблюдаемым значениям правых частей и решений.

Особо рассматривается задача об автоматическом разделении точек из непересекающихся областей пространства X в случае, когда никакой информации о границе этих областей и о принадлежности им отдельных точек не сообщается (задача о самообучении машин).

Идеи и аппарат метода потенциальных функций успешно использовались для автоматизации процесса выработки на машинах простейших понятий и признаков.

Д. В. Аносов

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ТРАНСВЕРСАЛЬНЫМИ СЛОЕНИЯМИ

Аксиоматизируя свойства неустойчивости, присущие геодезическому потоку на замкнутом римановом многообразии отрицательной кривизны, автор ввел понятие У-системы, т. е. динамической системы, поведение траекторий которой в окрестности любой фиксированной траектории напоминает поведение траекторий возле седла. Более общим является понятие динамической системы

[1]) Для решения некоторых задач методом потенциальных функций исследуется более общее, нежели (3), рекуррентное соотношение. Однако в этом докладе рассматриваются лишь такие задачи, для решения которых достаточно процедуры (3).

с трансверсальным слоением, т. е. инвариантным относительной этой системы слоением, в слоях которого под действием преобразований системы происходит сжатие или расширение. В докладе будет дан обзор работ автора по теории У-систем и смежных результатов других авторов о различных системах с трансверсальными слоениями.

В. И. Арнольд

ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ И ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В докладе обсуждаются решенные и нерешенные задачи о характере движения динамических систем со многими степенями свободы, близких к совершающим условно-периодическое движение системам классической механики.

А. А. Боровков

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ К ДИФФУЗИОННЫМ ПРОЦЕССАМ И АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. Доклад содержит два раздела. В первом рассматривается сходимость последовательностей процессов к различным диффузионным процессам, в том числе с условиями на границе. Второй раздел существенно связан с первым и посвящен изложению результатов асимптотического анализа широких классов систем массового обслуживания. При этом, как правило, изучаются не поведение характеристик в некоторый момент времени, а процессы, описывающие системы на всем заданном интервале времени.

Характер входных и выходных потоков, встречающихся в теории массового обслуживания, существенно повлиял на вид условий сходимости в первом разделе, которые при всем этом мы стремились сделать минимальными.

2. Рассматриваются процессы $Z(t)$ в полном метрическом пространстве функций на $[0, T]$, $T \to \infty$. Значение $Z(t)$ определяется как функционал от траектории некоторого другого процесса $\{X(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$, заданного, возможно, на более сложном фазовом пространстве (ср. с так называемым дополнением до марковости в теории массового обслуживания). Сходимость к диффузионному процессу $\{w(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ понимается как сходимость распределений измеримых, непрерывных в равномерной метрике в «точках» $C(0, 1)$ функционалов от нормированного нужным образом процесса $Z(tT)$ к распределению этих функционалов от $w(t)$.

Сущность условий так определенной сходимости, грубо говоря, состоит в отыскании таких σ-подалгебр событий, относящихся к траекториям $\{X(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, относительно которых условные математические ожидания $Z(t+u) - Z(t)$ и $[Z(t+u) - Z(t)]^2$ при $u \to \infty$, $u = o(T)$ ведут себя асимптотически достаточно правильным образом (как условные моменты приращений диффузионного процесса). Добавляется также условие «компактности», запрещающее слишком большие выбросы на траекториях $Z(t)$.

Для сходимости к процессам с условиями на границе вводятся, кроме того, естественные ограничения на поведение $Z(t)$ в окрестности границы.

Для сходимости, например, к винеровскому процессу указанные условия выполнены и легко проверяются для разного рода обобщенных процессов восстановления и их сумм (времена восстановления и приращения должны иметь конечные моменты порядка $2+\gamma$, $\gamma > 0$), включая случаи зависимости приращений от времен восстановления. Это же относится к суммам слабозависимых величин с условиями зависимости, наложенными на моменты; к суммам случайных величин, заданных на конечной цепи Маркова, и др.

3. Рассмотрим системы однократного обслуживания, которые определяются заданием трех процессов: $v(t)$ — числа поступивших вызовов, $u(t)$ — числа обслуженных вызовов и $s(t)$ — числа вызовов, получивших отказ к моменту времени t. (В системах с очередью $s(t) \equiv 0$.) Обычно в реальных задачах удовлетворительно задается лишь процесс $v(t)$, а $u(t)$ и $s(t)$ описываются косвенно, указанием «алгоритма обслуживания». На сегодня теория массового обслуживания, по-видимому, исчерпала почти все случаи «явной разрешимости» таких систем, скажем, случаи, когда в зависимости от характера систем удается найти предельное при $t \to \infty$ распределение $v(t) - u(t) - s(t)$, $s(t)/v(t)$ или других характеристик. Это весьма узкий класс, очерченный очень частными предположениями. Многочисленные попытки расширения этого класса упираются в принципиальные трудности.

С другой стороны, целый ряд фактов указывает на то, что отсутствующие ныне общие подходы, т. е. методы изучения систем общего вида, надо искать на пути асимптотического анализа. По поводу последнего уместно заметить, что сейчас предельные теоремы часто применяются для отыскания распределения суммы даже пяти-семи случайных слагаемых.

а) *Системы с интенсивным входным потоком* $v(t)$. Рассмотрим последовательность систем с номерами $n = 1, 2, \ldots$, для которых $Mv_n(t) \sim ant$, а число линий обслуживания при некотором $\varepsilon > 0$ больше, чем $an(1+\varepsilon)\int\limits_0^{t_0} Q(t_0 - z)\,dz$, где $1 - Q(t)$ — функция распределения времени обслуживания. Тогда если процесс $[v_n(t) - ant]/\sqrt{n}$ на $[0, t_0]$ при $n \to \infty$ сходится к диффузионному процессу $\{w(t),\ 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$, то относительно числа занятых линий

$\zeta_n(t) = v_n(t) - u_n(t) - s_n(t)$ справедливо следующее: *Процесс* $[\zeta_n(t) - an \int\limits_0^t Q(t-z)\,dz]/\sqrt{n}$ *(в* $D(0, t_0)$*) сходится при* $n \to \infty$ *к процессу* $\theta(t) = \int\limits_0^t Q(t-z)\,dw(z) + \sqrt{a}\,\gamma(t)$, где $\gamma(t)$ — *гауссовский процесс, не зависящий от первого слагаемого, с корреляционной функцией*

$$M\gamma(t+u)\,\gamma(t) = \int\limits_0^t Q(t+u-z)\,(1-Q(t-z))\,dz.$$

Отсюда следует, в частности, что если $w(t)$ — винеровский процесс (см. примеры в конце п. 2), то $\theta(t)$ распределено нормально с параметрами $(0,\ Mw^2(1) \int\limits_0^t Q^2(t-z)\,dz + a \int\limits_0^t Q(t-z)(1 - Q(t-z))\,dz)$. Если $\int\limits_0^\infty Q(t)\,dt < \infty$, то при $t \to \infty$ $\theta(t)$ будет сходиться к стационарному процессу.

Здесь мы имеем примеры предельных теорем, «собирательных» по входу и «не собирательных» по времени обслуживания.

б) Необходимым для марковости стационарного процесса $\theta(t)$ является условие $Q(t) = e^{-\alpha t}$. В этом случае, когда число линий обслуживания равно $an \int\limits_0^\infty Q(t)\,dt + c\sqrt{n}$, нормированный процесс $\zeta_n(t)$ будет сходиться к марковскому диффузионному процессу с отражением от границы, определяемой параметром c. Инфинитезимальный оператор предельного процесса легко определяется по параметрам a, α и оператору процесса $w(t)$.

в) Если $s(t) \equiv 0$ (система с очередью), то в условиях п. б мы будем иметь сходимость к неограниченной диффузии, но коэффициенты инфинитезимального оператора будут на границе иметь излом.

г) $\zeta(t)$ может принимать большие значения также и в случае неинтенсивных входных потоков $v(t)$. Например, для «нагруженных» систем в интервале времени $[0, T]$, $T \to \infty$ (явления в пунктах а, г различаются главным образом масштабом времени). Если $[v(tT) - atT]/\sqrt{T}$ сходится к диффузионному процессу на $[0, 1]$, то нормированный процесс $\zeta(tT)$ также будет сходиться к диффузии, но с отражением от нулевой границы. Инфинитезимальный оператор предельного процесса без труда вычисляется по параметрам системы.

Во всех этих задачах условия на входной поток близки к минимальным.

Подобные результаты при более слабых ограничениях на $v(t)$ могут быть получены относительно «вероятности отказа» $s(t)/v(t)$.

А. Г. Витушкин

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ФУНКЦИЙ ОТ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

С помощью алгебраической подстановки, называемой преобразованием Чирнгаузена, общее алгебраическое уравнение n-й степени $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ приводится к виду $y^n + b_4 y^{n-4} + b_5y^{n-5} \ldots + b_{n-1}y + 1 = 0$. Дальнейшие попытки алгебраистов свести решение общего алгебраического уравнения к решению уравнений, содержащих по возможности меньшее число параметров, долгое время оставались безуспешными. В своих «Математических проблемах» Д. Гильберт по-новому взглянул на эту задачу, сформулировав ее под № 13 в следующем виде: «Невозможность решения общего уравнения 7-й степени при помощи функций только двух переменных». Для доказательства этого Д. Гильберт считал необходимым доказать, что «уравнение 7-й степени $f^7 + x\cdot f^3 + y\cdot f^2 + z\cdot f + 1 = 0$ не разрешимо при помощи любых непрерывных функций только двух переменных».

Различные математики по-разному поняли 13-ю проблему и относили к ней результаты различного характера. А. Островский (1920) показал, что аналитическая функция двух переменных $\xi(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n/n^y$ не является конечной суперпозицией бесконечно дифференцируемых функций одного переменного и алгебраических функций любого числа переменных. Д. Гильберт (1926) доказал, что решение уравнения 9-й степени можно представить в виде конечной суперпозиции алгебраических функций 4-х переменных.

В 1955 г. автором доказано, что существует p раз дифференцируемая функция n переменных, которую нельзя представить в виде конечной суперпозиции p' раз дифференцируемых функций n' переменных, если только $n/p > n'/p'$. Л. Бибербах пытался доказать, что существуют непрерывные функции трех переменных, не представимые в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных. Но не зря Л. Бибербах назвал 13-ю проблему «несчастной». В 1957 г. совместными усилиями А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда было доказано обратное: всякая непрерывная функция n переменных может быть представлена суперпозицией вида

$$\sum_{i=1}^{2n+1} f_i\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\ (x_j)\Big),$$

где все функции непрерывны, а внутренние функции $\{\alpha_{ij}(x_j)\}$ заранее фиксированы. Из этой теоремы следует, в частности, что решение уравнения 7-й степени может быть представлено в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и операции сложения, т. е. гипотеза Д. Гильберта оказалась ошибочной. В связи с проблематикой рядов Фурье Н. К. Бари еще в 1930 г. доказала, что всякая непрерывная функция одного переменного представима в виде $f(x) = \sum_{i=1}^{3} f_i(g_i(x))$, где все $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$ абсолютно непрерывны. Поэтому всякая непрерывная функция n переменных представима в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций одного переменного и операции сложения. В последние годы получен ряд результатов (Л. А. Бассалыго, Р. Досс, Г. Г. Лоренц, П. А. Остранд, В. М. Тихомиров, Г. М. Хенкин, Д. Шпрехер и др.), дополняющих теорему А. Н. Колмогорова.

При рассмотрении суперпозиций дифференцируемых функций характер результатов, по-видимому, существенно меняется. Например, из работ автора и Г. М. Хенкина следует, что для всяких непрерывных функций $p_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и непрерывно дифференцируемых функций $q_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n > 2$ $(m = 1, 2, \ldots, N)$ множество суперпозиций вида

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) f_i(q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

где $\{f_i(t)\}$ — произвольные непрерывные функции одного переменного, нигде не плотно в пространстве непрерывных функций n переменных.

В заключение отметим, что идея Д. Гильберта доказывать «невозможность решения общего уравнения 7-й степени при помощи функций только двух переменных» может получить дальнейшее положительное развитие. Имеющиеся в настоящее время результаты не противоречат, например, тому, что функция $f(x, y, z)$, определяемая уравнением $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$, не является конечной суперпозицией аналитических функций двух переменных.

М. И. Вишик

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Доклад посвящен обзору совместных работ Г. И. Эскина и докладчика по уравнениям в свертках.

1. Пусть $\tilde{A}(x, \xi) \in C^\infty(R^n, R^n \setminus 0)$ и $\tilde{A}(x, t\xi) = t^\alpha \tilde{A}(x, \xi)$, причем для простоты $\tilde{A}(x, \xi)$ не зависит от x при $|x| \geqslant R$, $R \geqslant 1$. Обозначим через Au оператор в свертках (псевдодифференциальный),

отвечающий этому символу,

$$Au = A(x,\ z) * u(z)\,|_{z=x},$$

где свертка берется по z, u — финитная функция, $A(x,\ z) = F_{\xi \to z}\tilde{A}(x,\ \xi)$, F — оператор преобразования Фурье (см. [1], [2], [3]).

Оператором в свертках в ограниченной области $G \subset R^n$ с гладкой границей Γ называется оператор $A_1u_+ = P^+Au_+$, где u_+ обращается в нуль вне $\overline{G}$, P^+ — оператор сужения обобщенной функции на область G. Грубо говоря, такой оператор можно представить в виде

$$P^+Au_+ = \int\limits_{\overline{G}} A(x,\ x-y)\, u_+(y)\, dy,$$

$x \in G$, где $A(x,\ z)$, вообще говоря,— обобщенная функция z.

2. Оператор типа свертки A_1u_+ в области G называется *гладким*, если для любого s

$$\| A_1u_+ \|_{s-\alpha} \leqslant C_s \| u \|_s,$$

где $\| \ \|_r$ — норма Соболева — Слободецкого по области G.

Символ $\tilde{A}$ оператора в свертках A_1u_+, записанный в локальной системе координат $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ (л. с. к.), где $x_n = 0$ — уравнение части границы Γ, принадлежит классу D_α^0, если $\tilde{A}(x,\ \xi',\ \xi_n)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi'^k}\tilde{A}(x,\ 0,\ -1) = (-1)^{|k|} e^{-\alpha\pi i}\frac{\partial^k}{\partial \xi'^k}\tilde{A}(x,\ 0,\ +1)$$

для любого $k = (k_1,\ \ldots,\ k_n)$.

Теорема. *Если в любой л. с. к. символ $\tilde{A}$ оператора A_1u_+ принадлежит классу $D_\alpha^{(0)}$, то оператор A_1u_+ является гладким в области G.*

3. Оператор $\tilde{A}_1u_+$ удовлетворяет в $\overline{G}$ условию *эллиптичности*, если его символ $A(x,\ \xi)$ принадлежит $\mathscr{E}_\alpha$, т. е. если $\tilde{A}(x,\ \xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, $x \in \overline{G}$. Всякий символ $\tilde{A}(x,\ \xi)$, удовлетворяющий определенным условиям гладкости, допускает однородную факторизацию по ξ_n

$$\tilde{A}(x,\ \xi',\ \xi_n) = \tilde{A}_+(x,\ \xi',\ \xi_n)\,\tilde{A}_-(x,\ \xi',\ \xi_n),$$

где $\tilde{A}_+(x,\ \xi',\ \xi_n) \neq 0$ $(\tilde{A}_-(x,\ \xi',\ \xi_n) \neq 0)$ для $\operatorname{Im}\xi_n \geqslant 0$ $(\operatorname{Im}\xi_n \leqslant 0)$, $\tilde{A}_+$ $(\tilde{A}_-)$ — аналитическая функция при $\operatorname{Im}\xi_n > 0$ $(\operatorname{Im}\xi_n < 0)$, и имеет по ξ порядок однородности $\varkappa$ $(\alpha - \varkappa)$ ([1]; см. также [4], [5]).

Если $A \in D_\alpha^{(0)} \cap E_\alpha$, то $\varkappa$ — целое в каждой точке $x \in \Gamma$ и постановка граничных задач для оператора $A_1 u_+ + Tu_+$, где T — гладкий оператор в G порядка $< \alpha$, зависит от значения $\varkappa$:

а) Если $\varkappa \geqslant 0$, то на Γ задается $\varkappa$ граничных условий вида

$$B'_j u_+ \equiv \gamma P^+ B_j u_+ = g_j(x'),\ x' \in \Gamma,\ \widetilde{B}_j \in D_{\alpha_j}^{(0)}, \tag{1}$$

γ — оператор сужения функции на Γ. Если символы $\widetilde{A}(x, \xi)$ и $\widetilde{B}_j(x, \xi)$ на Γ удовлетворяют алгебраическому условию Шапиро — Лопатинского, то оператор $A_1 u_+ + Tu_+$ является *нетеровским*, т. е. задача о решении уравнения

$$A_1 u_+ + Tu_+ = f, \qquad f \in H_{s-\alpha}(G) \tag{2}$$

при граничных условиях (1) нормально разрешима в $H_s(G)$ при $(f, g_j) \in (H_{s-\alpha}(G), H_{s-\alpha_j-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ (см. [1], [6]).

б) Если $\varkappa < 0$, то в этом случае естественной является задача о нахождении функций $(u_+(x), \rho_1(x'), \ldots, \rho_{|\varkappa|}(x'))$ из уравнения

$$A_2(u_+, \varrho_j) \equiv P^+ A u_+ + \sum_{j=1}^{|\varkappa|} P^+ G_j(\varrho_j(x') \otimes \delta(\Gamma)) + P^+ T(u_+, \varrho_j) = f(x), \tag{3}$$

где $\widetilde{G}_j(x, \xi) \in D_{\beta_j}^{(0)}$, $\delta(\Gamma)$ — δ-функция, сосредоточенная на Γ. Если символы $\widetilde{A}$, $\widetilde{G}_j$ удовлетворяют при $x \in \Gamma$ одному алгебраическому условию, то оператор A_2 является *нетеровским* и уравнение (3) в соответствующих пространствах нормально разрешимо (см. [1]).

4. Если оператор $A_1 u_+$ не удовлетворяет условию гладкости, то число $\varkappa$ может быть любым. Для уравнения (2) всегда нормально разрешима первая краевая задача, состоящая в нахождении решения $u_+ \in \mathring{H}_{\varkappa+\delta}(G)$, $|\delta| < {}^1/_2$, уравнения (2) при $f \in H_{\varkappa+\delta-\alpha}(G)$. Если порядок гладкости $f(x)$ больше $\varkappa - \alpha + {}^1/_2$, то порядок гладкости решения u_+ на Γ, вообще говоря, не превосходит $\varkappa + {}^1/_2$. Можно лишь утверждать, что уравнение (2) разрешимо в пространстве $\mathring{H}_{\varkappa+\delta, N}(G)$ функций $u_+(x)$, имеющих внутри G гладкость порядка $\varkappa + \delta + N$, а на Γ — гладкость порядка $\varkappa + \delta$ ([7]).

В случае нецелого $\varkappa$ естественно также изучать общую задачу с любым числом потенциалов в уравнении (2) и с любым числом граничных условий:

$$A_1 u_+ + \sum_{j=1}^{M} P^+ G_j(\varrho_j(x') \otimes \delta(\Gamma)) = f(x),\ x \in G, \tag{4}$$

$$B'_k u_+ + \sum_{j=1}^{l} E_{kj} \varrho_j(x') = g_k(x') \ (k = 1, \ldots, l), \tag{5}$$

где E_{kj} — операторы типа свертки по Γ. При выполнении соответствующего алгебраического условия на Γ задача о нахождении

(u_+, ρ_j) по заданным (f, g_k) нормально разрешима, причем $u_+ \in \overset{\circ}{H}_{\varkappa-l+M}(G)$ (или $u_+ \in \overset{\circ}{H}_{\varkappa-l+M,\,N}(G)$), т. е. наличие слагаемых типа потенциалов увеличивает порядок гладкости u_+ на M единиц, а l граничных условий вида (5) уменьшают порядок гладкости u_+ на l единиц ([7]).

5. Аналогичные задачи изучены для систем уравнений в свертках, у которых символ $\tilde{A}(x, \xi)$ — квадратная матрица порядка p. В этом случае исследована общая задача вида (4), (5) ([8]).

6. Аналогичные задачи изучены для уравнений в свертках переменного порядка, т. е. для таких уравнений, у которых символ $\tilde{A}(x, t\xi) = t^{\alpha(x)}\tilde{A}(x, \xi)$, где $\alpha(x)$, вообще говоря, зависит от x ([8]).

7. В качестве приложений можно указать результаты для интегральных уравнений первого рода:

$$A_1 u_+ + T u_+ \equiv \int_G \frac{K\left(x, \frac{x-y}{|x-y|}\right)}{|x-y|^{n-\alpha}} u_+(y)\,dy + T u_+ = f(x), \quad x \in G, \quad \alpha > 0,$$

у которых символ $\tilde{A}(x, \xi)$ имеет по ξ порядок $-\alpha$. Для таких уравнений корректными являются задачи, указанные в пунктах 3 и 4, в зависимости от свойств символа $\tilde{A}$ в точках $x \in \Gamma$.

С помощью уравнений в свертках исследована задача для эллиптического уравнения $2m$ $L_{2m} u_+ = f(x)$ порядка при разрывных граничных условиях

$$B_j^{(1)} u_+ = g_j^{(1)}(x') \quad (x' \in \Gamma_1), \quad B_j^{(2)} u_+ = g_j^{(2)}(x') \quad (x' \in \Gamma_2),$$

$\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \Gamma$. Выяснен характер особенности решения $u_+(x)$ вблизи многообразия $\gamma = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$ (см. [7], [8], [9], [10]).

8. Аналогичные задачи исследованы для параболических уравнений в свертках ([11]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вишик М. И., Эскин Г. И., Уравнения в свертках в ограниченной области, *Успехи математических наук*, **20**, 3, 89—152 (1965).

[2] Kohn J. J., Nirenberg L., An Algebra of Pseudo-Differential Operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18**, 269—305 (1965).

[3] Hörmander L., Pseudo-Differential Operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18**, 501—517 (1965).

[4] Крейн М. Г., Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, *Успехи математических наук*, **13**, 5 3—120 (1958).
[5] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, *Успехи математических наук*, **13**, 2, 3—72, (1958).
[6] Агранович М. С., Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, *Успехи математических наук*, **20**, 6, 3—120 (1965).
[7] Вишик М. И., Эскин Г. И., Уравнения в свертках в ограниченной области в пространствах с весовыми нормами, *Математический сборник*, **69**, (111); 1, 65—110 (1965).
[8] Вишик М. И., Эскин Г. И., Сингулярные эллиптические уравнения и системы переменного порядка, *Доклады АН СССР*, **156**. 2, 243—246 (1964).
[9] Peetre J., Mixed problems for higher order elliptic equations in two voriables. I, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **15**, 337 — 353 (1961), II, там же, **17**, 1—12 (1963).
[10] Вишик М. И., Эскин Г. И., Общие граничные задачи с разрывными граничными условиями, *Доклады АН СССР*, **158**, 1, 25—28 (1964).
[11] Вишик М. И., Эскин Г. И., Общие параболические интегро-дифференциальные уравнения, *Успехи математических наук*, **19**, 6, 224—226 (1964).

В. М. Глушков

АВТОМАТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОПТИМИЗАЦИИ МИКРОПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

В докладе описывается новый подход к формальному преобразованию алгоритмов, позволяющий решать многие интересные в практическом отношении задачи. Например, записав алгоритм умножения целых чисел, в соответствии с его определением, как многократное сложение числа с самим собою, можно преобразовать этот алгоритм в ту форму, которая обычно употребляется на практике. Основой для таких построений является рассмотрение особой пары алгебр (A, B), так что элементы первой алгебры отождествляются с некоторыми операциями второй алгебры и наоборот. Алгебры задаются с помощью образующих и определяющих соотношений, которые и используются для формального преобразования алгоритмов. Преобразования, задаваемые алгоритмами, отождествляются при этом с элементами алгебры A, а конкретные реализации алгоритмов выражаются различными представлениями этих элементов через образующие. Полученные результаты применяются к оптимизации микропрограммных управляющих систем, т. е. систем, сводящихся к взаимодействию двух автоматов, по крайней мере один из которых конечен (машина Тьюринга, вычислительная машина и т. п.).

Дается также автоматная интерпретация результатов Ю. И. Янова о преобразованиях схем программ, позволяющая существенно упростить доказательства и построить достаточно эффективные приемы минимизации записей программ и микропрограмм.

Е. С. Голод

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ БЕРНСАЙДОВСКОГО ТИПА

Дано отрицательное решение некоторых проблем бернсайдовского типа с «неограниченным показателем». Доказательство основывается на лемме о бесконечномерности ассоциативной алгебры, в которой достаточно мало определяющих соотношений.

А. А. Гончар

СКОРОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ И СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Доклад предполагается посвятить обзору результатов, относящихся к следующим вопросам:

1. Зависимость дифференциальных свойств функций и метрических свойств исключительных множеств недифференцируемости от скорости приближения функций рациональными дробями.

2. Свойства функций, представимых достаточно быстро сходящимися (со скоростью геометрической прогрессии и быстрее) последовательностями рациональных функций: сверхсходимость, квазианалитические классы и квазианалитическое продолжение функций комплексного переменного.

М. И. Граев, А. А. Кириллов

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

1. В последние годы произошло заметное смещение интересов в теории представлений — от изучения представлений комплексных и вещественных групп Ли к изучению представлений алгебраических групп G_K над произвольным полем K. Изучены представления группы матриц 2-го порядка с элементами из непрерывного локально-компактного поля K. Для этой группы установлено, что основные факты теории представлений (структура неприводимых представлений, характеры этих представлений, мера Планшереля, возникающая при разложении регулярного представления группы G_K) могут быть сформулированы в терминах, единых для всех полей K. Пусть теперь G — произвольная алгебраическая группа, определенная над полем k. Мы надеемся, что для широкого класса расширений K поля k можно построить теорию представлений групп G_K, в которой на первый план выступает структура исходной алгебраической группы G, а поле K играет роль параметра. При построении такой теории возникают задачи нового типа: описать множество значений «параметра» K, при которых теория представлений группы G_K удовлетворяет тем или иным требованиям. Например, принадлежность группы G_K типу I связана, по-видимому, с самодуальностью аддитивной группы поля K.

2. Следующий круг вопросов связан с теорией представлений групп G_A, где A — кольцо аделей (или вообще некоторое кольцо Тэйта). Остановимся на следующей задаче. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, определенная над полем k, G_A — ее группа аделей. Требуется изучить спектр представления группы G_A в пространстве $L^2(G_k \backslash G_A)$. Для широкого класса групп G, включающего все группы Шевалле — Диксона, решение этой задачи может быть проведено на основе метода орисфер. Пусть Z — унипотентный радикал какой-нибудь параболической подгруппы группы G. Траектории подгруппы Z_A в однородном пространстве X группы G_A называются орисферами этого пространства. Обозначим через Ω транзитивное семейство компактных орисфер. Метод орисфер состоит в изучении естественных отображений пространства $L^2(X)$ в пространство функций на Ω. Оказывается, что представление группы G_A в пространстве $L^2(\Omega)$ имеет простую структуру. В частности, если Ω — пространство компактных орисфер максимальной размерности, то кольцо операторов в $L^2(\Omega)$, перестановочных с операторами представления, является тензорным произведением коммутативного кольца и группового кольца группы Вейля исходной алгебраической группы G.

3. Во многих вопросах теории представлений естественно вводить некоторое пространство $\hat{G}$, двойственное к группе G. В случае когда G — алгебраическая группа, в качестве $\hat{G}$ можно взять совокупность простых двусторонних идеалов обертывающей алгебры $U(G)$ группы G. Это множество наделено естественной структурой некоммутативного кольцованного пространства. Изучение таких пространств и связанных с ними некоммутативных колец и тел, начатое в самое последнее время, обещает быть очень интересным.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и автоморфные функции («Обобщенные функции», вып. 6). Там же приведена подробная библиография.

[2] Gelfand I. M., Kirillov A. A., Sur les corps liés aux algébres enveloppants de l'algébres de Lie, Publ. Math. I.H.E.S., 1966.

Ю. Л. Ершов

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ

Элементарной теорией того или иного класса алгебраических объектов называется совокупность всех предложений узкого исчисления предикатов (УИП), истинных на всех объектах (моделях) заданного класса. Основными вопросами в изучении элементарных теорий являются вопросы нахождения системы аксиом для элементарной теории, элементарной классификации моделей заданного класса и разрешимости элементарных теорий.

Перечислим коротко основные результаты, полученные при изучении элементарных теорий полей. А. Тарский доказал разрешимость теорий алгебраически замкнутых и вещественно замкнутых полей. Существенно более простые доказательства этих результатов дал А. Робинсон. Разработанная им техника оказалась очень полезной и при решении других вопросов. Д. Робинсон показала, что теория поля рациональных чисел и любого поля алгебраических чисел, а также теория класса всех полей неразрешимы. А. И. Мальцев доказал неразрешимость теории поля рациональных функций от одной переменной над вещественно замкнутым архимедово упорядоченным полем. А. Тарский и Д. Робинсон распространили этот результат на поля рациональных функций от одной переменной над любым вещественно замкнутым полем. Р. Робинсон доказал неразрешимость теории поля рациональных функций над любым формально вещественным полем. А. И. Мальцев доказал неразрешимость поля формальных степенных рядов над полем с неразрешимой теорией при некоторых ограничениях на последнее. Докладчик и независимо Д. Акс доказали этот результат для любых полей с неразрешимой теорией. Докладчик показал неразрешимость теории поля рациональных функций от одной переменной над любым конечным полем характеристики $\neq 2$, а также неразрешимость теории класса всех полей фиксированной конечной характеристики $\neq 2$.

В последнее время Д. Аксом и С. Кочиным и независимо докладчиком доказано, что элементарная теория поля p-адических чисел для любого p имеет разрешимую теорию. Д. Акс и С. Кочин доказали также, что поле формальных степенных рядов от одной переменной над полем характеристики 0, имеющим разрешимую теорию, имеет разрешимую теорию. Докладчик исследовал элементарные теории максимальных нормированных полей и нашел, что в случае, когда имеются определенные теоремы единственности для максимальных нормированных полей, элементарная теория такого поля определяется однозначно элементарной теорией поля вычетов и элементарной теорией группы нормирования. В этом случае найдено понятие, которое с точки зрения элементарных теорий эквивалентно понятию максимального нормирования — понятие алгебраически полного нормирования (выполнимость леммы Гензеля и равенства $n = e \cdot f$), получены необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности алгебраически полных нормирований. Проведенное исследование позволило доказать ряд весьма общих теорем о разрешимости элементарных теорий различных классов алгебраически полных нормированных полей. Например, если $\mathfrak{F}$ — класс полей характеристики 0, имеющий разрешимую теорию, $\mathfrak{G}$ — класс линейно упорядоченных абелевых групп, имеющий разрешимую теорию, то и класс всех максимальных нормированных полей, у которых поле вычетов принадлежит $\mathfrak{F}$, а группа нормирования принадлежит $\mathfrak{G}$, также имеет разрешимую теорию. Теорема Д. Акса и С. Кочина о полях степенных рядов есть очень частный случай этой теоремы. Укажем еще одну теорему такого рода: пусть $\mathfrak{F}$ — класс совершенных полей характеристики $p=0$, имеющий разрешимую теорию, тогда класс колец векторов Витта над полями из $\mathfrak{F}$ имеет разрешимую теорию. Используя эти теоремы, можно указать большое число классов полей с разрешимой теорией, в том числе и полей характеристики $\neq 0$. Следует отметить, что в доказательствах не использовалась континуум-гипотеза, как это было сделано в работах Д. Акса и С. Кочина.

Примечательным фактом является получение чисто алгебраических результатов использованием техники теории моделей. Д. Акс и С. Кочин доказали справедливость гипотезы Артина о представимости нуля формами над p-адическими полями для почти всех p (при фиксированной степени формы). Используя признаки элементарной эквивалентности алгебраически полных полей, докладчик доказал гипотезу С. Ленга о поле формальных степенных рядов над C_i-полем в случае поля характеристики 0. Из этого результата без труда следует новое доказательство (без использования в доказательстве континуум-гипотезы) и уточнение теоремы Д. Акса и С. Кочина о гипотезе Артина.

Следующая теорема, полученная совсем недавно докладчиком, есть обобщение теоремы А. Тарского о разрешимости теории алгебраически замкнутых полей:

Класс всех сепарабельно замкнутых полей, класс всех сепарабельно замкнутых полей фиксированной характеристики, любое сепарабельно замкнутое поле имеют разрешимые теории.

И. А. Ибрагимов

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Пусть $x(t)$, $-\infty<t<\infty$, — стационарный в широком смысле процесс с непрерывным или дискретным временем. Одна из основных задач теории таких процессов, исследование которой было начато А. Н. Колмогоровым и Н. Винером (см. [1]), — задача наилучшего (в среднем квадратичном) линейного прогнозирования значения процесса $x(\tau)$ в будущем, $\tau>0$, по его значениям $x(t)$ в прошлом, $t\leqslant 0$. Если ввести порожденное процессом $x(t)$ гильбертово пространство $H=H_{-\infty}^{\infty}$ случайных величин со скалярным произведением $(\xi, \eta)=E\xi\bar{\eta}$, то наилучший прогноз $\tilde{x}(\tau)$ есть проекция $x(\tau)$ на подпространство $H_{-\infty}^{t}$, порожденное величинами $x(s)$, $-\infty<s\leqslant t$.

Естественным образом выделяется класс процессов, для которых ошибка прогноза $\sigma(\tau) = \|\tilde{x}(\tau) - x(\tau)\| \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} \|x(0)\| = \mathbf{E}^{1/2}|x(0)|^2$. Такие процессы называются *регулярными*. Для них $\bigcap H^t_{-\infty} = 0$, и, следовательно, норма проекции $\hat{\mathbf{E}}(\xi \mid H^{-\tau}_{-\infty})$ любого элемента $\xi \in H^{\infty}_0$ на $H^{-\tau}_{-\infty}$ стремится к нулю, когда $\tau \to \infty$.

Регулярность процесса означает отсутствие связей между любым элементом $\xi \in H^{\infty}_0$ и далеким прошлым $H^{-\tau}_{-\infty}$. Однако не исключено, что даже при очень больших τ могут найтись $\xi \in H^{\infty}_0$, хорошо приближаемые элементами из $H^{-\tau}_{-\infty}$.

2. Процесс $x(t)$ называется *вполне регулярным* (терминология Ю. А. Розанова), если

$$\varrho(\tau) = \sup_{\xi \in H^{-\tau}_{-\infty},\ \eta \in H^{\infty}_0} |\mathbf{E}\xi\bar{\eta}| \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $\mathbf{E}|\xi|^2 = \mathbf{E}|\eta|^2 = 1$. Для вполне регулярных процессов норма $\|\hat{\mathbf{E}}(\xi) \mid H^{-\tau}_{-\infty})\|$ равномерно мала ($\tau \to \infty$) для всех $\xi \in H^{\infty}_0$ с $\|\xi\| = 1$. С геометрической точки зрения полная регулярность означает, что минимальный угол между подпространствами $H^{-\tau}_{-\infty}$, H^{∞}_0 при $\tau \to \infty$ стремится к прямому (коэффициент регулярности $\rho(\tau)$ как раз равен косинусу этого угла). Для гауссовских процессов условие полной регулярности совпадает с условием сильного перемешивания М. Розенблатта (А. Н. Колмогоров, Ю. А. Розанов [2]).

3. Какие ограничения налагают на спектральную плотность $f(\lambda)$ процесса $x(t)$ условия регулярности, полной регулярности?

Случай регулярных процессов полностью исследован в основополагающих работах А. Н. Колмогорова и М. Г. Крейна, найденные ими ныне хорошо известные необходимые и достаточные условия регулярности заключаются в суммируемости $\ln f(\lambda)$ $\left(\frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\right)$ и, следовательно, налагают ограничения (довольно слабые) лишь на порядок нулей $f(\lambda)$.

При исследовании спектральных условий регулярности, кроме отмеченной геометрической интерпретации, широко используются аналитические методы. В основе их использования — изометрия $x(t) \to e^{it\lambda}$ между $H^{\infty}_{-\infty}$ и пространством $L_2(f)$ функций $\varphi(\lambda)$, интегрируемых с квадратом с весом $f(\lambda)$ ($\|\varphi\|^2_f = \int |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda$), сопоставляющая задаче случайных процессов некоторую задачу теории функций (как правило, задачу весовых приближений).

Так, регулярность $x(t)$ эквивалентна неполноте в $L_2(f)$ системы функций $e^{i\lambda t}$, $t \leqslant 0$.

Изучение структуры подпространств, порожденных течением процесса $x(t)$, когда $t \in A$, эквивалентно изучению структуры замыкания в $L_2(f)$ семейства $e^{it\lambda}$, $t \in A$. (Очень интересные и глубокие результаты в этом направлении содержатся в недавней работе Н. Левинсона и Х. Маккина [3].)

Коэффициент регулярности в терминах с. п. выглядит следующим образом:

$$\varrho(\tau) = \sup_{\|\varphi\|_f = \|\psi\|_f = 1} \left| \int \varphi(\lambda)\, \psi(\lambda)\, e^{i\lambda\tau} f(\lambda)\, d\lambda \right|, \qquad (1)$$

где sup берется по всем граничным значениям функций класса D в круге или верхней полуплоскости (см. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций).

Таким образом, аналитически проблема полной регулярности сводится к описанию класса неотрицательных суммируемых функций, для которых правая часть (1) стремится к нулю с ростом τ.

А. Н. Колмогоров и Ю. А. Розанов [2] показали, что проблема полной регулярности эквивалентна также некоторой своеобразной задаче равномерных весовых приближений.

4. В случае вполне регулярных процессов ограничения на нули (ср. 3°) много жестче: последние, по существу, должны иметь целый четный порядок. Кроме того, возникают дополнительные ограничения на гладкость $f(\lambda)$: она, например, не может иметь разрывов первого рода. Все эти результаты суть следствия следующей теоремы:

Спектральная плотность $f(\lambda)$ вполне регулярного процесса с дискретным временем необходимо представляется в виде

$$f(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2 g(\lambda), \qquad (2)$$

где P — полином, а первообразная $G(\lambda)$ функции $g(\lambda)$ такова, что

$$\sup_{\lambda,\, |h| \leq \delta} \frac{|G(\lambda+h) + G(\lambda-h) - 2G(\lambda)|}{G(\lambda+h) - G(\lambda)} = \omega_G(\delta) \downarrow 0, \quad \delta \to 0.$$

Сходное представление имеет место и для вполне регулярных процессов с непрерывным временем.

Для процессов с дискретным временем существование разложения (2) довольно близко к достаточным условиям. Более того, чтобы $\rho(\tau)$ убывал достаточно быстро, степенным образом, экспоненциальным или быстрее любой экспоненты, необходимо и достаточно, чтобы в представлении (2) функция $g(\lambda)$ была бы строго положительная и достаточно гладкая (нужное число раз дифференцируема, аналитична в полосе, целая). Эти результаты в значительной степени базируются на теоремах Джексона — С. Н. Бернштейна из теории приближений (ср. 3°).

5. Последние результаты не имеют полной аналогии в случае процессов с непрерывным временем, дополнительные трудности

возникают при изучении поведения $f(\lambda)$, когда $\lambda \to \infty$. (Например, процесс с целой аналитической спектральной плотностью $e^{-\lambda^2}$ даже не регулярен.)

Некоторое представление о возникающей специфике дают следующие результаты:

Пусть с. п. процесса $x(t)$ с непрерывным временем представима в виде $f(\lambda) = |B(\lambda)|^2 g(\lambda)$, где $B(\lambda)$ — ограниченная целая функция конечной степени, а $g(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln g(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda < \infty$;

б) *Функция* $\ln g(\lambda)$ *равномерно непрерывна на* $(-\infty, \infty)$, *и если* $a(s)$*—ее модуль непрерывности, то* $\int\limits_0^{\infty} \frac{a(s)}{1+s^2} ds < \infty$.

Тогда процесс $x(t)$ вполне регулярен.

Пусть с. п. $f(\lambda)$ процесса $x(t)$ имеет вид $f(\lambda) = |B(\lambda)|^{-2}$, где $B(\lambda)$ — целая функция конечной степени, нули z_j которой удовлетворяют требованию $\sum\limits_j \left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_j}\right| < \infty$. *Тогда* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \rho(2^j) < \infty$ *в том и только том случае, если* $\sup\limits_{-\infty<\lambda<\infty} \sum\limits_j \left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_j-\lambda}\right| < \infty$.

6. Пусть $\boldsymbol{x}(t)$ — векторный n-мерный процесс, т. е. $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Теперь спектральная плотность есть матрица-функция $\boldsymbol{f}(\lambda) = \| f_{ij}(\lambda) \|$. Распространение результатов Колмогорова — Крейна (п. 3°) на этот случай весьма нетривиально и было предметом глубоких исследований Засухина, Ю. А. Розанова, Н. Винера и Мазани, Р. Ф. Матвеева (см. [1]). Оказывается, что матрица $f(\lambda)$ имеет постоянный ранг $m \leqslant n$. Для невырожденных процессов ($m = n$) регулярность процесса эквивалентна суммируемости функций $\ln \det f(\lambda)$ $\left(\frac{\ln \det f(\lambda)}{1+\lambda^2}\right)$. Если $m < n$, то все элементы матрицы $f(\lambda)$ можно выразить через ее максимальную невырожденную часть и функциональные коэффициенты $a_{pq}(\lambda)$; в регулярном случае все $a_{pq}(\lambda)$ суть граничные значения функций ограниченной характеристики в круге (в верхней полуплоскости).

Коэффициент регулярности в рассматриваемом случае имеет вид

$$\varrho(\tau) = \sup_{\varphi, \psi} \left| \int (f(\lambda)\, \varphi(\lambda),\ \psi(\lambda))\, d\lambda \right|,$$

где sup надо брать по n-мерным вектор-функциям $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, компоненты которых суть граничные значения функций класса D. Условие $\varrho(\tau) \to 0$ по-прежнему налагает ограничения на гладкость $f_{ij}(\lambda)$ и на порядок нулей $\det \mathfrak{f}(\lambda)$ ([8]).

Условие полной регулярности налагает весьма жесткие ограничения также на коэффициенты связи $a_{pq}(\lambda)$. Для процессов с дискретным временем они должны быть рациональными функциями $e^{i\lambda}$, а в случае непрерывного времени — отношением ограниченных целых функций конечной степени, причем на нули знаменателя следует наложить ограничения типа рассмотренных в п. 5.

7. Перечисленные выше результаты дают достаточно полное представление о структуре спектра вполне регулярных процессов. Однако проблема отыскания необходимых и достаточных условий остается открытой. В связи с этим особенно интересно отметить, что в работе Хельсона и Сеге [4] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы $\rho(1) < 1$ (время дискретное). В [5] А. М. Ягломом показал, что для рациональных спектральных плотностей значение $\rho(\tau)$ есть максимальный корень некоторого детерминантного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, 1963.
[2] Колмогоров А. Н., Розанов Ю. А., Теория вероятностей и ее применение, 5, 222, (1960).
[3] Levinson N., McKean H. P., Jr, *Acta Math.*, **112**, 1—2 (1964).
[4] Helson H. Szegö G., *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, **51**, 107 (1960).
[6] Yaglom A. M., Bernoully (1723), Bayes (1763), Laplace (1813) Anniversary Vol., Berlin, 1965.
[6] Ибрагимов И. А., *Доклады АН СССР*, **147**, 1282 (1962).
[7] Ибрагимов И. А., *Теория вероятностей и ее применения*, **10**, 1 (1960).
[8] Ибрагимов И. А., *Доклады АН СССР*, **162**, 5 (1965).
[9] Ибрагимов И. А., *Доклады АН СССР*, **161**, 1 (1965).

О. А. Ладыженская

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Первая часть доклада будет посвящена линейным и квазилинейным уравнениям параболического типа. Вторая — исследованиям последнего времени по уравнениям Навье — Стокса, в том числе конечно-разностным схемам для начально-краевой задачи.

Ю. И. Манин

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И КОГОМОЛОГИИ ГАЛУА

Рациональные поверхности над совершенным полем и когомологии Галуа группы Кремоны. Приведение к стандартному виду: поверхности с рациональным и эллиптическим пучком. Теорема единственности для рациональных пучков. Торы, связанные с поверхностью. Число Тамагавы как бирациональный инвариант. Конечные и числовые основные поля. Принцип Хассе для группы Кремоны. Вопрос о существовании рациональных точек над полями C_1.

Г. И. Марчук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

Теория переноса излучения прежде всего одна из ведущих проблем современной науки, бурно развивающаяся на основе достижений теоретической физики и быстро проникающая в самые различные области естествознания и техники. В настоящее время теория переноса постепенно становится частью математической физики. Первоначальную ведущую роль в разработке теории переноса излучения играла астрофизика, а начиная с 40-х годов эта роль перешла к атомной физике. Необходимо отметить, что именно в связи с проблемами атомной физики были разработаны мощные математические методы решения задач теории излучения, в частности, машинные методы. Обзор исследований в этой области можно найти в работах [1], [2], [3], [4].

Весьма общая математическая формулировка стационарных задач теории переноса излучения дается с помощью интегродифференциальных уравнений Больцмана

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\Omega\nabla\varphi+\Sigma\varphi-\int dv'\int d\Omega'\varphi\ (\Sigma,\ \Omega',\ v')\,w\,(\Omega'\to\Omega,\ v'\to v)=f.$$

Классы функций, в которых рассматриваются данные задачи, изучались в работах [5], [6].

Важное значение имеет сопряженное уравнение

$$-\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}-\Omega\nabla\varphi^*+\Sigma\varphi^*-$$
$$-\int dv'\int d\Omega'\varphi^*(\Sigma,\ \Omega',\ v')\,w\,(\Omega\to\Omega',\ v\to v')=p,$$

где p — существенная характеристика исследуемого функционала задачи. Теория сопряженных уравнений, первоначально разработанная для однородных уравнений [7], [8], в дальнейшем была обобщена на случай уравнений неоднородных [9], [10]. Использование сопряженных уравнений позволило в общем виде сформулировать теорию возмущений для линейных функционалов задач теории переноса и получить большое число практически важных следствий.

Во многих случаях для решения одномерных задач теории переноса используют метод сферических гармоник [2], [5], позволяющий кинетическое уравнение свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье. Вводя в рассмотрение вектор-функции для четных и нечетных коэффициентов Фурье, можно прийти к системе двух векторно-матричных уравнений с соответствующими граничными условиями. Решение конечно-разностного аналога этой системы находится с помощью метода векторно-матричной факторизации [3].

Интерес представляет другой численный метод решения уравнений сферических гармоник, основанный на ортогонализации собственных векторов задачи [11]. Указанный метод состоит в решении краевой задачи для системы уравнений сферических гармоник с помощью задач с начальными данными. Устойчивый алгоритм счета достигается применением специального метода фильтрации ошибок, возникающих в процессе счета. Оба указанных метода являются безытерационными.

Широкое применение в теории переноса нашли различные итерационные методы: метод характеристик [12], S_n-метод [13], различные их модификации [14], [15] и др. Сущность этих методов состоит в последовательном осуществлении реализации ряда Неймана по столкновениям частиц. Различие методов состоит в способах обращения дифференциальной части уравнений переноса. Эти методы эффективно реализуются на машинах и успешно используются для решения одномерных и многомерных задач теории переноса.

В связи с решением уравнений переноса важную роль играет диффузионное приближение. Особое место при этом занимают многомерные диффузионные проблемы в классе разрывных функций. Алгоритмы построения разностных схем для указанных уравнений даны в работах [16], [17].

Эффективные методы решения многомерных разностных уравнений эллиптического типа, связанные с методом попеременных направлений, были рассмотрены в ряде исследований [18], [19], [20] и др. Широкое развитие получили методы экономичного счета, основанные на схемах расщепления сложных задач на простейшие. Первые результаты в этом направлении были получены в работах [21], [22], [23] и др. Обзор основных результатов данного направления содержится в работах [24], [25], [26] и др. Методы попеременного направления, а также методы, основанные на схемах расщепления, тесно связаны с проблемой универсального алгоритма [27].

В последние годы были разработаны новые методы решения нестационарных и стационарных задач теории переноса, связанные с расщеплением интегро-дифференциальных операторов задач на простейшие [28], [29], [30], [14]. Метод расщепления кинетического уравнения также тесно связан с универсальным алгоритмом. Возникающие в процессе расщепления параметры позволили поставить, а в ряде случаев найти пути оптимизации вычислительного алгоритма. В результате решение стационарных и нестационарных задач теории переноса оказалось возможным свести к реализации простейших вычислительных алгоритмов и универсальному подходу к решению широкого класса одномерных и многомерных задач.

К направлению работ, связанных с итерационными алгоритмами, относится также ряд других исследований. Сущность алгоритмов, рассматриваемых в этих работах, состоит в использовании двух операций: простой итерации по столкновениям — на первом этапе реализации алгоритма и нахождению главной части ошибки в приближенном решении — на втором. В первых работах этого направления [31] были указаны некоторые способы построения уравнения для вычисления ошибки итерационного процесса. Во многих случаях они оказались эффективными. В дальнейшем в работе [32] были исследованы некоторые нелинейные итерационные схемы.

Общий подход к построению уравнения для ошибок был сформулирован в работе [33] на основе использования специалальных конструкций, связанных с применением сильно-эллиптических операторов (КР-метод). Наряду с весьма полным теоретическим обоснованием метода сформулированы конкретные подходы к оптимизации вычислительного алгоритма. КР-метод может быть использован для решения одномерных и многомерных задач теории переноса.

Существенное развитие в последние годы получили статистические методы решения уравнений переноса — методы Монте-Карло [34], [35], [36], [37]. Благодаря использованию все более совершенной вычислительной техники методы Монте-Карло приобретают большое значение в решении задач теории переноса. Можно предположить, что уже в близком будущем методы математического моделирования, основанные на методе Монте-Карло, окажутся мощным математическим аппаратом для решения наиболее сложных задач теории переноса. Прогресс, который уже имеется в способах уменьшения дисперсии, а также новые подходы моделирования случайных величин в своем развитии приближают формирование весьма универсальных и экономичных методов решения задач.

Оригинальный подход к решению уравнения переноса излучения, основанный на принципах инвариантности, был предложен в работе [38] и развит во многих направлениях [39], [40], [41]. Этот метод позволяет свести решение уравнения переноса излучения к решению линейных или нелинейных альбедных уравнений простых конструкций. Метод нашел существенное применение в задачах астрофизики и нейтронной физики.

Существенный интерес для теории переноса имеют вариационные методы решения задач. Впервые примененные для решения уравнений Пайерса, они позволили получить ряд важных результатов как в нейтронной физике, так и в других научных направлениях [42], [43]. Важный этап был достигнут при формулировании вариационного принципа непосредственно для кинетического уравнения [44].

Прогресс в области развития вычислительных методов теории переноса ставит перед математиками комплекс теоретических проблем, развитие которых будет стимулировать прогресс в создании новых вычислительных методов. Существенные результаты в этом направлении уже получены в работах [5], [6], [45], [46], [47] и др.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Marshak R. E., Theory of the slowing down of neutrons by elastic collision with atomic nuclei, *Reviews Mod. Phys.*, **19**, 185—238 (1947).

[2] Davison B., Neutron transport theory, Oxford, 1957.

[3] Марчук Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, Госатомиздат, 1961.

[4] Weinberg A. M., Winger E. P., The physical theory of neutron Chain Reactors, Chicago, 1958.

[5] Владимиров В. С., Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, Труды математического института им. В. А. Стеклова, АН СССР, **XI**, 1961.

[6] Марек И., Некоторые математические задачи теории ядерных реакторов на быстрых нейтронах, *Aplikace matematiky*, **8**, 6 (1963).

[7] Fucks K., Perturbation theory in neutron multiplication problems, *Proc. Phys. Soc.*, **62**, 791 (1949).

[8] Усачёв Л. Н., Уравнение для ценности нейтронов, кинетика реакторов и теория возмущений, сборник «Реакторостроение и теория реакторов», Москва, 1955.

[9] Кадомцев Б. Б., О функции влияния в теории переноса лучистой энергии, *Доклады АН СССР*, **113**, 3 (1957).

[10] Марчук Г. И., Орлов В. В., К теории сопряженных функций, сборник «Нейтронная физика», Москва, 1961.

[11] Годунов С. К., Метод ортогональной прогонки для решения систем разностных уравнений, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **2**, 6 (1962).

[12] Владимиров В. С., Численное решение кинетического уравнения для сферы, сборник «Вычислительная математика», № 3, 1958.

[13] Карлсон Б., Белл Дж., Решение транспортного уравнения S_n-методом, сборник «Труды Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии», избранные доклады иностранных ученых, Г.З.—физика ядерных реакторов, Москва, 1959.

[14] Гольдин В. Я., Характеристическая разностная схема для нестационарного кинетического уравнения, *Доклады АН СССР*, **133**, 748—751 (1960).

[15] Николайшвили Ш. С., Односкоростная задача об угловых распределениях нейтронов, сборник «Теория и методы расчета ядерных реакторов», Москва, 1962.

[16] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Об однородных разностных схемах, *Доклады АН СССР*, **122**, 4 (1958).

[17] Варга Р., Численные методы решения многомерных многогрупповых дифференциальных уравнений, сборник «Теория ядерных реакторов», Москва, 1963.

[18] Peaceman D. W., Rachford H. H., The numerical solution of parabolic and eliptic differential equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **3**, 28—41 (1955).

[19] Douglas J., Rachford H. H., On the numerical solution of heat conduction problems in two and three spase variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**, 421—439 (1956).

[20] С а у л ь е в В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Москва, 1960.
[21] Я н е н к о Н. Н., Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности, *Доклады АН СССР*, **125**, 6 (1959).
[22] Д ь я к о н о в Е. Г., О некоторых разностных схемах для решения краевых задач, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **2**, 1 (1962).
[23] С а м а р с к и й А. А., Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **2**, 5 (1962).
[24] С а м а р с к и й А. А., О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики, *Aplikace matematiky*, **10**, 2, 146—163 (1965).
[25] Д ь я к о н о в Е. Г., Разностные схемы второго порядка точности с расщепляющимся оператором для многомерных параболических уравнений с переменными коэффициентами, сборник «Вычислительные методы и программирование», Изд-во МГУ, 1965,
[26] М а р ч у к Г. И., Я н е н к о Н. Н., Применение метода расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики., доклад на конгрессе ИФИП, июль 1965, Нью-Йорк.
[27] Ф а д е е в Д. К., Ф а д д е е в а В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Москва, 1962.
[28] М а р ч у к Г. И., Я н е н к о Н. Н., Решение многомерного кинетического уравнения методом расщепления, *Доклады АН СССР*, **157**, 6 (1964).
[29] М а р ч у к Г. И., С у л т а н г а з и н У. М., К обоснованию метода расщепления для уравнений переноса излучения, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **5**, 4 (1965).
[30] М а р ч у к Г. И., П е н е н к о В. В., С у л т а н г а з и н У. М., О решении кинетического уравнения методом расщепления, «Труды семинара по прикладной и вычислительной математике», Новосибирск, 1965.
[31] М о р о з о в В. Н., К вопросу о решении кинетических уравнений с помощью S_n-метода, сборник «Теория и методы расчета реакторов», Москва, 1962.
[32] Г о л ь д и н В. Я., Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **4**, 5 (1964).
[33] Л е б е д е в В. И., О КР-методе ускорения сходимости итераций при решении кинетического уравнения, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **6**, 2 (1966).
[34] Г е л ь ф а н д И. М., Ф е й н б е р г С. М., Ф р о л о в А. С., Ч е н ц о в Н. Н., О применении метода случайных испытаний (метода Монте-Карло) для решений кинетического уравнения, доклад № 2141, «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии», доклады советских ученых, т. 2, Москва, 1959.
[35] Р и х т м а й е р Р., Методы Монте-Карло, сборник «Теория ядерных реакторов», Москва, 1963.
[36] F a n o U., S p e n c e r L. V., B e r g e r M. J., Penetration and diffusion of X-rays, Handbuch der Physik Band XXXVIII/2, Neutronen und Vervandte Gammastrahlprobleme, Berlin — Göttingen —Heidelbert, 1959.
[37] H a m m e r s l e y J. M., H a n d s c o m b D. C., Monte-Carlo methods, London—New York, 1964.
[38] А м б а р ц у м я н В. А., Рассеяние и поглощение света в планетных атмосферах, *Ученые записки ЛГУ*, **82** (1941).
[39] А м б а р ц у м я н В. А., М у с т е л ь Э. Р., С е в е р н ы й А. Б., С о б о л е в В. В., Теоретическая астрофизика, гл. 8, Москва, 1952.
[40] Ч а н д р а с е к а р Ш., Перенос лучистой энергии, Москва, 1953.

[41] Bellman R., Kalaba R., Prestrud M., Invariant imbedding and radiative transfer in slabs of definite thickness, New York, 1963.
[42] Le Caine J., Application of a variational method to Milne's problem, *Phys. Rev.*, **72**, 564 (1947).
[43] Davison B., Remark on the variational methods, *Phys. Rev.*, **71**, 694 (1947).
[44] Владимиров В. С., О некоторых вариационных методах приближенного решения уравнения переноса, *Вычислительная математика*, **7** (1961).
[45] Гермогенова Т. А., Принцип максимума для уравнения переноса. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **1**, 1 (1962).
[46] Масленников М. В., Проблема Милна с произвольной индикатрисой, *Доклады АН СССР*, **118**, 2 (1958).
[47] Сборник «Теория ядерных реакторов», под ред. Г. Биркгофа и Э. Вагнера, Москва, 1963.

Б. С. Митягин, А. Пелчинский

ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И АППРОКСИМАТИВНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Инварианты типа аппроксимативной размерности (А. Колмогоров, А. Пелчинский) позволили в последнее время получить ряд результатов в теории линейных топологических пространств, теории функций и т. д. Их изучение составляет важный раздел в абстрактной теории приближений. Простейший такой инвариант с каждым линейным оператором $T : X \to Y$ из одного банахова пространства в другое связывает числовую последовательность

$$a(T,\ n) = \inf_{y_1,\ \ldots,\ y_n \in Y} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \|Tx - y_i\|.$$

Рассматривается несколько (прямых и двойственных) таких характеристик, определяемых по скорости приближения образа единичного шара (или самого оператора) конечными множествами, конечномерными подпространствами (или операторами). Область применимости каждого инварианта, в частности $K(a)$, определяется как совокупность тех операторов $T : X \to Y$, для которых $a(T,\ n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Теоремы сложения (А. Дынин, Б. Митягин, Г. Хенкин, А. Питш) дают, например, оценки последовательности $a(ST,\ \cdot)$ по $a(S,\ \cdot)$ и $a(T,\ \cdot)$; правда, для многих инвариантов таких оценок еще нет.

Численный подсчет инвариантов (А. Колмогоров, А. Пелчинский, А. Витушкин, В. Тихомиров, К. Бабенко, Б. Митягин). Характеристики различных классов операторов и взаимные связи между инвариантами (А. Питш, А. Пелчинский, Б. Митягин, Г. Хенкин). Наименее изученными являются инварианты

$$d(T,\ n) = \sup_{E \subset X,\ \dim E = n} \inf_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} \|Tx\|,$$

$$e(S,\ n) = \sup_{\substack{\operatorname{rang} q_y = \operatorname{rang} q_x = n \\ q_x = q_y S}} \inf_{\|q_x x\| = 1} \|Sx\|.$$

Классы $K(d)$ и $K(e)$ содержат классы интегральных и p-абсолютно суммирующих ($1 \leqslant p < 2$) операторов. Они содержатся в классе строго сингулярных (Т. Като) операторов, и для них верна теория Рисса; $K(e)$ содержится в классе строго косингулярных операторов (А. Пелчинский).

Приложения к проблеме классификации. Инварианты линейных топологических пространств (А. Колмогоров, А. Пелчинский). Критерий ядерности в терминах аппроксимативной размерности (Б. Митягин). Безусловные и абсолютные базисы (А. Дынин и Б. Митягин, А. Пелчинский и И. Зингер). Аппроксимативная размерность равномерных пространств (Ч. Бессага). Нерешенные задачи и вопросы.

Н. Н. Моисеев

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ВАРЬИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ, И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Основное содержание доклада — изложение численных методов решения аддитивных задач оптимального управления при наличии фазовых ограничений.

1. Центральным является понятие элементарной операции, которая двум близким точкам P_1 и P_2 фазового пространства и отрезку времени τ ставит в соответствие оптимальную траекторию $x(t)$, соединяющую эти две точки, соответствующие ей управление $u(t)$ и значение функционала $I(x, u)$. В пространстве $x(t)$ строится сетка, вершины которой образуют множество, называемое пространством состояний. При помощи элементарной операции задача отыскания оптимального управления сводится к отысканию кратчайшего пути на графе, вершинами которого являются точки пространства состояний. Длина звена, соединяющего точки P_1 и P_2,— это значение функционала, соответствующее оптимальному переходу системы из состояния P_1 в P_2 за время τ, где τ — длина шага по временной переменной.

2. Редукция задачи к теории графов позволяет избежать трудностей, связанных с наличием фазовых ограничений. Описываются три метода отыскания кратчайшего пути на том графе специального вида, который был построен при помощи элементарной операции: метод глобального перебора, метод последовательных приближений и метод локальных вариаций в пространстве состояний. Метод глобального перебора эквивалентен методу динамического программирования для дискретной многошаговой задачи, к которой сводится исходная задача после задания пространственно-временной сетки и реализации элементарной операции. Эти методы стандартизированы.

3. Построение элементарной операции сводится к решению некоторой системы трансцендентных уравнений. Приводится общая схема ее стандартизации и рецептура эффективной реализации элементарной операции для различных классов задач оптимального управления.

4. Приводится исследование устойчивости развиваемых конечно-разностных схем при условии, что шаг сетки стремится к нулю. Доказываются две группы теорем. В первой, исходя из априорных предположений о дифференциальных свойствах функции Беллмана, формулируются необходимые и достаточные условия устойчивости. Во второй устанавливается связь свойств правых частей изучаемой системы уравнений и функционала с дифференциальными свойствами функции Беллмана. Эти теоремы аналогичны теоремам вложения в теории краевых задач математической физики. Под устойчивостью рассматриваемых разностных схем понимается тот факт, что последовательность фазовых траекторий, получаемая при дроблении сетки, равномерно сходится к оптимальной траектории. Последовательность управлений u_i сходится слабо в смысле сходимости последовательности функционалов $I(x_i, u_i)$.

5. Приводятся разнообразные примеры динамических задач, решенных излагаемыми методами. Эти примеры относятся главным образом к динамике космических аппаратов, самолетов и кораблей, движение которых стеснено различными фазовыми ограничениями. Рассматривается возможность использования данных методов при решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и задач на собственные значения для самосопряженных операторов. Приводятся примеры, демонстрирующие эффективность методов.

6. Рассматривается широкий класс задач оптимального планирования (в частности, двухиндексные задачи линейного программирования), для которых могут быть использованы методы, основанные на понятии вариаций в пространстве состояний. Показано, что задачи сетевого планирования также формально укладываются в рассматриваемую схему.

7. Рассмотрен класс краевых задач и задач на собственные значения, которые сводятся к минимизации функционалов вида

$$\int_{\Omega} F(u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy})\, d\Omega \tag{1}$$

при наличии ограничений на функцию u и на ее производные, здесь Ω — некоторая плоская область. При помощи аппроксимации по одному из переменных задача минимизации функционала (1) может быть сведена к одномерной задаче, для которой развитые методы дают стандартную процедуру решения.

Метод локальных вариаций может быть непосредственно перенесен на многомерные вариационные задачи. Рассмотрен ряд плоских задач математической физики, которые сводятся к отысканию минимума функционала (1), в частности, изгиб мембраны, кручение упруго-пластических стержней, расчет фигур равновесия, жидкости, подверженной действию сил поверхностного, и др.

8. Обсуждается возможность сочетания методов варьирования в пространстве состояний с приемами эвристического программирования. Вводится понятие диспетчерского решения. Развитые методы позволяют экономным образом осуществлять процедуру «уточнения диспетчерского решения». В динамических задачах, где существует естественное понятие окрестности фазовой траектории, методы локального варьирования и метод последовательных приближений позволяют определить локальный экстремум. В задачах планирования (например, в задачах типа распределения ресурса) можно говорить только о локальном минимуме относительно некоторой топологии. Так же как и понятие диспетчерского решения, понятие окрестности в таких задачах носит эвристический характер. На примерах анализа больших систем показывается целесообразность такого подхода и обсуждаются возможные постановки математических задач.

Доклад является обзором работ группы сотрудников Вычислительного центра Академии наук, в которой, кроме автора доклада, участвовали Н. Я. Багаева, И. Б. Ваннярский, И. А. Крылов и Ф. Л. Черноусько.

С. П. Новиков

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ПОНТРЯГИНА

1. Рациональные классы Понтрягина и их связь с фундаментальной группой. Теорема о топологической инвариантности. Следствия. Проблема гомотопической инвариантности этих классов. Нерешенные проблемы. Результаты опубликованы в работах автора [1—4] и В. А. Рохлина [5]. В работе [4], приложение 2, указаны открытые вопросы. Основной из них: Пусть $x \in H_{4k}(M^{n+4k}, Q)$ и $Dx = y_1 \circ \ldots \circ y_n$, $y_i \in H^1(M, Q)$. Изучить скалярное произведение $(L_k(M^{n+4k}), x)$ с точки зрения гомотопических инвариантов (на накрывающих).

2. Классы Понтрягина — Хирцебруха по конечным модулям; известно, что они, вообще говоря, комбинаторно неинвариантны (Милнор). Для гомологических многообразий над Q_m автором и Рохлиным введены классы $\alpha_k l_k \in H^{4k}(M, Z_m)$, где Q_m — рацио-

нальные числа со знаменателем, не делящимся на m (здесь α_k — целые числа, зависящие лишь от k), причем $\alpha_k l_k = \alpha_k L_k(p_1, \ldots, p_k)$ в гладком случае. Доказана топологическая инвариантность $(l_k, x) \in Z_m$, $x \in H_{4k}(M^{4k+1}, Z_m)$ при условии $(D\beta x)^2 = 0$, где β—гомоморфизм Бокштейна. Для гладких многообразий M^n автором несколько позднее доказана (на основе определения классов l_k автора и Рохлина, но другим методом) топологическая инвариантность классов $\alpha_k l_k = \alpha_k L_k(p_1, \ldots, p_k)$ для всех k, n.

Отсюда вытекает теорема: существуют такие числа λ_q, что стабильный касательный пучок $\tau(M^q) \in KO(M_q)$, умноженный на λ_q, топологически инвариантен. Эти числа λ_q, зависят лишь от q и не зависят от M^q.

Из этих результатов вытекают следствия о топологическом различении классических линз размерности $\geqslant 5$, если они гомотопически эквивалентны:

Следствие. Все 5-мерные классические линзы M^5, где $\pi_1(M^5) = Z_5$, негомеоморфны, если их классы Понтрягина различны (такие существуют, причем гомотопически эквивалентные друг другу).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Новиков С. П., *Доклады АН СССР*, **162**, 6 (1965).
[2] Новиков С. П., *Доклады АН СССР*, **163**, 2 (1965).
[3] Новиков С. П., *Известия АН СССР*, **29**, 6 (1965).
[4] Новиков С. П., *Известия АН СССР*, **30**, 1 (1966).
[5] Рохлин В. А., *Известия АН СССР*, **30**, 2 (1966).

В. П. Паламодов

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В докладе излагается теорема об экспоненциальном разложении решений общих однородных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и ее важнейшие следствия.

1. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ

Пусть $p(iD)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами общего вида, представляющий собой матрицу размера $t \times s$, образованную многочленами от операторов $iD = i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}$, действующих в R^n. Рассмотрим соответствующую однородную систему уравнений

$$p(iD)\,u = 0, \qquad (1)$$

где u — неизвестная вектор-функция, принадлежащая $[\mathcal{D}'(\Omega)]^s$ (Ω — область в $\boldsymbol{R}^n$). Теорема об экспоненциальном разложении содержит описание всех решений этой системы в случае, когда область Ω выпукла.

Пусть $\mathcal{P}$ — кольцо всех многочленов от n переменных $z \in \boldsymbol{C}^n$, $p'(z)$ — матрица, транспонированная по отношению к матрице $p(z)$, а $p'\mathcal{P}^t = \mathfrak{p}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l$ — примарное представление $\mathcal{P}$-подмодуля $p'\mathcal{P}^t \subset \mathcal{P}^s$. Для каждого λ рассмотрим радикал $\sqrt{(\mathfrak{p}_\lambda)}$ подмодуля $\mathfrak{p}_\lambda \subset \mathcal{P}^s$ и ассоциированное с ним алгебраическое многообразие $N_\lambda \subset \boldsymbol{C}^n$. Носитель модуля $M = \mathcal{P}^s/p'\mathcal{P}^t$ равен $N = \bigcup N_\lambda$ Для каждого λ строится специальный дифференциальный оператор $d_\lambda(z, D)$: $\mathcal{P}^s \to \mathcal{P}^{l_\lambda}$ с полиномиальными коэффициентами, такой, что последовательность

$$0 \to \mathfrak{p}_\lambda \to \mathcal{P}^s \xrightarrow{d_\lambda} \left[\mathcal{P}/\sqrt{(\mathfrak{p}_\lambda)}\right]^{l_\lambda}$$

точна.

Основная теорема (Эренпрайс [1], Паламодов [2] — [6]):

Всякое решение u системы (1), *принадлежащее* $[\mathcal{D}'(\Omega)]^s$ (*область* Ω *выпукла*), *является функционалом вида*

$$(u, \varphi) = \sum_\lambda \int_{N_\lambda} d_\lambda(z, D)\,\tilde{\tilde{\varphi}}(z)\,\mu_\lambda, \quad \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^s, \tag{2}$$

где μ_λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant l)$ — *мера, сосредоточенная на* N_λ *и такая, что функционал*

$$(v_\lambda, \psi) = \int_{N_\lambda} \tilde{\psi}(z)\,|\mu_\lambda|, \quad \psi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^{l_\lambda}$$

принадлежит $[\mathcal{D}(\Omega)]^{l_\lambda}$, *причем* (*многозначное*) *отображение* $u \to \{v_\lambda\}$ *непрерывно. Обратно, всякий функционал вида* (2), *где меры* μ_λ *удовлетворяют этому условию, принадлежит* $[\mathcal{D}'(\Omega)]^s$ *и является решением системы* (1).

2. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (1)

Представление (2) немедленно сводит изучение локальных свойств решений уравнения (1) к исследованию особенностей в расположении множества N в $\boldsymbol{C}^n$. На этом пути представление (2) позволяет получить (и обобщить на случай общей системы (1)) любой из многочисленных известных сейчас результатов, касающихся локальных свойств решений системы (1).

В случае когда область Ω неограничена, удается установить зависимость между скоростью роста решения на бесконечности и поведением соответствующих мер $|\mu_\lambda|$ при $|z| \to \infty$. Это обстоятельство позволяет изучить связь между гладкостью решения и скоростью его роста на бесконечности. В частности, если оператор p является гипоэллиптическим по переменным $x' = (x_1, \ldots, x_k)$ в смысле Гординга — Мальгранжа (мы имеем в виду очевидное обобщение этого понятия), то при определенных ограничениях роста на бесконечности экспоненциального типа решения системы (1) оказываются аналитическими по x'. Поэтому дополнительные условия

$$D^i_{x'} u \,|_{x'=0} = 0, \ \forall i$$

влекут за собой тривиальность решения, и этот факт в его точной форме является обобщением теоремы Гельфанда — Шилова о классах единственности задачи Коши.

3. ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ, НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ И ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (1)

Простейшая задача о продолжении решений системы (1) формулируется так. Пусть Ω — некоторая область в $\boldsymbol{R}^n$, а $K \subset \Omega$ — компакт. Требуется найти условия, при которых данное решение системы (1) в области $\Omega \diagdown K$ является сужением некоторого решения той же системы в области Ω. Ответ на этот вопрос можно сформулировать в следующих терминах. Пусть S факторпространство пространства всех решений системы (1) в области $\Omega \diagdown K$ по подпространству решений, продолжаемых в область Ω после соответствующего исправления в сколь угодно малой окрестности K. Оказывается, что если компакт K выпуклый, то пространство S, характеризующее «неустранимые особенности» решений системы (1), изоморфно проективному пределу $\varprojlim \mathrm{Ext}^1 (M, \mathscr{P}) \otimes_{\mathscr{P}} \mathscr{E}' (\omega)$, взятому по фильтру всех окрестностей $\omega \supset K$. Для уравнения Коши — Римана этот изоморфизм совпадает с известным преобразованием Бореля.

В случае $s = t = 1$ указанный изоморфизм в несколько иной форме ранее был установлен В. В. Грушиным [7], опиравшимся на результаты [3]. Если $\mathrm{Ext}^1 (M, \mathscr{P}) = 0$, то из сформулированной теоремы об изоморфизме следует, что $S = 0$. Этот частный случай был установлен впервые Мальгранжем [8] и докладчиком [9]. Детальное изучение пространства $\varprojlim \mathrm{Ext}^1 (M, \mathscr{P}) \otimes_{\mathscr{P}} \mathscr{E}' (\omega)$ приводит к дальнейшим результатам.

Более сложные задачи о продолжимости решений системы (1), например задача о продолжении с остова полиэдра внутрь, не имеет пока столь исчерпывающего решения. Известны лишь достаточные условия возможности такого продолжения в терминах модулей $\mathrm{Ext}^i (M, \mathscr{P})$.

В тех же терминах можно изучать задачу о непрерывной зависимости решений. Если π — полиэдр в $\boldsymbol{R}^n$, а Γ^{n-k} — его остов размерности $n - k$, то при выполнении соотношений $\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P}) = 0$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ всякое решение системы (1), определенное в окрестности π, непрерывно зависит от своих значений в окрестности Γ^{n-k}. В частности, если оно принадлежит C^∞ в окрестности Γ^{n-k}, то является бесконечно дифференцируемым в окрестности всего полиэдра π. Последнее свойство справедливо также при более слабых предположениях, что $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{P}) = 0$, а модули $\mathrm{Ext}^i(M, \mathscr{P})(i = 1, \ldots, k-1)$ — гипоэллиптические. В аналогичных терминах формулируются также теоремы единственности.

4. НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Изучение неоднородных систем вида $p(iD)u = \omega$ удобно проводить в следующих терминах. Пусть M — произвольный $\mathscr{P}$-модуль с конечным базисом и

$$\ldots \xrightarrow{p_1'} \mathscr{P}^t \xrightarrow{p'} \mathscr{P}^s \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

некоторая свободная резольвента этого модуля. Пусть далее Φ — некоторое пространство распределений в области Ω, на котором определено и непрерывно действие операторов D. Рассмотрим последовательность непрерывных отображений

$$\Phi^s \xrightarrow{p(iD)} \Phi^t \xrightarrow{p_1(iD)} \ldots . \qquad (4)$$

Пространство Φ назовем M-выпуклым, если эта последовательность точна, а все ее отображения — топологические гомоморфизмы. Скажем, что пространство Φ сильно M-выпукло, если оно M-выпукло и, кроме того, экспоненциальные полиномы, принадлежащие подпространству в Φ^s, образованному решениями системы (1), плотны в этом подпространстве. Свойство (сильной) M-выпуклости не зависят от выбора резольвенты (3).

Введенное нами понятие M-выпуклости несколько отличается от близких понятий, использованных Хермандером и Мальгранжем. Как непосредственно вытекает из основной теоремы, пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$ и $\mathscr{E}(\Omega)$ сильно M-выпуклы, каковы бы ни были выпуклая область Ω и модуль M. Например, для проверки точности последовательности (4) во втором члене при $\Phi = \mathscr{D}'(\Omega)$ достаточно в основной теореме заменить p на p_1 и, учитывая точность последовательности (3), положить $d_0(z, D) = p'(z)$, $N_0 = \boldsymbol{C}^n$ и $d_\lambda(z,D) = 0$, когда $\lambda > 0$.

Отметим, что в частном случае $s = t = 1$ эта теорема была получена в 1952—1959 гг. в цикле работ Мальгранжа и Эренпрайса. В общем виде эта теорема была опубликована докладчиком [4] — [6] и Мальгранжем [8], [10] для пространства $\mathscr{E}(\Omega)$.

Общая задача об описании (сильно) M-выпуклых пространств Φ при заданном модуле M далека от своего полного решения. В частном случае $s = t = 1$, $\Phi = \mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$ эта задача подробно изучена в работах Эренпрайса, Мальгранжа, Хермандера. В общем случае известно [12], что для (сильной) M-выпуклости пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$ или $\mathcal{E}(\Omega)$ необходимо, чтобы $H^i(\Omega, \boldsymbol{C}) = 0$ ($H^i(\Omega, \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$ в случае $i = 0$) для всех $i > d$ ($i \geqslant d$), где $d = \dim_c N$. Этот факт является обобщением известной теоремы Серра о топологии областей Рунге.

С другой стороны, имеются различные достаточные условия M-выпуклости пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$ [и вообще тривиальности модулей $\mathrm{Ext}^i(M, \mathcal{D}'(\Omega))$]: для областей голоморфности (Мальгранж [11], докладчик [12]), в терминах выпуклых покрытий Ω, в терминах q-выпуклости (аналог теоремы конечности Андреотти — Грауэрта и др. [12], [6]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ehrenpreis L., Proc. Int. Symp. on Linear Spaces, Ierusalem, 1961, 161—174.
[2] Паламодов В. П., *Доклады АН СССР*, **137**, 4, 774—777 (1961).
[3] Паламодов В. П., *Доклады АН СССР*, **143**, 6, 1278—1281 (1962).
[4] Паламодов В. П., *Доклады АН СССР*, **148**, 3, 523—526 (1963).
[5] Паламодов В. П., Советско-американский симпозиум по уравнениям в частных производных, Новосибирск, 1963.
[6] Паламодов В. П., Диссертация, МГУ, 1965.
[7] Грушин В. В., *Труды Московского математического общества*, **15**, 1966.
[8] Malgrange B., Séminaire J. Leray, 1961/62.
[9] Паламодов В. П., Успехи математических наук, **18**, 2, 164—167 (1963).
[10] Malgrange B., Colloque sur les équations aux dér. part. CNRS, Paris, 1962.
[11] Malgrange B., Séminaire J. Leray 1962/63.
[12] Паламодов В. П., *Доклады АН СССР*, **161**, 5, 1015—1018 (1965).

С. Л. Соболев

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Интеграл от функции n переменных $\varphi(x)$ по области Ω

$$\int \mathcal{E}_\Omega(x)\,\varphi(x)\,dx$$

приближенно выражается в виде

$$\sum C_k \varphi(x^{(k)}) = \int \sum C_k \delta(x - x^{(k)})\,\varphi(x)\,dx$$

Ошибка приближения

$$(l, \varphi) = \int (\mathcal{E}_\Omega(x) - \sum C_k \delta(x - x^{(k)})\,\varphi(x)\,dx$$

является линейным функционалом над соответствующим линейным пространством функций φ.

При $m > n/2$ автор рассматривает функционалы (l, φ) из $L_2^{(m)*}$, определенные над пространством $L_2^{(m)}$ с нормой

$$\| \varphi \|_{L_2^{(m)}} = \left\{ \int \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha \varphi)^2 \, dx \right\}^{1/2},$$

инвариантной относительно ортогональных координатных преобразований.

Условие, что $l \in L_2^{(m)*}$, означает, в частности,

$$(l, x^\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| < m.$$

В докладе рассматриваются функционалы с узлами в точках решетки Γ

$$\Gamma = E\,(x : x = x^{(0)} + hH\gamma),$$

где H — матрица с определителем, равным единице, x — произвольный вектор, γ — произвольный целочисленный вектор, h — малый параметр.

Исследуются оптимальные формулы, т. е. формулы с наименьшей нормой функционала погрешности.

Основные результаты следующие:

1. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

а) При интегрировании функций $\varphi(x)$, периодических с матрицей периодов ω, кратной матрице hH, где

$$\omega = hHK, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & k_n \end{pmatrix}, \quad k_j \text{ — целые числа},$$

оптимальными будут постоянные коэффициенты $C = h^n$.

Норма функционала погрешности в этом случае имеет вид

$$\| l \|_{L_2^{(m)*}} = \sqrt{\Omega} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^m \sqrt{\zeta(H^{-1} \,|\, 2m)}. \qquad (1)$$

Здесь

$$\zeta(H^{-1} \,|\, 2m) = \sum_{\gamma \neq 0} \frac{1}{r_\gamma^{2m}},$$

где r_γ — расстояния от начала координат до переменной точки решетки $H\gamma$.

Функция

$$\zeta(H^{-1} \mid 2m)$$

называется функцией Римана для решетки H^{-1}, взаимной с решеткой H.

б) Для всех финитных функций $\varphi(x)$ с фиксированным носителем Ω имеет место неулучшаемая оценка

$$|(l, \varphi)| \leqslant \sqrt{\Omega}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \sqrt{\zeta(H^{-1} \mid 2m)}\, \|\varphi\|_{L_2^{(m)}} + O(h^{m+1}). \qquad (2)$$

в) Для произвольной области Ω с достаточно гладкой границей справедлива формула

$$\inf_C \|l\|_{L_2^{(m)*}} = \sqrt{\Omega}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \sqrt{\zeta(H^{-1} \mid 2m)} + O(h^{m+1}). \qquad (3)$$

2. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

а) Найден класс формул, называемых формулами с регулярным пограничным слоем, для которых

$$\|l\|_{L_2^{(m)*}} = \sqrt{\Omega}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \sqrt{\zeta(H^{-1} \mid 2m)} - O(h^{m+1}).$$

Они аналогичны формулам Грегори, являющимся асимптотически оптимальными в случае одной независимой переменной.

В этих формулах все коэффициенты C_k, относящиеся к точкам, удаленным от границы больше чем на Lh, где L — некоторая постоянная, называемая толщиной слоя, равны h^n, а в остальных точках, принадлежащих к «пограничному слою», вычисляются с помощью определенного алгорифма. Их вычисление требует Kh^{-m+1} действий, что на порядок меньше числа действий, необходимых для подсчета самого интеграла по внутренности области.

б) Указан алгорифм с конечным числом действий, независящим от h, для нахождения коэффициентов регулярного пограничного слоя в случае, когда Ω есть многогранник с гранями, рациональными относительно решетки.

Исследование наилучших решеток приведено, таким образом, к задаче теории чисел: исследованию минимумов ζ-функции при различных m и n.

Асимптотически для больших m

$$\zeta(H^{-1} \mid 2m) = \frac{K}{r_{\min}^{2m}},$$

где K постоянная и, следовательно, наилучшими будут решетки, где H^{-1} — решетка наиплотнейшей упаковки. Иными словами, решетка H будет взаимной с решеткой наиплотнейшей упаковки.

Вопрос о возможности получения лучших формул при x^k, не образующих решетку, остается открытым.

3. СХОДИМОСТЬ НА КЛАССАХ ЖЕВРЕЯ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для периодических функций из классов Жеврея $\mathcal{G}(A, \beta)(\beta \geqslant 1; A > 0)$, удовлетворяющих соотношению

$$\left| \frac{D^{\alpha}\varphi}{\alpha!} \right| < KA^{|\alpha|} |\alpha|^{(\beta-1)|\alpha|}$$

при любом α, дана оценка погрешности формул с регулярным пограничным слоем

$$|(l, \varphi)| \leqslant Kh^{-1/2} \exp\left[-\frac{\beta}{e} \left(\frac{Ah}{2\pi e r_{\min}} \right)^{-1/\beta} \right].$$

Толщина слоя порядка $L \cong \left(\frac{Ah}{2\pi e r_{\min}} \right)$. Мы видим, что на этих классах сходимость значительно лучше степенной.

Метод автора представляет собой дифференциальное исследование функционалов из $L_2^{(m)}$. Он состоит в представлении функционалов суммами слагаемых, имеющих малые носители.

Пусть $l_{\gamma}(y)$ такой функционал, что

$$\operatorname{supp} l_{\gamma}(y) \subset E(y : |y| < L), \qquad \| l_{\gamma}(y) \|_{L_2^{(m)}} < A.$$

После изменения масштаба и переноса начала в точку $hH\gamma$ получим функционал

$$l_{\gamma}\left(\frac{x}{h} - H\gamma \right)$$

с малым носителем. Для него справедливы оценки

$$\operatorname{supp} l_{\gamma}\left(\frac{x}{h} - H\gamma \right) \subset E(x : |x - hH\gamma| < Lh);$$

$$\left\| l_{\gamma}\left(\frac{x}{h} - H\gamma \right) \right\|_{L_2^{(m)*}} \leqslant Ah^{2m+n}.$$

Оценка показывает быстрое убывание скалярных произведений двух функционалов по мере удаления их носителей друг от друга. Отсюда для каждого функционала вида

$$l_0(x) = \sum_{hH\gamma \in \Omega} l_{\gamma}\left(\frac{x}{h} - H\gamma \right) \tag{4}$$

получается оценка нормы

$$\| l_0(x) \|_{L_2^{(m)*}} \leqslant Kh^{m} \sqrt{\Omega},$$

где K зависит только от L и A, Ω — носитель функционала l. Невозможность улучшения этой оценки показана Н. С. Бахваловым.

Такое же представление в виде суммы функционалов с малыми носителями допускает периодический функционал

$$l(x) = 1 - \sum_{\gamma} h^n \delta(x - hH\gamma), \tag{5}$$

неограниченный в $L_2^{(m)}$, но определенный над всеми финитными элементами $L_2^{(m)}$. Доказывается оптимальность этого функционала для всех финитных функций. Вычисление его минимума с помощью преобразования Фурье дает формулу (1).

Отыскание оптимальных кубатурных формул равносильно отысканию проекции функционала $\mathscr{E}\,\Omega\,(x)$ на многообразие всех линейных комбинаций

$$\sum C_\gamma l\,(x - hH\gamma),$$

образующих линейное подпространство $\mathfrak{H} \subset L_2^{(m)}$. Доказывается эквивалентность $\mathfrak{H}$ и $l_2^{(m)}$, пространства коэффициентов C_γ.

Элементы $\mathfrak{H}$ с малым носителем аналогичны дифференциальным операторам в частных производных порядка m. Для них справедливы правила суммирования по частям, позволяющие преобразовывать кубатурные формулы с различными дифференциальными элементами.

Формулы с регулярным пограничным слоем строятся как формулы, у которых все внутренние дифференциальные функционалы, входящие в выражение (4), совпадают с точностью до сдвига.

Из формулы (5), переписанной в виде

$$l_0\,(x) = \sum_{hH\gamma \in \Omega} l_*\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{hH\gamma \notin \Omega} l_*\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), \tag{6}$$

получим представление для формул с регулярным пограничным слоем

$$l\,(x) = l_0\,(x) - l_1\,(x),$$

где $l_1\,(x)$ — некоторый функционал с регулярным пограничным слоем для внешности области Ω.

Подсчет квадрата нормы $l\,(x)$ в виде

$$\{l\,(x),\; l_0\,(x) - l_1\,(x)\}, \tag{7}$$

где $\{\ \ \}$ — реализация скалярного произведения в $L_2^{(m)}$, методом дифференциальных функционалов с малым носителем приводит к формуле (2).

Асимптотическая оптимальность формул с регулярным пограничным слоем устанавливается сравнением погрешности «формул с регулярным пограничным слоем» с погрешностью оптимальных формул. Для этого используется теорема Бабушки.

Если формула (4) оптимальна при заданных узлах, то экстремальная функция, на которой функционал $l\,(x)$ достигает своего максимального значения, имеет нули во всех узлах решетки.

Скалярное произведение функционалов вида (6) порождает в пространстве C_k некоторую квадратичную форму. Взаимная с ней разностная форма позволяет построить разностный оператор перехода от значений экстремальной функции $\psi\,(x^{(k)})$ кубатурной формулы в узлах решетки к коэффициентам C_k.

Вместе с теоремой Бабушки, представленной (7), это позволяет провести оценки, доказывающие формулу (3).

При эффективном нахождении коэффициентов пограничного слоя для многогранников доказывается сначала, что эти коэффициенты определяются только локальными свойствами границы и, следовательно, совпадают в точках, одинаково отстоящих от граней.

Отыскание их величин удобно производить при помощи преобразования Фурье.

А. Н. Тихонов

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Неоднократно высказывалась точка зрения, что корректность выражает физическую определенность задачи и является принципиальным условием как для применимости задачи к явлениям природы, так и для возможности получения приближенного решения. Подобная точка зрения наложила сомнение на целесообразность изучения решений некорректно поставленных задач.

Однако можно привести много классов некорректно поставленных задач, как встречающихся при изучении явлений природы, так и представляющих основной аппарат математики. Сюда относятся:

1) определение равномерного приближения для производной $z = u'$ по приближенным данным в метрике C.

2) Определение суммы ряда Фурье в заданной точке по приближенным в l_2 значениям коэффициентов Фурье.

3) Равномерные приближения решений интегральных уравнений 1-го рода и многие задачи, к ним приводящие (аналитическое продолжение, операционное исчисление в действительной области) при возмущении входных данных в метрике L_2.

4) Линейные задачи на спектре при обычных дополнительных условиях, определяющих единственное решение. (Плохо обусловленные алгебраические системы, третья теорема Фредгольма.)

5) К этому кругу вопросов также относятся неустойчивые задачи оптимизации (неустойчивые задачи оптимального управления, линейного и динамического программирования).

Типичным классом некорректно поставленных задач, встречающихся при изучении явлений природы, являются «обратные задачи». При изучении объектов или явлений природы z, недоступных для непосредственного измерения, мы часто пользуемся изучением их физически детерминированных проявлений $u = Az$ (A — обычно вполне непрерывный оператор), так что определение z связано с «обратной задачей» (некорректно поставленной) определения z по u и заданному приближению. Все возрастающее значение имеет задача извлечения наиболее полной информации из результатов экспериментов с помощью математических методов (и автоматизация ее решения) вместо того, чтобы эту информацию получать при помощи усложнения экспериментальной техники.

В настоящее время определилось два подхода к решению некорректно поставленных задач.

Первый подход связан с предположением, что имеется дополнительная информация, ограничивающая класс возможных решений $\overline{Z}$ $(z \in \overline{Z})$ и позволяющая сделать заключение о компактности $\overline{Z}$.

В этом случае решение обратной задачи $Az = u$ устойчиво. Изложение этого подхода к решению некорректно поставленных задач и сводка результатов дана в монографии М. М. Лаврентьева, где изучен также вопрос, когда входные данные задачи выходят из $\overline{U} = A\overline{Z}$. К этому направлению принадлежит понятие «квазирешения», введенное В. И. Ивановым. При таком подходе основным вопросом при решении конкретных задач является установление дополнительных ограничений на класс решений, делающий его компактным.

Второй подход трактует решение неустойчивых задач. При этом первым вопросом является определение того, как можно понимать приближенное решение неустойчивой задачи. При задании приближенных входных данных $\widetilde{u}_\delta$ обычно задается их точность, т. е. величина δ возможного уклонения $\widetilde{u}^\delta$ от точных значений $\overline{u}$: $\rho_u (\widetilde{u}^\delta, \overline{u}) \leqslant \delta$. В качестве приближенного значения $\widetilde{z}$ для некорректно поставленных задач нельзя брать точное решение задачи с входными данными $\widetilde{u}$: $\widetilde{z} = R(\widetilde{u})$. Однако наличие дополнительного параметра δ позволяет искать приближенное решение при помощи параметрических операторов $\widetilde{z} = R(\widetilde{u}, \alpha)$, если значение параметра α согласовано с точностью δ задания $\widetilde{u}^\delta$: $\alpha = \alpha(\delta)$.

Параметрический оператор $R(\widetilde{u}, \alpha)$ называется регуляризирующим оператором для $R(u)$, если (1) $R(\widetilde{u}, \alpha)$ определен для всех $\widetilde{u} \in \widetilde{U}$, где $\widetilde{U}$—класс возможных приближенных значений $\widetilde{u}$, и если (2) из соотношения $z = R(\overline{u})$ следует существование функции $\alpha(\delta)$, такой, что из $\rho_u (\widetilde{u}^\delta, \overline{u}) \leqslant \delta$ следует, что $\rho_z (\widetilde{z}^\delta, \overline{z}) \leqslant \varepsilon(\delta)$ $(\varepsilon(\delta) \to 0$, $\delta \to 0)$, где $\widetilde{z} = R(\widetilde{u}^\delta, \alpha(\delta))$.

Так, например, при вычислении производной обычное разностное отношение $R(\widetilde{u}, \alpha) = 1/\alpha\, [\widetilde{u}(x + \alpha) - \widetilde{u}(x)]$ является регуляризирующим оператором при $\delta/\alpha(\delta) \to 0$. Таким образом, выбор в качестве приближенного решения $\widetilde{z}^\delta$ представляет метод определения устойчивого приближения к $\overline{z}$, хотя задача и является неустойчивой.

Регуляризирующие операторы для широкого круга обратных задач могут быть получены при помощи стабилизации минимума уклонения $\rho_u (Az, u)$.

Пусть на множестве $\tilde{Z}$ пространства возможных решений Z определен (стабилизирующий) функционал $\Omega[z]$, такой, что множество Z_C, определенное условием $\Omega[z] \leqslant C$ $(z \subset \tilde{Z})$, компактно в Z. В этом случае значение регуляризирующего оператора $\tilde{z}^{\alpha} = R(\tilde{u}, \alpha)$ может быть определено как элемент $\tilde{z}^{\alpha}$, реализирующий минимум функционала

$$M^{\alpha}[z, \tilde{A}, \tilde{u}] = \varrho_u(\tilde{A}z, \tilde{u})^2 + \alpha\Omega(z) \quad (z \in \tilde{Z}).$$

Пусть уравнение $Az = \bar{u}$ имеет решение $\bar{z} \in \tilde{Z}$, и пусть приближенные значения $\tilde{u}^{\delta}$ и $\tilde{A}^{\delta}$ таковы, что $\rho(\tilde{u}^{\delta}, \bar{u}) \leqslant \delta$, $\rho(\tilde{A}^{\delta} z, Az) \leqslant \eta(\delta) \times f(\Omega(z))$ $(\eta(\delta) \to 0,\ \delta \to 0)$ и $f(\Omega)$ — возрастающая функция. Устанавливается зависимость $\alpha(\delta)$ $(\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0)$ и существование $\delta_0(\varepsilon)$, такого, что $\rho(\tilde{z}^{\alpha(\delta)}, \bar{z}) \leqslant \varepsilon$ при $\delta \leqslant \delta_0(\varepsilon)$.

Неустойчивые задачи оптимизации находятся в тесной связи с рассмотренными выше задачами. Пусть задана непрерывная функция $F(z)$, определенная в метрическом пространстве Z. Пусть существует единственный элемент z_0, реализующий минимум $F(z)$: $F(z_0) = F_0$. Будем говорить, что задача оптимизации $F(z)$ устойчива, если из $F(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_0$ следует $\rho(z_n, z_0) \to 0$, и что задача оптимизации неустойчива (или некорректно поставлена), если последовательность z_n может расходиться. Пусть $\Omega[z]$ — функционал, удовлетворяющий названным выше условиям и $z_0 \in \tilde{Z}$. Заменяя функционал $F(z)$ на

$$M^{\alpha}(z, \tilde{F}_{\eta}) = \tilde{F}_{\eta}(z) + \alpha\Omega[z], \qquad |F(z) - \tilde{F}_{\eta}(z)| \leqslant \eta(\Omega(z) + C),$$

мы получим устойчивую вариационную задачу, при помощи которой строятся последовательности $\tilde{z}^{\alpha(\eta)}$, такие, что $\rho(\tilde{z}^{\alpha(\eta)}, \bar{z}) \to 0$ при $\eta \to 0$.

Можно указать естественный класс задач оптимального управления, а также задач линейного и динамического программирования, являющихся неустойчивыми задачами, для которых приведенный выше метод позволяет находить устойчивые приближения.

Приведенные выше методы легко реализуются на электронных вычислительных машинах и представляют эффективный метод решения широкого класса задач.

В. А. Топоногов

ОДНА ТЕОРЕМА О РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, СОДЕРЖАЩИХ ПРЯМЫЕ ЛИНИИ

Рассматривается полное n-мерное трижды непрерывно дифференцируемое риманово пространство R^n, кривизна которого в каждой точке и в каждом двумерном направлении не отрицательна.

Прямой линией мы будем называть геодезическую линию, каждый отрезок которой есть кратчайшая.

Доказывается следующая теорема:

Если в R^n существует хотя бы одна прямая линия, то тогда R^n изометрично прямому метрическому произведению прямой линии и некоторого риманова пространства R^{n-1}.

Г. С. Цейтин, И. Д. Заславский, Н. А. Шанин

ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУКТИВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. Конструктивный математический анализ является одним из разделов конструктивной математики (конструктивного направления в математике). Толчком к возникновению идей конструктивной математики послужило высказанное некоторыми математиками сомнение в приемлемости абстракции актуальной бесконечности в качестве основы формирования математических понятий и теорий. Формированию конструктивной математики в современном виде способствовали в первую очередь следующие обстоятельства: а) обогащение математики новыми фундаментальными понятиями — точным понятием алгорифма и связанным с ним точным понятием порождаемого (перечислимого) множества, и б) выработка особого подхода к истолкованию суждений о конструктивных объектах.

2. Конструктивная математика строится на основе более «осторожных» идеализаций, чем классическая. Она характеризуется следующими основными чертами: а) в качестве объектов изучения рассматриваются лишь конструктивно определяемые объекты; в применении к таким объектам допускается абстракция потенциальной осуществимости, но совершенно не допускается использование абстракции актуальной бесконечности; б) математические суждения понимаются в конструктивном смысле — на основе правил конструктивной расшифровки суждений (правил выявления конструктивной задачи).

Некоторые логические аксиомы и правила вывода классической логики (например, закон исключенного третьего, правило отрицания всеобщности и др.) оказываются несовместимыми с конструктивным пониманием суждений. Конструктивная математика основывается на конструктивной логике, существенно отличающейся от классической.

В конструктивной математике понятие алгорифма (вместе с понятием порождаемого множества) является основой формирования разветвленной иерархии разнообразных математических понятий, т. е. играет такую же фундаментальную роль, какую в формировании понятий классической математики играют понятия множества и класса. В частности, в конструктивном математическом анализе понятие алгорифма является основой определения различных вариантов понятия конструктивного вещественного числа и понятия конструктивной функции вещественной переменной.

Развитие конструктивной математики показывает, что, несмотря на упомянутые (в пункте а) ограничения, касающиеся типа «объектов рассмотрения», конструктивная математика обладает значительными возможностями для описания действительности. По-видимому, потенциально эти возможности не меньше, чем в классической математике.

3. Конструктивная математика возникла на той же критической почве, что и интуиционистская математика, она многое заимствовала у интуиционистской математики и имеет ряд общих черт с последней. Однако в целом конструктивная математика существенно отличается от интуиционистской (прежде всего отказом считать содержательно осмысленным понятие свободно становящейся последовательности и ролью, отводимой точному понятию алгорифма).

В конструктивной математике имеется ряд школ, между которыми по некоторым вопросам есть разногласия (в частности, по вопросу о критериях применимости алгорифма к исходному данному). Ниже речь будет идти лишь о том варианте конструктивной математики (и в частности, лишь о том варианте конструктивного математического анализа), в котором принимаются выдвинутый А. А. Марковым «логический» критерий применимости алгорифма к исходному данному и вытекающий из этого критерия принцип конструктивного подбора.

4. Конструктивная математика (и в частности, конструктивный математический анализ) предназначается ее сторонниками прежде всего для обслуживания тех же приложений, для которых используется классическая математика. Но конструктивная математика описывает действительность на основе иной системы идеализаций, что приводит к иной системе понятий, в некоторых отношениях существенно отличающейся от традиционной. Опыт развития конструктивной математики (и в частности, конструктивного математического анализа) показал, что те понятия, отдельные теоремы и целые разделы классической математики, которые плодотворно «работают» в приложениях математики, удается переосмысливать в рамках конструктивной математики.

При таком переосмысливании во многих случаях обнаруживается некорректность постановок некоторых вычислительных задач, «подсказываемых» теоремами классической математики — оказывается, что алгорифмы с требуемыми свойствами невозможны.

Вообще принципиальные вопросы вычислимости представляют собой специфическую область возможных приложений конструктивной математики (в частности, конструктивного математического анализа). В тех случаях, когда при рассмотрении этих вопросов вычислительными процессами интересуются лишь на уровне потенциальной осуществимости, само существо дела требует обращения к понятиям конструктивного анализа, который дает в этих случаях общий и последовательный подход.

Запросы теории вычислительных методов способствуют расширению круга математиков, интересующихся постановками задач и точками зрения, возникающими в конструктивном математическом анализе.

5. Элементы конструктивного подхода встречаются и в математических работах классического направления. Некоторые авторы трактуют понятия конструктивной математики с точки зрения классической математики, включая их в рассмотрение на правах частных случаев определенных понятий классической математики (понятие алгорифма трактуется как частный случай понятия отображения одного множества в другое, понятие вычислимого вещественного числа — как частный случай понятия вещественного числа и т. п.). Элементы конструктивного подхода к пониманию суждений проявляются, например, в том, что при доказательствах «теорем существования» иногда дополнительно рассматривается вопрос об «эффективности» этих теорем. (Впрочем, и в этих случаях конструктивный подход не всегда проводится последовательно, и поэтому «эффективность» теоремы существования еще не означает доказуемость соответствующей теоремы в конструктивной математике.) В таких работах понятия и проблематика конструктивной математики выступают как дополнительный источник своеобразной проблематики в рамках классической математики. Конечно, такие рассмотрения выходят за рамки конструктивной математики.

6. Одно из направлений разработки конструктивной математики (и в частности, конструктивного математического анализа) — это разработка теорий, по возможности аналогичных теориям, уже построенным в классической математике. В основе такой работы по конструктивному переосмысливанию классической математики лежат поиски естественных конструктивных аналогов понятий, отношений операций и теорем классической математики. В области математического анализа исследования в упомянутом направлении проводились многими авторами. В настоящее время уже в значительной степени разработаны основы некоторых теорий конструктивной математики, имеющих своими объектами изучения конструктивные аналоги важнейших понятий классического математического анализа, в том числе понятий: «вещественное (комплексное) число», «числовой континуум», «полином с вещественными (комплексными) коэффициентами», «функция вещественной переменной», «непрерывная (равномерно непрерывная, дифференцируемая, равномерно дифференцируемая, интегрируемая по Риману, ограниченной вариации, абсолютно непрерывная) функция вещественной переменной»,

«метрическое (нормированное, гильбертово, локально выпуклое топологическое) пространство», «непрерывный (линейный) оператор из одного пространства в другое», «измеримое по Лебегу множество», «интегрируемая по Лебегу (с заданной степенью) функция» и др. Начато изучение конструктивных аналогов понятий: «область Жордана», «дифференцируемая (непрерывно диффенцируемая, равномерно непрерывно дифференцируемая) функция n переменных», «аналитическая функция», «обобщенная функция». На очереди стоит вопрос о разработке конструктивных аналогов теории приближенного представления функций, теории операторов и уравнений в различных функциональных пространствах, основ теории вероятностей, основ топологии.

7. Общая картина, вырисовывающаяся при анализе основных черт конструктивной математики и уже разработанных частей конструктивного математического анализа позволяет отметить ряд особенностей конструктивного анализа.

а) Для введения конкретных типов конструктивных объектов (т. е. конкретных понятий) в конструктивной математике употребляются следующие средства: I) указывается список исходных объектов и список правил построения новых объектов на основе уже построенных, в результате чего вводятся в рассмотрение конструктивные объекты некоторого «базисного» типа; II) дополнительно может быть задано некоторое условие с одним параметром (формулируемое на каком-либо приемлемом в конструктивной математике языке), выделяющее среди «базисных» объектов объекты определяемого типа. Обычно введение понятия дополняется введением для объектов рассматриваемого типа отношения равенства, задаваемого посредством некоторого двухпараметрического условия.

б) Многие понятия, вводимые в конструктивной математике, «похожи» на понятия классической математики, сопоставляются в приложениях с теми же реальными ситуациями, что и соответствующие понятия классической математики, и более или менее близки к последним по своим свойствам. Однако эти понятия имеют другую основу и в этом смысле представляют собой принципиально новые понятия. Это приводит к тому, что наряду с аналогией в ряде случаев проявляются глубокие отличия этих понятий от соответствующих понятий классической математики, и к появлению в конструктивной математике таких теорем об этих понятиях, для которых нет аналогов в классической математике.

в) Термин «множество» в конструктивной математике означает то же самое, что и «тип конструктивных объектов», т. е. множество понимается как система правил порождения конструктивных объектов, быть может с присоединенным выделяющим условием. В пределах конкретной теории конструктивной математики разнообразие множеств, по существу, определяется разнообразием условий, которые могут быть сформулированы на языке этой теории. В метатеории, формируемой для данной теории, язык этой теории получает точное описание, формулировки условий (а тем самым и задания множеств) становятся конструктивно определяемыми объектами и понятие *множества, определимого в данной теории*, становится конструктивным понятием. Не существует точного понятия множества единого для всевозможных теорий конструктивной математики.

г) Используется конструктивное понимание логических связок и их комбинаций. Для суждений (и условий), содержащих квантор существования (часто называемый в конструктивной математике *квантором потенциальной осуществимости*) или дизъюнкцию, это понимание приводит, вообще говоря, к постановке определенной конструктивной задачи (*задачи, сопряженной с данным суждением*), решение которой является необходимым этапом обоснования суждения. Наиболее ярко специфика конструктивного понимания проявляется при истолковании суждений вида

$$\forall X \exists Y R(X, Y). \qquad (*)$$

Здесь X — переменная для объектов некоторого типа P («P-объектов»), Y — переменная для объектов типа Q («Q-объектов»). Если P-объекты вводились как «базисные» объекты (без дополнительного выделяющего условия), то такое суждение понимается как утверждение об осуществимости алгорифма, перерабатывающего каждый P-объект в некоторый Q-объект, связанный с данным P-объектом отношением R. Если же в определении P-объектов участвует некоторое выделяющее условие, то понимание рассматриваемого суждения зависит от того, сопряжена ли с этим выделяющим условием конструктивная задача. Если с выделяющим условием не сопряжена конструктивная задача (в этом случае понятие P называется *нормализованным*), то применим тот же способ истолкования, что и при отсутствии выделяющего условия. Если же с выделяющим условием сопряжена конструктивная задача, то истолкование суждения (*) производится по более сложным правилам — оказывается, что (*) означает утверждение об осуществимости алгорифма, перерабатывающего каждый P'-объект в некоторый Q-объект, связанный с «главным членом» данного P'-объекта отношением R. Каждый объект типа P' — это пара, состоящая из некоторого P-объекта H, называемого *главным членом* рассматриваемого P'-объекта, и некоторого объекта, представляющего собой решение конструктивной задачи, сопряженной с утверждением «H есть объект типа P» (понятие P' называется *полной нормализацией понятия* P).

д) Особенности конструктивного понимания суждений и условий оказывают глубокое воздействие на процессы формирования конструктивных аналогов понятий, отношений и операций классического математического анализа. Два суждения (условия), эквивалентные при «классическом прочтении» (т. е. эквивалентные с точки зрения логических средств классической математики), могут оказаться неэквивалентными при «конструктивном прочтении» (т. е. с точки зрения конструктивного понимания). В результате этого

д$_1$) В некоторых случаях оказывается целесообразным введение нескольких различных конструктивных аналогов для одного понятия (отношения, операции) классической математики (правда, обычно оказывается, что плодотворность различных аналогов неодинакова); иногда наиболее плодотворный конструктивный аналог рассматриваемого понятия (отношения, операции) подсказывается не буквально той формулировкой определения, которая употребительна в классической математике, а некоторой ее разновидностью, эквивалентной ей при «классическом прочтении».

Специфика конструктивной математики проявляется особенно своеобразно при поисках конструктивных аналогов некоторых операций, фигурирующих в классическом математическом анализе. В классической математике часто употребляется следующий прием. Если в некоторой теории для предиката R получено утверждение вида (*), то вводится в рассмотрение операция Φ, о которой предполагается, что она ставит в соответствие каждому допустимому значению переменной X объект $\Phi(X)$, являющийся допустимым значением переменной Y, и что

$$\forall X R(X, \Phi(X)).$$

Более того, введенная таким способом операция Φ иногда «вытесняет» из теории предикат R, на основе которого она была введена — происходит переход от предикатного варианта теории к операторному. Такой переход, безоговорочно допускаемый в классической математике, в конструктивной математике возможен не всегда — это связано с отмеченной выше особенностью ненормализованных понятий и с ограничениями, накладываемыми отношениями равенства, введенными для конструктивных объектов рассматриваемых типов (может оказаться, что существует алгорифм, строящий по всякому P-объекту требуемый Q-объект, но невозможна операция с таким же свойством: алгорифм называется *операцией* лишь тогда, когда он согласован с отношениями равенства для P-объектов и Q-объектов). В результате этого

д$_2$) В некоторых случаях в качестве конструктивного аналога операции Φ, введенной в классическую математику описанным выше способом, рассматривается или конструктивный аналог отношения R, или (если возможно) некоторая алгорифмическая операция Φ', для которой исходными данными являются не объекты типа P, а объекты типа P' (см. пункт «г»).

е) В конструктивном математическом анализе рассматривается несколько конструктивных аналогов понятия вещественного числа. Различия между некоторыми из этих аналогов носят технический характер, а между некоторыми — более глубокий характер (например, некоторые из этих аналогов представляют собой полные нормализации других). В связи с этим возможно несколько различных конструктивных аналогов понятия функции вещественной переменной, «похожих» на понятие функции, используемое в классической математике. Однако конструктивные понятия этого рода недостаточны для введения конструктивных аналогов ряда важных функциональных пространств, изучаемых в функциональном анализе. В связи с этим в конструктивном математическом анализе вводятся «аппроксимативно определенные» конструктивные функции различных типов, представляющие собой конструктивные объекты иного типа, чем только что упомянутые «точечно определенные» функции.

ж) При поиске конструктивных аналогов теорем классической математики необходимо иметь в виду большое разнообразие возможных ситуаций. Иногда одна лишь замена в формулировке рассматриваемой теоремы классической математики встречающихся понятий, отношений и операций их подходящими конструктивными аналогами приводит к верному утверждению конструктивной математики; иногда необходим предварительный переход к формулировке, эквивалентной рассматриваемой теореме при «классическом прочтении», но не эквивалентной ей при «конструктивном прочтении»; иногда к интересному конструктивному аналогу приводит такая замена понятий (отношений, операций), при которой в одних местах текста некоторое понятие (отношение, операция) заменяется одним конструктивным аналогом, а в других местах — другим. Иногда приходится довольствоваться конструктивным аналогом, лишь «близким по смыслу» к рассматриваемой теореме.

В тех случаях, когда поиски «достаточно близких» конструктивных аналогов не приносят успеха, приходится констатировать наличие существенного расхождения между рассматриваемым фрагментом конструктивного математического анализа и соответствующим фрагментом классического анализа. В настоящее время известно значительное число расхождений такого рода.

А. Б. Шидловский

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ E-ФУНКЦИИ

В 1929—1930 гг. К. Зигель опубликовал метод, который позволяет устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений в алгебраических точках одного класса функций, названных им E-функциями, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. E-функции — это целые функции, имеющие алгебраические коэффициенты ряда Тейлора, удовлетворяющие некоторым арифметическим соотношениям. Этот метод является непосредственным обобщением известных классических результатов Ш. Эрмита о трансцендентности числа e и Ф. Линдемана о трансцендентности и алгебраической независимости значений показательной функции в алгебраических точках, а также использует обобщение идей А. Туэ из теории приближения алгебраических чисел рациональными дробями.

Свой метод Зигель применил к функциям

$$K_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n};\qquad \lambda\neq-1,\,-2,\,\ldots,$$

являющихся решениями линейного дифференциального уравнения 2-го порядка и отличающимся только множителем $\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}$ от функций Бесселя с соответствующим индексом λ. Он доказал, что если λ — рациональное число, отличное от нуля и половины нечетного числа, то для любого алгебраического значения $z\neq 0$ числа $K_\lambda(z)$ и $K'_\lambda(z)$ алгебраически независимы, а также обобщил это предложение на случай совокупности значений функций с различными значениями параметра λ и различными значениями аргумента z.

В 1949 г. К. Зигель изложил свой метод в форме общей теоремы об алгебраической независимости значений совокупности E-функций, составляющей решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Из этой теоремы легко следует теорема Линдемана, а при помощи дополнительных вспомогательных предложений и упомянутые выше результаты Зигеля. Каких-либо новых результатов эта работа не содержала. Это объясняется тем, что общая теорема сводит арифметическую проблему доказательства алгебраической независимости значений совокупности E-функций к проверке некоторого аналитического условия нормальности различных произведений степеней этих E-функций, а последняя весьма затруднительна и до сих пор удается только для E-функций, основные из которых являются решениями линейных дифференциальных уравнений порядка не выше 2-го. Поэтому метод Зигеля и его общая теорема, несмотря на их кажущуюся общность, имели мало приложений к конкретным функциям.

В 1953 г. автор установил теорему, аналогичную теореме Зигеля, но при менее стеснительных предположениях, и распространил ее на случай функций, удовлетворяющих системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений. При помощи этой теоремы удалось установить трансцендентность и алгебраическую независимость значений некоторых E-функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений 3-го и 4-го порядков.

Обобщая метод К. Зигеля, автор в 1954 г. нашел необходимое и достаточное условие, при котором верна подобная теорема. Таким естественным условием является алгебраическая независимость рассматриваемой совокупности E-функций над полем рациональных функций.

Из общей теоремы сразу следует трансцендентность значений любой трансцендентной E-функции, являющейся решением линейного дифференциального уравнения первого порядка с полиномиальными коэффициентами, в любой алгебраической точке, отличной от нуля и особых точек этого уравнения. В частности, это дает трансцендентность значений функций

$$\varphi_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)},\qquad \lambda\neq-1,\ -2,\ \ldots,$$

с рациональными значениями λ в любой алгебраической точке $z\neq0$. При $\lambda=0$ имеем $\varphi_0(z)=e^z$. Теорема Линдемана также следует из этой теоремы, и легко устанавливается обобщение теоремы Линдемана на случай произвольной трансцендентной E-функции, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению первого порядка с полиномиальными коэффициентами. Доказательство всех результатов Зигеля относительно функций $K_\lambda(z)$ при помощи этой теоремы также упрощается.

Применение общей теоремы к конкретным E-функциям не представляет вышеупомянутых трудностей, связанных с теоремой Зигеля, так как установление алгебраической независимости совокупности функций во многих случаях является не такой сложной задачей. При помощи ее можно устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений E-функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений любых порядков.

Например, если положить

$$\omega_s(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!\,n^s},\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ k;\ k\geqslant0;$$

$$\psi_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^k}\left(\frac{z}{k}\right)^{kn},\qquad k\geqslant1,$$

то функции $\omega_k(z)$ и $\psi_k(z)$ являются решениями линейных дифференциальных уравнений порядка k. Легко доказать, что при любом алгебраическом значении $z\neq0$ как числа $\omega_0(z)$, $\omega_1(z)$, ..., $\omega_k(z)$, так и числа $\psi_k(z)$, $\psi_k'(z)$, ..., $\psi_k^{(k-1)}(z)$ алгебраически независимы.

В приложениях теории трасцендентных чисел большое значение имеют количественные характеристики трансцендентности или алгебраической независимости чисел в виде неравенств, оценивающих снизу так называемую меру трансцендентности или меру взаимной трансцендентности чисел. Метод Зигеля и его обобщение позволяют получать подобные оценки. Так Зигель получил оценку меры для функции Бесселя $J_0(z)$ и ее производной. Используя работу Зигеля при помощи общей теоремы автора, нетрудно получить общую теорему об оценке меры взаимной трансцендентности для любой совокупности E-функций, алгебраически независимых над полем рациональных функций. Такая оценка была получена в 1962 г. С. Лэнгом.

В 1955 г. автор получил ряд теорем о трансцендентности и алгебраической независимости значений совокупности E-функций при наличии между ними одного алгебраического уравнения в поле рациональных функций, а в 1956 г.— общие теоремы о трансцендентности и алгебраической независимости значений в алгебраических точках у совокупности E-функций при наличии между ними любого числа алгебраических уравнений в поле рациональных функций (подробные доказательства опубликованы в 1962 г.). В частности, оказалось, что трансцендентная E-функция, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами, принимает трансцендентное значение в любой алгебраической точке, за исключением конечного числа таких точек. Исключительные алгебраические точки, в которых не имеет место трансцендентность значений, определяются из алгебраических дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет эта функция.

При помощи этих общих теорем можно устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений в алгебраических точках у конкретных функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений любых порядков и связанных любым числом алгебраических уравнений в поле рациональных функций. Несколько таких приложений к конкретным функциям опубликовано автором.

Указанные общие теоремы сводят проблемы отсутствия или наличия алгебраических связей между рассматриваемыми значениями функций к отсутствию или наличию алгебраических связей между соответствующими функциями в поле рациональных функций. Поэтому важной задачей является разработка методов, позволяющих установить алгебраическую независимость заданных функций или отыскать все алгебраические уравнения, связывающие их в поле рациональных функций. Общего метода, позволяющего решать эти проблемы для любых целых функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям, пока не имеется. В ряде работ автора обобщаются ранее известные частные методы, применимые к некоторым классам функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям любых порядков. В последнее время В. А. Олейников разработал метод, который позволяет решать указанную задачу для решений линейных дифференциальных уравнений 3-го порядка, и применил его к доказательству алгебраической независимости значений некоторых конкретных функций.

А. П. Юшкевич

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В СТРАНАХ ВОСТОКА В СРЕДНИЕ ВЕКА: ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Работы по истории математики в странах Востока в средние века, выполненные за последние десятилетия, значительно обогатили наши знания в этой области. Многие рукописи были впервые опубликованы на языке оригинала или в переводе на европейские языки, другие подробно изложены, третьи подвергнуты новому анализу. Это относится к трудам ученых средневекового Китая, Индии и особенно стран арабоязычной культуры (стран Ислама). Так был недавно обнаружен целый ряд крупных достижений в теоретической арифметике (учение об отношениях и числе), алгебре, тригонометрии, геометрии (теория параллельных), в приемах приближенных вычислений и инфинитезимальной математике (интеграции, разложения в степенные ряды).

В результате была существенно уточнена последовательность в развитии отдельных направлений и проблем математики, выявлены несомненные или вероятные взаимодействия между различными странами Азии и Африки, обнаружены новые связи прогресса математики с запросами математического естествознания, прежде всего астрономии. Все это не только внесло важные поправки в прежние оценки уровня восточной средневековой математики, но и впервые позволило рассмотреть весь средневековый период ее развития как настоящее единое целое, а не как период более или менее сходного, но, по существу, независимого и лишь параллельного развития замкнутых математических культур. Здесь возникает несколько проблем: достаточно точного выделения общих характеристик этого периода, а наряду с этим — особых характеристик науки различных стран в различные времена; уточнения роли античной науки и старинных региональных традиций в формировании математики данного периода; выяснение взаимоотношений с наукой Византии; раскрытия причин подъема и, в конце средневековья, упадка математических наук в странах Востока. Научное решение этих проблем возможно с хорошим приближением уже при нынешнем состоянии исторических знаний. Существуют некоторые гипотезы по этим проблемам. Несомненно, что правильный ответ не может быть получен в пределах изучения только самой истории математики: для этого необходимо привлечь данные социальной и политической истории, истории культуры в целом.

Развитие математики в Европе после упадка Рима является компонентой ее общего прогресса в средние века. Математика в Европе этого периода с самого начала обладала специфическими чертами, связанными с сохранявшимися здесь традициями, приобрела новые особенности в ходе усвоения и переработки восточного и античного наследия в социальной и культурной среде, существенно отличной от восточной. Огромное значение упомянутого наследия общеизвестно, но его действительный объем изучен все еще недостаточно.

Привлечение новых рукописных материалов будет продолжаться и далее; как показывает практика, это необходимая предпосылка более полного раскрытия сущности исторического процесса и его объективного объяснения. Необходимо — и это опять-таки показывает наш общий опыт — шире привлечь первоисточники по математическому естествознанию — астрономии, механике, оптике, теории музыки, а также философские и специально натурфилософские сочинения, содержащие ценные сведения по математике. Однако работа в этом направлении сопряжена с большими трудностями. Большую помощь в этом деле окажет составление сводных библиографических каталогов, с одной стороны, и подготовленного компетентными специалистами списка сочинений, в первую очередь подлежащих изучению и переводу,— с другой.

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСОВЫЕ ДОКЛАДЫ

ПОЛУЧАСОВЫЕ ДОКЛАДЫ

CONTENTS

ONE-HOUR REPORTS

HALF-HOUR REPORTS

TABLEAU DES MATIERES

RAPPORTS D'UNE DURÉE D'UNE HEURE

RAPPORTS D'UNE DURÉE D'UNE DEMI-HEURE

INHALT

VORTRÄGE VON EINER STUNDE DAUER

VORTRÄGE VON EINER HALBEN STUNDE DAUER

Московская типография № 16 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9.
Заказ 308.