COMPTES RENDUS
DU
CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS
OSLO 1936

Tome II

Conférences de Sections

COMPTES RENDUS

DU

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS

OSLO 1936

Tome II

Conférences de Sections

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

OSLO 1937

CONFÉRENCES DE SECTIONS

La rédaction n'a pas reçu de manuscrit des personnes dont les noms sont précédés d'un astérisque.

I. Algèbre et théorie des nombres.

II. Analyse.

Page

III. Géométrie et topologie.

IV. Calcul des probabilités, statistique mathématique, mathématique d'assurances et économétrie.

V. Physique mathématique, astronomie et géophysique.

VI. Mécanique rationnelle et appliquée.

VII. Logique, philosophie et histoire.

LISTE DES AUTEURS

La rédaction n'a pas reçu de manuscript des personnes dont les noms sont précédés d'un astérisque.

SECTION I

Algèbre et théorie des nombres

RIEMANNSCHE MATRIZEN UND FAKTORENSYSTEME

Von HERMANN WEYL, Princeton, New Jersey.

Mit jedem geschlossenen Weg α auf einer Riemannschen Fläche vom Zusammenhangsgrad $g=2p$ ist eindeutig ein Differential 1. Gattung dw_α assoziiert. Wählt man eine Basis für die Wege, so bilden die zugehörigen Differentiale gleichfalls eine Basis im reellen Sinne. Die g-reihige Matrix der Perioden hat einen Realteil C, der rational und schiefsymmetrisch ist, und einen Imaginärteil S, der symmetrisch und positiv-definit ist; $R=C^{-1}S$ heißt die zugehörige *Riemannsche Matrix*. Allgemeiner mag man C und S beliebig annehmen im Einklang mit den eben aufgezählten Eigenschaften. Die Frage der *„komplexen Multiplikation"* kommt darauf hinaus, die rationalen Kommutatoren A von R zu bestimmen; sie bilden eine Algebra $\mathfrak{A}$ im Körper k der rationalen Zahlen. Ihre Untersuchung ist äquivalent dem Studium der kleinsten Algebra $\mathfrak{L}$ in k, deren Erweiterung auf den Körper K der reellen Zahlen die gegebene Riemannsche Matrix R einschließt („assoziierte Algebra"). Für k und K kann man allgemeiner einen beliebigen reellen Körper im Sinne von Artin-Schreier annehmen, bezw. eine reelle, reellabgeschlossene Erweiterung von k. Die Frage ist, *welche Struktur muß eine gegebene Matrixalgebra $\mathfrak{L}$ in k besitzen, um mit einer Riemannschen Matrix assoziiert zu sein.* Durch Poincarés Theorem der vollen Reduktion wird das Problem reduziert auf den Fall, wo $\mathfrak{L}$ irreduzibel ist.

Nach I. Schur und A. Brauer kennzeichnet man eine einfache Algebra wie $\mathfrak{L}$ durch ihr Faktorensystem mit bezug auf einen gewissen *Zerlegungskörper*. Nach Rosati wird dieser Zerlegungskörper total-reell, wenn man sich darauf beschränkt, in Bestandteile zu zerlegen, die irreduzibel in K (dem Körper der reellen Zahlen) sind statt absolut-irreduzibel. Die Glieder des Faktorensystems sind alsdann nicht skalar, sondern Größen aus einer der drei Divisionsalgebren, die über K möglich sind; man erhält sie, indem man entweder nichts adjungiert, oder die Quadratwurzel aus einer total-negativen Zahl, oder eine „total-negative" Quaternion. Die Norm dieses „quantic factor set" ist ein skalares Faktorensystem. Die gesuchte notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{L}$ mit einer Riemannschen Matrix assoziiert ist, besteht darin, *daß das Norm-Faktorensystem total-positiv äquivalent der 1 ist.* Verglichen mit den Methoden und Resultaten der bahnbrechenden Arbeiten A. A. Alberts ist der Beweis dieses Satzes erstaunlich einfach.

PSEUDOBEWERTUNGEN

Von K. MAHLER, z. Zt. Krefeld.

Eine für alle Elemente a eines kommutativen Ringes R mit Einselement definierte reellwertige Funktion $W(a) \geqq 0$ mit

$$W(0)=0, \quad W(a-b) \leqq W(a)+W(b), \quad W(a\,b) \leqq W(a)\,W(b)$$

heiße eine Pseudobewertung (kurz: Pb.). Analog wie in der Theorie der Bewertungen von Kürschak lassen sich Fundamental- und Nullfolgen in bezug auf $W(a)$ definieren, und man kann von R zum perfekten Ring R'_W übergehen, in dem jede Fundamentalfolge einen Limes hat. Jedoch wird nicht R, sondern im allgemeinen erst ein Unterring hiervon in R'_W enthalten sein.

Die Summe

$$W(a)=\sum_{k=1}^{n} W_k(a)$$

endlichvieler Pb. ist wieder eine Pb. Genügen die Summanden einer gewissen Unabhängigkeitsbedingung (alsdann reden wir von einer direkten Summe), so wird der zur Summe gehörige perfekte Ring R'_W isomorph der direkten Summe der einzelnen perfekten Ringe $R'_{W_1}, \cdots, R'_{W_n}$. Umgekehrt kann eine Pb. im wesentlichen nur auf eine Art als direkte Summe unabhängiger Pb. dargestellt werden.

Man nennt zwei Pb. $W_1(a)$ und $W_2(a)$ einander äquivalent, wenn Fundamentalfolgen und Nullfolgen bei beiden übereinstimmen. Dann entsteht das Problem, alle nichtäquivalenten Pb. von R anzugeben, also alle nichtisomorphen perfekten Ringe R'_W, die zu R gehören. Die Aufgabe ist im allgemeinen recht schwierig, läßt sich aber für endliche algebraische Zahlkörper, bzw. für die Hauptordnung solcher Körper vollständig lösen.

LES GRANDS NOMBRES PREMIERS

Par M. KRAITCHIK, Bruxelles.

1. Nous avons commencé dans « Mathematica », vol. VII, p. 92—94 l'établissement d'une collection des grands nombres premiers ($> 10^{12}$). Ce premier essai contenait 94 nombres premiers.

La question fut reprise dans le Sphinx (1933, p. 100—101) où nous avons enrichi notre collection des nouveaux nombres premiers. Cette deuxième liste en contient 161.

Différents correspondants ont signalé dans le Sphinx des nouveaux nombres premiers (Sphinx 1933, p. 125, 144; 1934, p. 47, 159, 175, 189, 190; 1935, p. 48, 63). Si nous avions à refaire notre liste, elle contiendrait aujourd'hui 195 nombres premiers $> 10^{12}$.

2. Afin d'étudier la fréquence des nombres premiers dans les régions suffisamment élevées, nous avons commencé en 1933 l'étude des 10000 nombres compris entre $10^{12} - 10000$ et 10^{12}. Cette étude est achevée aujourd'hui.

Nous donnons ci-dessous une table qui indique le plus petit diviseur de tous les nombres non divisible par 2 ou 5. Cette table comporte 336 nombres premiers.

Voici quelques renseignements statistiques sur ces nombres.

d est le plus petit diviseur du nombre considéré. Nous avons énumeré par millier le nombre des nombres composés dont le plus petit diviseur est:

1° $d=3$
2° $d=7$
3° d est un nombre de deux chiffres
4° —»— —»— trois »
5° —»— —»— quatre »
6° —»— —»— cinq »
7° —»— —»— six »

La ligne suivante donne le nombre des nombres premiers:

$$27+38+31+26+38+38+29+30+41+38=336.$$

La classification suivante est faite *par centaine*:

Il existe	2	centaines	ne contenant aucun	nombre	premier
»	10	»	contenant chacune	1	nombre premier
»	21	»	—»—	2	—»—
»	22	»	—»—	3	—»—
»	24	»	—»—	4	—»—
»	7	»	—»—	5	—»—
»	12	»	—»—	6	—»—
»	1	»	—»—	7	—»—
»	1	»	—»—	8	—»—

Enfin, nous avons énumeré les nombres premiers de la forme *f* donnée.

Nombres premiers compris entre 10^{12}—10000 et 10^{12}.

999999990000 +

0047	1007	2003	3029	4009	5009	6097	7013	8021	9091
61	09	09	61	87	17	137	103	47	101
167	13	53	71	117	47	97	47	59	33
93	43	77	73	27	51	209	63	69	43
251	57	113	79	63	101	11	201	141	61
57	73	41	259	71	07	23	59	43	247
307	141	49	87	319	17	77	77	59	53
401	63	83	361	61	31	311	327	71	69
49	71	221	89	79	47	23	43	83	77
63	217	31	467	403	77	71	91	91	87
99	59	61	81	23	207	449	97	203	93
523	71	91	557	29	37	67	433	27	301
47	79	93	99	39	99	73	59	37	31
59	97	97	611	57	327	581	517	81	59
89	321	333	53	63	39	601	89	311	91
99	27	89	749	71	83	23	603	99	457
629	37	437	63	93	413	37	21	401	97
31	43	41	79	517	19	59	79	29	517
41	69	47	93	79	29	701	721	41	29
77	73	531	847	83	61	39	23	49	71
701	447	39	59	603	83	69	53	61	77
79	513	611	71	07	97	81	57	97	89
811	17	39	99	13	537	823	71	509	99
27	47	47	907	39	73	81	93	13	611
89	53	731	11	87	81	89	819	27	17
917	91	37	29	729	653	99	23	31	73
37	97	41		69	711	901	31	33	97
	643	43		81	47	77	907	67	707
	733	843		93	73	79	33	81	67
	87	941		801	857		39	611	847
	89	77		17	87			713	57
	819			23	99			19	63
	47			97	933			37	77
	67			909	57			61	99
	973			37	83			71	937
	79			57	87			801	59
	93			79	89			21	61
	99			99	93			63	89
								67	
								939	
								41	

ÜBER ERWEITERUNGEN VON UNENDLICHEN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERN

Von M. Gut, Zürich.

Es gibt algebraische Zahlkörper k von unendlich hohem Grade mit der Eigenschaft, daß für alle Primideale von k der absolute Grad und die absolute Ordnung endlich sind. Zu diesen Körpern gehört z. B. das Kompositum aller absolut zyklischen Körper von einem festen Primzahlgrade.

Für solche Körper k kann man unabhängig von der allgemeinen Theorie der Erweiterungen der unendlichen algebraischen Zahlkörper, wie sie Herbrand aufgestellt hat, auf einfachste Weise die Theorie der Erweiterungen von endlichem Grade entwickeln und dabei neue Sätze gewinnen. Es gilt nämlich mutatis mutandis die arithmetische Theorie, die Herr Ore über Erweiterungen endlichen Grades von gewöhnlichen algebraischen Zahlkörpern aufgestellt hat in den Math. Ann., vol. 96, pg. 313 (1926) und vol. 97, pg. 569 (1927). Insbesondere gelten der Zerlegungssatz für die Primideale von k, der Satz über die Lückenzahlen der relativen Supplementzahlen, der Existenzsatz über Erweiterungskörper von endlichem Grade, in denen endlich viele Primideale von k vorgeschriebene mögliche Zerlegungen und relative Supplementzahlen haben, und der schöne Satz über den maximalen Beitrag eines Primideales von k zur Relativdiskriminanten bei festgehaltenem Erweiterungsgrad. Ferner bleibt das Kriterium über gemeinschaftliche außerwesentliche Relativdiskriminantenteiler erhalten.

Die Arbeit wird in den Commentarii Mathematici Helvetici erscheinen.

SUR LA GRANDEUR DES DIVISEURS PREMIERS D'UNE CLASSE DE POLYNOMES CUBIQUES

Par Trygve Nagell, Uppsala.

Soit $f(x)$ un polynome à coefficients entiers. Désignons, pour tout x entier positif, par p_x le plus grand nombre premier qui divise le nombre entier $f(x)$, sauf si $f(x)=0$. Alors on peut se proposer le problème d'étudier comment p_x varie avec x. Les recherches sur ce sujet ont été commencées par M. C. STØRMER,[1] qui a démontré qu'on a pour les deux polynomes $f(x) = x^2 \pm 1$

$$\lim_{x \to \infty} p_x = \infty.$$

Puis M. G. PÓLYA[2] a montré que cela est encore vrai pour tous les polynomes quadratiques, dont les racines sont distinctes. Enfin M. C. SIEGEL[3] a étendu la validité de ce résultat à tous les polynomes $f(x)$, qui admettent au moins deux zéros différents.

Il serait naturellement d'un grand intérêt d'obtenir des résultats plus précis sur la croissance de p_x comme fonction de x. Le premier résultat dans cette direction est dû à M. K. MAHLER.[4] En attirant des théorèmes connus d'approximation sur les solutions de l'équation de Pell et sur les nombres premiers il a approfondi les résultats de M. Størmer et démontré la relation suivante

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{p_x}{\log\log x} \geqq 1. \tag{1}$$

Dans un travail qui vient d'être publié, il a montré que cette relation est aussi valable pour tous les polynomes

$$D x^2 - A,$$

où D est un nombre naturel et où A désigne l'un des nombres $+1$, -1, $+2$ ou -2.[5]

Ce résultat est sans doute valable pour tous les polynomes quadratiques; mais il reste encore en donner la démonstration.

En passant aux polynomes cubiques j'ai pu ajouter au résultat de M. Mahler le résultat suivant:

La relation (1) *est valable pour tous les polynomes*

$$A x^3 - C,$$

où A est un nombre naturel, et où C a l'une des valeurs $+1$, -1, $+3$ *ou* -3.

---

[1] C. STØRMER, Quelques théorèmes sur l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ et leurs applications, Videnskapsselskabets Skrifter I, Mathem.-naturv. Klasse (Kristiania 1897), No. 2.

[2] G. PÓLYA, Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome, Mathematische Zeitschrift, Bd. 1 (1918).

[3] C. SIEGEL, Approximation algebraischer Zahlen, Mathematische Zeitschrift, Bd. 10 (1920), Satz 7.

[4] K. MAHLER, Über den größten Primteiler der Polynome $x^2 \pm 1$, Archiv f. Mathem og Naturv., Bd. XLI, Nr. 1 (Oslo 1933).

[5] K. MAHLER, Über den größten Primteiler spezieller Polynome zweiten Grades, ibid. Bd. XLI, Nr. 6 (Oslo 1935).

La démonstration repose sur mes recherches sur les solutions en nombres entiers x et y de l'équation indéterminée[1]

$$Ax^3+By^3=C.$$

Pour établir la relation (1) je dois aussi me servir d'une inégalité pour l'unité fondamentale d'un corps cubique à discriminant négatif.[2] La démonstration sera publiée prochainement dans les *Mathematischen Annalen.*

ÜBER DIE METHODE VON WORONOJ ZUR BERECHNUNG EINER BASIS EINES KUBISCHEN KÖRPERS

Von HARALD BERGSTRÖM, Uppsala.

Man verdankt Woronoj den folgenden Satz[3]:

Wenn ϑ eine ganze kubische Zahl ist, Wurzel der Gleichung

$$F(x)=x^3-ax^2+bx-c=0$$

kann man eine Basis des Körpers $K(\vartheta)$ in der Form

$$1,\ \frac{\varphi_1}{g},\ \frac{\varphi_2}{g^2 f}$$

darstellen,

wo g die größte natürliche Zahl ist, für welche die Kongruenzen

$$F(x)\equiv 0 \pmod{g^3},\quad F'(x)\equiv 0 \pmod{g^2},\quad \frac{1}{2}F''(x)\equiv 0 \pmod{g}$$

gleichzeitig lösbar sind,

wo f die größte natürliche Zahl ist, für welche die Kongruenzen

$$F(x)\equiv 0 \pmod{f^2 g^3},\quad F'(x)\equiv 0 \pmod{f g^2},\quad \frac{1}{2}F''(x)\equiv 0 \pmod{g}$$

eine Lösung $x=t$ haben,

$$\text{wo } \varphi_1=\vartheta-t \text{ und } \varphi_2=\frac{F(\vartheta)-F(t)}{\vartheta-t}=(\vartheta-t)^2+\frac{1}{2}F''(t)(\vartheta-t)+F'(t)$$

$$\text{und wo } -\frac{1}{2}fg<t\leqq\frac{1}{2}fg.$$

[1] T. NAGELL, Solution complète de quelques equations cubiques à deux indeterminees, Journal de mathém., tome IV (sér. 9e), Paris 1925.

[2] E. LANDAU, Abschätzung von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen, Göttinger Nachrichten 1918.

[3] Nach mündlicher Mitteilung von Herrn T. Nagell. Einen Beweis findet man in J. Sommer, Vorlesungen über Zahlentheorie (1907), 72. Abschnitt. Zwar ist dort der Satz in einer anderen Fassung gegeben und allzu umständlich bewiesen.

Ohne Verlust an Allgemeinheit können wir jetzt voraussetzen, daß $a=0$ und daß nicht gleichzeitig $b\equiv 0 \pmod{p^2}$, $c\equiv 0 \pmod{p^3}$, wo p eine Primzahl ist. Dann können wir den Woronojschen Satz durch den folgenden Zusatz ergänzen.

Wenn $D(\vartheta)$ die Diskriminante der Zahl ϑ und D die Körperdiskriminante bedeutet, gilt:

$$D(\vartheta)=(fg^3)^2\cdot D=(2^\lambda\cdot 3^\nu\cdot m\,l)^2\cdot D$$

wo l die größte natürliche Zahl ist, für welche $b\equiv 0 \pmod{l}$, $c\equiv 0 \pmod{l^2}$,

wo m die größte natürliche Zahl ist, dessen Quadrat in $D(\vartheta)$ aufgeht und für welche $(2b, m)=1$,

wo $\nu=0$, wenn $c^2+b-1\not\equiv 0 \pmod 9$ oder $D(\vartheta)\not\equiv 0 \pmod 9$,

wo $\nu=1$, wenn $c^2+b-1\equiv 0 \pmod 9$ und $D(\vartheta)\equiv 0 \pmod 9$, $\not\equiv 0 \pmod{3^6}$,

wo $\nu=$ die größte natürliche Zahl, für welche $D(\vartheta)\equiv 0 \pmod{3^{2\nu}}$ sonst, d. h. wenn $c^2+b-1\equiv 0 \pmod 9$ und $D(\vartheta)\equiv 0 \pmod{3^6}$,

wo $\lambda=0$, wenn b gerade ist, und

wo $\lambda=$ die größte natürliche Zahl, für welche $D(\vartheta)\equiv 0 \pmod{2^{2\lambda}}$ und gleichzeitig $D(\vartheta)\equiv 2^{2\lambda}$ oder $0 \pmod{2^{2\lambda+2}}$, wenn b ungerade ist.

Es ist $g=3$, wenn $\nu\geqq 3$, sonst $g=1$.

Man bestimmt t aus den Kongruenzen:

$2bt\equiv 3c \pmod{m}$; $t\equiv 0 \pmod{l}$; $t\equiv c \pmod 3$, wenn $\nu=1$, $2bt\equiv 3c \pmod{3^{\nu-1}}$, wenn $\nu>1$;

$2bt\equiv 3c \pmod{2^\lambda}$, $\not\equiv 3c \pmod{2^{\lambda+1}}$, wenn $D(\vartheta)\equiv 2^{2\lambda} \pmod{2^{2\lambda+2}}$

$2bt\equiv 3c \pmod{2^{\;+1}}$, wenn $D(\vartheta)\equiv 0 \pmod{2^{2\lambda+2}}$.

Zu diesem Resultat kommt man durch einfache Kongruenzbetrachtungen.

Es gehe die Primzahl p genau in der Potenz p^γ in fg^2 auf. Dann ist offenbar

$$3F(x)-xF'(x)=2bx-3c\equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

Setzen wir demnach $2bx-3c=yp^\gamma$, wo also y ganz rational ist, bekommen wir die Identitäten:

$$8b^3F(x)=-D(\vartheta)\cdot c-yp^\gamma D(\vartheta)+9cy^2p^{2\gamma}+y^3p^{3\gamma}$$
$$4b^2F'(x)=-D(\vartheta)+18ycp^\gamma+3y^2p^{2\gamma}.$$

Aus diesen Gleichungen und den Woronojschen Kongruenzbedingungen für g, f ünd t folgen die obigen Behauptungen. Wir übergehen hier die nähere Ausführung des Beweises. (Der Beweis wird in dem nächst erschienden Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Band 25 B. N:o 26 publiziert.)

ZUR THEORIE DER DIOPHANTISCHEN APPROXIMATIONEN

Von VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganze Zahlen, griechische Buchstaben — reelle Zahlen.

I. Sind $\theta_1, \cdots, \theta_n$ vorgegeben, so definiere man $\beta(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ bzw. $\gamma(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ als die obere Grenze derjenigen Zahlen α, für welche die Ungleichungen

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\theta_i + x_{n+1}\right| < \frac{1}{x^{n+\alpha}}, \quad 0 < x = \underset{1 \leqq i \leqq n}{\mathrm{Max}} |x_i|$$

bzw. die Ungleichungen

$$q > 0, \ |q\theta_i - p_i| < q^{-\frac{1+\alpha}{n}} \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

unendlichviele Lösungen (in $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$ bzw. in $q, p_1, \cdots, p_n$) besitzen.

1) Es läßt sich zeigen, daß die durch den Khintchineschen Übertragungssatz

$$\beta \geqq \gamma \geqq \frac{\beta}{(n-1)\beta + n^2}$$

gegebenen Schranken für γ für jeden vorgegebenen Wert von β scharf sind.

2) Ist $\beta(\theta_1)$, $\beta(\theta_2)$ vorgegeben, so kann man scharfe Schranken für $\beta(\theta_1, \theta_2)$ und $\gamma(\theta_1, \theta_2)$ angeben.

II. Wenn $1 < k \leqq n$ ist und wenn aus $\sum_{i=1}^{n} x_i\theta_i + x_{n+1} = 0$ folgt $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = 0$, so hat man folgende Sätze:

1) Für *jedes hinreichend große* $t > 0$ kann man Zahlen $x_1, \cdots, x_{n+1}$ mit

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\theta_i + x_{n+1}\right| < t^{-n+k-1}, \quad |x_i| \leqq t \text{ für } 1 \leqq i \leqq n$$

finden, wobei mindestens k von den Zahlen $x_1, \cdots, x_n$ von Null verschieden sind.

2) Für ***unendlichviele*** $t > 0$ kann man Zahlen $x_1, \cdots, x_{n+1}$ mit

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\theta_i + x_{n+1}\right| < c(n)\, t^{-n+k-2}, \quad |x_i| \leqq t \text{ für } 1 \leqq i \leqq n$$

finden, wobei mindestens k von den Zahlen $x_1, \cdots, x_n$ von Null verschieden sind.

3) Die Exponenten $-n+k-1$, $-n+k-2$ sind scharf.

NOTE ON THE FOUR INTEGER CUBE PROBLEM

L. J. MORDELL, Manchester.

The problem is, can all integers n be expressed as a sum of four integral cubes, i. e., is

$$x^3+y^3+z^3+t^3=n \tag{1}$$

always soluble in integers x, y, z, t?

This is true for all integers[1] except possibly when

$$n \equiv \pm 4 \pmod 9,\ n \equiv \pm 38 \pmod{108},\ n \equiv \pm 164 \pmod{432}, \tag{2}$$

and is deduced from identities such as

$$k^3+(-k+4)^3+(2k-5)^3+(-2k+4)^3=6k+3, \tag{3}$$

$$(k+2)^3+(6k-1)^3+(8k-2)^3+(-9k+2)^3=18k+7, \tag{4}$$

and similar ones for $18k+1$, $18k+8$ etc.

It is then shown that no identities of this type exist for $9k \pm 4$, and it is not known whether they exist for $18k \pm 2$.

Further, if (1) has one integer solution x, y, z, t such that $(x+y)\cdot(z+t)$ is negative but not a negative square, then there exists an infinity of integral solutions; and in particular when n is not one of the set in (2).

There are also interesting results when the summands in (3), (4) are quadratic in k. Thus if $n=X^3+Y^3$, an infinity of solutions of (1) are given by

$$\begin{aligned}
2x&=X(-l^2-3l)+Y(-l^2+l+2),\\
2y&=X(-l^2-l+2)+Y(-l^2+3l),\\
2z&=X(l^2+2l-1)+Y(l^2-2l+1),\\
2t&=X(l^2+2l+1)+Y(l^2-2l-1),
\end{aligned}$$

where l is any odd integer.

---

[1] A full account has appeared in the Journal of the London Math. Society, 11, (1936), 208–218. I have since found that Richmond in a paper in the Messenger of Maths., 51 (1932) 177–186, has anticipated me in many of the decompositions such as (3), and in the result for $9k \pm 4$, and in most of the result given by (2).

EIN PROBLEM AUS DER THEORIE DER DIOPHANTISCHEN APPROXIMATIONEN

Von MATSUSABURÔ FUJIWARA, in Sendai, Japan.

Es sei ω irgend eine irrationale Zahl und

$$[a_0 a_1 a_2 \cdots\cdot]$$

sei die Kettenbruchentwicklung von ω; ferner sei $P_n/Q_n = [a_0 a_1 \cdots\cdot a_n]$ der n-te Näherungsbruch. Setzt man

$$S_n = \left| Q_n^2 \left(\omega - \frac{P_n}{Q_n} \right) \right|,$$

so kann man den klassischen Hurwitzschen Satz und die Ergänzungen dazu in der folgenden Form ausdrücken:

I. (Hurwitz-Borel). Mini $(S_{n-1}, S_n, S_{n+1}) < \frac{1}{\sqrt{5}}$ für jedes n.

II. (Hurwitz-Humbert-Fujiwara). Mini $(S_{n-1}, S_n, S_{n+1}) < \frac{1}{\sqrt{8}}$, wenn $a_{n+1} \geqq 2$ ist.

III. (Vahlen). Mini $(S_{n-1}, S_n) < \frac{1}{2}$ für jedes n.

Diese sämtliche Resultate habe ich[1] in 1917 und 1924 in einem Schlag bewiesen und verallgemeinert mit Herrn Morimoto in der folgenden Form:

$$\text{Mini } (S_n, S_m, S_l) < \left\{ \left(\frac{Q_{nm}^2 + Q_{ml}^2 + Q_{nl}^2}{Q_{nm}\, Q_{ml}\, Q_{nl}} \right)^2 - \frac{4}{Q_{nl}^2} \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

wo $m-n$, $l-m$ ungerade sind und

$$P_{pq}/Q_{pq} = [a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots\cdot, a_q].$$

Als ein spezieller Fall kann man daraus schließen daß

$$\text{Mini } (S_{n-1}, S_n, S_{n+3}) < \frac{5}{\sqrt{221}},$$

wenn $a_{n+1} \geqq 2$, $a_{n+2} = 1$ sind. Dies besagt daß, wenn ω nicht mit $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $1+\sqrt{2}$ äquivalent ist, so gibt es unendlichviele Brüche P/Q derart daß

$$\left| \omega - \frac{P}{Q} \right| < \frac{5}{\sqrt{221}\, Q^2}.$$

Für komplexe irrationale Zahl ω ist meine Methode nicht hinreichend das Analogon des Hurwitzschen Satzes aufzufinden, während die Herren Ford

[1] Fujiwara, Tôhoku Math. Journ., 11 (1917), 14 (1918); Science Reports, Tôhoku University, 13 (1924); Proc. Imperial Academy of Japan, 2 (1926).

und Perron[1] dieses in den Körper $K(i)$ und $K\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$, $K(\sqrt{-2})$ wirklich angegeben haben.

Jedoch kann ich durch meine Methode das Analogon des Vahlenschen Satzes angeben.

Wir legen nun einen beliebigen algebraischen Körper Ω zu Grund und betrachten irgend eine Kettenbruchentwicklung einer Zahl ω, welche nicht zu Ω gehört, wo die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $$|Q_{n-1}| < |Q_n| \to \infty \, (n \to \infty),$$

(2) Es existiert eine positive Zahl $k > 1$ von der Art, daß für jedes n $|\omega_n| \geqq k$, wo $\omega_n = [a_{n+1}\, a_{n+2} \cdots]$ bedeutet.

Dann kann man schließen:

Ist $\lambda_0 = k(k-1)/(1+k(k-1))$, dann gilt

$$\text{Mini}\,(S_{n-1}, S_n) \leqq \frac{1}{\lambda_0}.$$

Im Körper $R(i)$, wo R den rationalen Körper bedeutet, ist $k=\sqrt{2}$ nach Hurwitz;[2] daher ist

$$\text{Mini}\,(S_{n-1}, S_n) \leqq \frac{7}{4\sqrt{2}-2} = \frac{1}{0.5224} < 2.$$

Herr Prof. Perron[1] hat die Existenz unendlichvieler Paare P und Q, welche ganze Zahlen im $R(i)$ sind, derart daß

$$\left|\omega - \frac{P}{Q}\right| \leqq \frac{2}{|Q|^2}$$

bewiesen durch das klassische Schubladenverfahren von Dirichlet

Im Körper $R\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$, ist $k=\sqrt{3}$, so daß

$$\text{Mini}\,(S_{n-1}, S_n) \leqq \frac{13}{9\sqrt{3}-3} = \frac{1}{0.968\cdots} < \frac{10}{9},$$

während Herr Prof. Perron gezeigt hat, daß es unendlichviele Paare P und Q, welche ganze Zahlen im Körper $R\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ sind, existieren von der Art daß

$$\left|\omega - \frac{P}{Q}\right| \leqq \frac{\sqrt{21}}{2}\frac{1}{|Q|^2}.$$

---

[1] Ford, Trans. American Math. Society, 27 (1925); Perron, Math. Annalen 103 (1930), 105 (1931), Münchner Berichte 1931, Math. Zeits. 37 (1933).

[2] Hurwitz, Acta Math. 11 (1887—88).

EINE ENDLICHE MENGE REDUZIBLER POLYNOME BEI GEWISSEN UNENDLICHEN PARAMETERVARIATIONEN

Von ERIK L. PETTERSON in Stockholm.[1]

Ein ganzzahliges von x und E hat die Form

$$H(x, E) = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu(x) E^\nu,$$

wo alle $h_\nu(x)$ ganzzahlige Polynome sind. Ist dieses Polynom von x und E irreduzibel, so erhält man nach dem *Hilbertschen Irreduzibilitätssatz* unendlich viele irreduzible Polynome von x, wenn E alle ganzen Zahlen durchläuft. Doch kann dabei gleichzeitig sein, daß auch unendlich viele reduzible Polynome erzeugt werden.

Wird $h_\nu(x) = g_\nu(x) x$ gesetzt $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$, so gilt folgender Satz: *Es sei $f(x)$ ein Polynom der Form*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(x) x E^\nu + g_0(x),$$

wo alle $g_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots, n$, ganzzahlige Polynome eines imaginär-quadratischen Körpers K sind. Es seien ferner $g_0(0) \neq 0$, $g_n(0) \neq 0$ und kein Faktor für alle $g_\nu(x)$, $(\nu = 0, 1, \cdots, n)$, gemeinsam. Wenn dann E alle ganzen Zahlen aus K durchläuft, so enthält die dadurch erzeugte unendliche Menge von Polynomen $f(x)$ eine endliche und nur von den Koeffizienten in $g_\nu(x)$, $(\nu = 0, 1, \cdots, n)$, abhängige Anzahl in K reduzibler Polynome.

Wäre nämlich $f(x)$ reduzibel für unendlich viele E,

$$f(x) = A(x) B(x),$$

so würde diesen reduziblen $f(x)$ eine Menge von Faktoren $A(x)$ mit beschränkten Wurzeln und Koeffizienten entsprechen. Eine derartige Menge kann aber nur endlich viele verschiedene Polynome $A(x)$ enthalten. Aus der Reduzibilität des $f(x)$ für unendlich viele E folgt also, daß wenigstens ein fester Faktor $A(x)$ vorkommen muß für unendlich viele E, was doch unmöglich ist.

---

[1] Kürzlich erschienen in Math. Annalen (114, s. 74, 1937).

VOLUMES MIXTES ET FACTEURS INVARIANTS DANS LA THÉORIE DES MODULES

Par MARCEL RIESZ à Lund.

Il y a une correspondance intime entre la théorie des corps convexes et celle des modules. Cela tient au fait que ce sont les mêmes opérations $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ qui, sous des conditions différentes, conservent d'une part les corps convexes ($\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$), d'autre part les modules (λ_1 et λ_2 entiers). En nous bornant ici à des modules M de points entiers dans l'espace à n dimensions, nous entendons par le « volume » de M le *module de nombres* formé des multiples du volume du parallélépipède élémentaire. Ce module est identique à l'ensemble des volumes des parallélépipèdes construits sur les vecteurs de M.

$M_1, M_2, \cdots M_s$ étant encore des modules de points entiers et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_s$ des nombres entiers, le « volume » du module $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \cdots + \lambda_s M_s$ est un polynome homogène du degré n dans les λ, dont les coefficients, les « *volumes mixtes* », sont des *modules de nombres*. Le coefficient de $\Pi \lambda_j^{k_j}$ s'obtient comme l'ensemble des volumes des parallélépipèdes construits sur des vecteurs dont exactement k_j appartiennent à M_j ($j = 1, 2, \cdots s$).

Il y a un grand rapport entre les volumes mixtes et les facteurs invariariants des modules. Au lieu d'y insister, nous montrons ici, comment on peut caractériser chacun des facteurs invariants $e_1, e_2, \cdots e_k, \cdots$ d'un module M indépendamment des autres. En désignant par (a) l'ensemble des multiples d'un nombre arbitraire a, on exprime le fait que a est diviseur de b par l'inégalité $(b) \subseteqq (a)$, entendue au sens de la théorie des ensembles. On sait d'autre part que le module (e_1) est identique à l'ensemble des produits scalaires (x, v), quand x parcourt tous les points de M et v tous les points entiers de l'espace. (e_1) est donc une espèce de maximum, embrassant tous les modules qu'on peut former des produits scalaires (x, v). Le module (e_k) peut s'obtenir de la manière suivante. Donnons nous arbitrairement $k-1$ points entiers et restreignons x à ceux des points de M dont le produit scalaire avec chacun des points donnés est zéro. L'ensemble des valeurs (x, v) ainsi obtenues forme un module (e'_k). Parmi ces modules il y en a *un* (e_k) qui est *minimum*: $(e_k) \subseteqq (e'_k)$. Le module (e_k) s'obtient donc comme une espèce de *minimum-maximorum*. On sait quel parti heureux M. COURANT a su tirer de la caractérisation analogue des valeurs singulières des équations intégrales. Il en est de même ici. P. ex. les conditions, dues à FROBENIUS, pour qu'une forme bilinéaire contienne une autre, résultent en quelques mots de cette interprétation des facteurs invariants.

VERALLGEMEINERUNG EINES GALOISSCHEN SATZES

Von S. Lubelski, Warszawa.

Galois[1] hat ein Kriterium für die algebraische Auflösbarkeit eines Polynoms $f(x)$, dessen Grad g prim ist, gegeben. Ist die Gruppe G von $f(x)$ primitiv und ist $f(x)$ algebraisch auflösbar, so muß bekanntlich $g=p^k$, p — prim, sein. Mit solchen Polynomen haben sich Galois und Abel beschäftigt um auch für sie ein Kriterium der algebraischen Auflösbarkeit zu geben, aber ohne Erfolg. Dann hat sich C. Jordan mit dieser Frage beschäftigt und zwar ist sein berühmtes „Traité des substitutions" bis auf allgemeine Erwägungen über die Galoissche Theorie, dieser Frage gewidmet. Für den Fall $k=2$ gelang es ihm effektive Sätze über die entsprechende Galoissche Gruppe G aufzustellen. Ferner hat G. Bucht[2] die Jordanschen Erwägungen für den Fall $k=3$, 4 fortgeführt. Hier wollen wir ein Kriterium für jedes k aufstellen. Wir beweisen nämlich den folgenden Satz:

Voraussetzung: $f(x)$ ist ein algebraisch—auflösbares Polynom vom Grade p^k, wo p eine Primzahl bezeichnet. G ihre Galoissche Permutationsgruppe, die primitiv ist. q die gemeinsame Anzahl aller Ziffern, die durch die Permutationen S, und S von G gleichzeitig unverändert werden.

Behauptung: Es ist $q=0$ oder $q=p^t$ wo t eine nichtnegative ganze rationale Zahl bezeichnet.

Den Beweis dieses Satzes erhalten wir mittels eines Schmidtschen Satzes[3] über die Struktur von S. Mithin findet man, daß für den von Jordan betrachteten Fall $k=2$ G von besonders einfacher Struktur ist. Enthalten nämlich zwei Substitutionen aus G $v>0$ gemeinsame unveränderte Ziffern, so ist $v=1$ oder p.(4)

---

1 E. Galois. Oeuvres mathematiques, Paris 1897, 51—61.

2 G. Bucht. Ark. f. Mat. 5, 1909, 7—84.

3 O. Schmidt. Bull. d. l'Univer. Kieff 1913.

(4) Ausführliche Erwägungen über diesen Satz befinden sich in meiner Arbeit: ***Zur Reduzibilität von Polynomen in der Kongruenztheorie II***, *Acta Arithmetica* **2_2** (zur Zeit unter der Presse).

IDENTICAL RELATIONS IN GROUPS

By B. H. NEUMANN, Cambridge, England.

A well known problem due to W. BURNSIDE and solved as yet only in some particular cases, is whether a group with n generators is necessarily finite if all its elements fulfill the relation $x^k = 1$. The main problem here considered is closely related to the BURNSIDE problem: Which relations hold identically in a given group G, in other words, which functions — formed with inversion and multiplication of the variables only — assume the value 1 for every choice of arguments in G?

The functions in n variables in G form a group $V_n(G)$, two functions being reckoned as equal if they assume the same values throughout for the same arguments in G. $V_n(G)$ is generated by n functions, and the relations between them are just the identical relations in G. If G is finite, the $V_n(G)$ are finite; if G is soluble, the $V_n(G)$ are soluble; if G is the direct product of two groups of relatively prime orders, then so are the $V_n(G)$. The factor group of $V_n(G)$ with respect to its commutator subgroup is the direct product of n cyclical groups of equal order.

If G can be generated by n elements (or possibly less), there is a self-conjugate subgroup $\mathfrak{G}_n$ of the free group $\mathfrak{F}_n$ of n generators such that

$$G \cong \mathfrak{F}_n / \mathfrak{G}_n.$$

If $\mathfrak{V}_n(G)$ is the (uniquely determined) largest vollinvariant subgroup of $\mathfrak{F}_n$ contained in $\mathfrak{G}_n$, then

$$V_n(G) \cong \mathfrak{F}_n / \mathfrak{V}_n(G).$$

(A vollinvariant subgroup of a group — according to F. LEVI — is one which admits every operator applicable to the group.)

The theory of identical relations and groups $V_n(G)$ has been applied to special cases. Let $G_{h,p}$, h an arbitrary positive integer, p prime, be the direct product of $p-1$ cyclical groups $\{a_1\}, \cdots, \{a_{p-1}\}$ of order h extended by the automorphism of order p which changes a_π into $a_{\pi+1}$, and a_{p-1} into $a_1^{-1} a_2^{-1} \cdot \ldots \cdot a_{p-1}^{-1}$. ($G_{h,2}$ is the dihedral group of order $2h$, $G_{2,3}$ the alternating group on four symbols.) The groups $V_n(G_{h,p})$ have been determined. If p does not divide h, they are of order

$$(h \cdot p)^n \cdot h^{(n-1)(p^n-1)},$$

the second term being the order of the commutator group. If p divides h, the results are too complicated to be stated here in full. $V_2(G_{p,p})$ is of order

$$p^{2+\binom{p-1}{2}}$$

and therefore, according to a result due to P. Hall (unpublished), coincides with the largest *metabelian* group with two generators, whose elements (except unity) are of order p.

Proofs and other results have to be reserved for a detailed account of the subject which will be published later.

KOMBINATORISCHE ANZAHLBESTIMMUNGEN FÜR PERMUTATIONSGRUPPEN UND CHEMISCHE VERBINDUNGEN

Von G. Pólya, Zürich.

1. *Permutationsgruppen.* Die allgemeine Aufgabe sei am folgenden speziellen Beispiel erläutert: *Auf wie viele verschiedene Arten kann man 6 farbige Kugeln, von welchen 3 rot, 1 weiß und 2 blau sind, auf die 6 Ecken eines frei im Raume beweglichen Oktaeders verteilen?* Zur Beantwortung beachte man die Permutationsgruppe, welche die Drehungsgruppe des Oktaeders zwischen den 6 Oktaederecken induziert, man zerlege deren 24 Permutationen in elementenfremde Zyklen, man ordne jedem Zyklus m-ter Ordnung die Unbestimmte f_m ($m=1, 2, 3, \ldots$), jedem Produkt von Zyklen das Produkt der entsprechenden Unbestimmten zu, und bilde das arithmetische Mittel der so erhaltenen Potenzprodukte:

$$(f_1^6+8f_3^2+3f_1^2f_2^2+6f_2^3+6f_1^2f_4)/24.$$

Man setze hierin

$$f_m=x^m+y^m+z^m \quad (m=1, 2, 3, \ldots)$$

und entwickle nach Potenzen x, y, z: Der Koeffizient von x^3yz^2 ist die gesuchte kombinatorische Anzahl (wie an einer Figur leicht zu prüfen ist).

2. *Funktionalgleichungen.* Man bezeichne mit $r(x)$ die Potenzreihe, worin der Koeffizient von x^n die Anzahl der strukturell verschiedenen, isomeren Alkohole $C_nH_{2n+1}OH$ ist ($n=0, 1, 2, \ldots$). Die kombinatorische Überlegung, angewendet auf die Gruppe $\mathfrak{S}_3$, ergibt

$$r(x)=1+x[r(x)^3+3r(x)r(x^2)+2r(x^3)]/6.$$

Hieraus folgt u. a., daß die Anzahl der isomeren $C_nH_{2n+1}OH$ asymptotisch $\sim A\varrho^{-n}n^{-3/2}$ ist; A, ϱ sind positive Konstanten, $\varrho=0{,}35\ldots$ der Konvergenzradius von $r(x)$.

3. *Literatur.* Arbeiten des Verf. in Zschr. f. Kristallographie (A) *93* (1936) 415—443, C. R. *201* (1935) 1167—1169, *202* (1936) 1554—1556, Vierteljahrsschrift Zürich *81* (1936) 243—258, wo weitere Zitate auf Cayley, Henze und Blair, Lunn und Senior. Eine ausführliche Darstellung soll in den Acta Mathematica erscheinen.

SOME RECENT RESULTS IN COMBINATORIAL ANALYSIS

By RICHARD RADO, Cambridge, England.

1. Suppose we are given a system of equations

$$(1) \qquad a_{\mu 1} x_1 + a_{\mu 2} x_2 + \cdots + a_{\mu n} x_n = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m),$$

where $a_{\mu\nu}$, a_μ are complex numbers. Let A be a given set of numbers. We call (1) *regular* in A, if, and only if, (1) has the following property. However we split A into a finite number of subsets A_ϱ, always at least one of the sets A_ϱ contains a solution of (1). Roughly speaking, regularity of (1) in A means that those solutions of (1) which lie in A, interlock, in a certain sense, very intimately.

2. Homogeneous case: suppose that $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$.

Given a set M of numbers, we say that (1) has the property $\Gamma(M)$, if it is possible to divide the numbers $1, 2, \cdots, n$ into groups $\mathfrak{G}^{(1)}, \mathfrak{G}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{G}^{(k)}$ and to find numbers $x_\nu^{(\varkappa)}$, $x^{(\varkappa)}$ of M, such that, for $1 \leqq \varkappa \leqq k$,

$$\begin{aligned} &a_{\mu 1} x_1^{(\varkappa)} + a_{\mu 2} x_2^{(\varkappa)} + \cdots + a_{\mu n} x_n^{(\varkappa)} = 0 && \text{for } 1 \leqq \varkappa \leqq k \\ &x_\nu^{(\varkappa)} = x^{(\varkappa)} \neq 0 && \text{for } \nu \text{ in } \mathfrak{G}^{(\varkappa)}, \\ &x_\nu^{(\varkappa)} = 0 && \text{for } \nu \text{ in } \mathfrak{G}^{(\varkappa+1)} + \mathfrak{G}^{(\varkappa+2)} + \cdots + \mathfrak{G}^{(k)}. \end{aligned}$$

Let R be a ring of numbers and $R' = R - \{0\}$ the set of all non-vanishing numbers of R. Then we have in the case $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$.

Theorem I: (1) is regular in R', if, and only if, (1) has the property $\Gamma(R)$.[1]

Let C be the field of all complex numbers. Consequences of I are the following two theorems.

Theorem II: The equation

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n = 0 \qquad (b_\nu \neq 0)$$

is regular in $C - \{0\}$, if, and only if, there are indices $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_l$ $(1 \leqq l \leqq n;\ 1 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_l \leqq n)$ satisfying $a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \cdots + a_{\nu_l} = 0$.

Theorem III: If (1) is regular in $C - \{0\}$, and if the $a_{\mu\nu}$ are contained in a ring R, then (1) is regular in $R - \{0\}$.

3. Inhomogeneous case: the a_μ are arbitrary.

The appropriate property corresponding to $\Gamma(M)$ in 2., seems to be the property $\Delta(M)$, defined as follows. We say, (1) has the property $\Delta(M)$, if there is a number $x^{(0)}$ in M satisfying

[1] Regularity in R is trivial, since 0 in R and $x_\nu = 0$ is a solution of (1).

$$a_{\mu 1} \cdot x^{(0)} + a_{\mu 2} \cdot x^{(0)} + \cdots + a_{\mu n} \cdot x^{(0)} = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Let K be a number field.

Theorem IV: $\triangle(K)$ is a necessary and sufficient condition for regularity of (1) in K, provided that either all $a_{\mu\nu}$ and a_μ are algebraic or K contains only algebraic numbers.

It may be noted that the sufficiency in IV is trivial, while in I this is not so.

One might put forward the conjecture that for any field K and any values of $a_{\mu\nu}$, a_μ, the assertion of IV is true.

LA DÉCOMPOSITION D'UN GROUPE EN PRODUIT DIRECT DES SOUSGROUPES

Par Vladimír Kořínek, Praha.

Soit

(1) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots \times \mathfrak{G}_r$$

une décomposition du groupe $\mathfrak{G}$ en produit direct. Décomposons chaque facteur $\mathfrak{G}_i$, si c'est possible, de nouveau en produit direct

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i1} \times \mathfrak{G}_{i2} \times \cdots \times \mathfrak{G}_{it_i}.$$

J'appelle la décomposition directe de $\mathfrak{G}$ qui en résulte

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{11} \times \mathfrak{G}_{12} \times \cdots \times \mathfrak{G}_{1t_1} \times \mathfrak{G}_{21} \times \cdots \times \mathfrak{G}_{rt_r}$$

l'élargissement de la décomposition (1). Soit

(2) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \cdots \times \mathfrak{H}_s$$

une autre décomposition de $\mathfrak{G}$. Les décompositions (1) et (2) sont dites isomorphes, si $s = r$ et si l'on peut établir entre les facteurs $\mathfrak{G}_i$ et les facteurs $\mathfrak{H}_i$ une correspondance biunivoque de sorte que les facteurs correspondants sont isomorphes. Supposons maintenant que, dans le centre de $\mathfrak{G}$, chaque chaîne descendante des sousgroupes est finie. Sous cette supposition le théorème suivant se laisse démontrer:

I. Pour deux décompositions quelconques de $\mathfrak{G}$ telles que (1) et (2) on peut toujours trouver un élargissement de (1) et un élargissement de (2) qui sont isomorphes. Il en suit que si le groupe $\mathfrak{G}$ possède des décompositions en facteurs irréductibles (décompositions irreductibles), deux quelconques de ces décompositions sont isomorphes.

Ce dernier théorème est une généralisation d'un théorème de M. H. Fitting (Math. Zsch. 39, 1935, 16—40) concernant les décompositions irréductibles. M. Fitting suppose que dans $\mathfrak{G}$ chaque chaîne principale descendante et chaque chaîne principale montante est finie. Un autre théorème concernant ce sujet a été publié par M. Kurosch (Math. Ann. 106, 1932, 107—113) qui suppose que dans $\mathfrak{G}$ chaque chaîne normale descendante est finie. De même ce théorème est contenue dans le théorème énoncé plus haut.

II. Soit dans (1) $\mathfrak{K}_i$ le sousgroupe — commutateur et $\mathfrak{C}_i$ le centre du groupe $\mathfrak{G}_i$. Pour que deux décompositions telles que (1) et (2) aient un élargissement commun, il suffit, qu'une au moins d'elles, par exemple (1), possède la propriété suivante: Aucun groupe-quotient $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{K}_i$ ne doit être homomorphe à un sousgroupe du centre $\mathfrak{C}_k$, autre que le sousgroupe unité, pour chaque i et chaque $k \neq i$. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que le groupe $\mathfrak{G}$, possédant des décompositions irréductibles, en ait une seule. Ici on n'est pas obligé de faire une supposition quelqu'elle soit sur les chaînes de $\mathfrak{G}$ ou du centre de $\mathfrak{G}$.

Le théorème II. sur l'élargissement unique et la décomposition irréductible unique reste vrai même pour un groupe avec un champ d'opérateurs. Pour le théorème I sur les élargissements isomorphes et sur les décompositions irréductibles isomorphes j'étais obligé de supposer pour ce cas en plus que chaque chaîne montante du centre est finie.

Ces théorèmes font voir que les difficultés qu'on rencontre, en étudiant la décomposition d'un groupe en produit direct, ne sont dûes qu'aux propriétés inconvénientes du centre de $\mathfrak{G}$.

Le problème d'existence d'un élargissement commun de dense décompositions du groupe $\mathfrak{G}$ a été traité d'une façon très complète par M. Fitting dans un travail récent: Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, qui est apparu dans le 3[e] cahier du tome 41 de la Mathematische Zeitschrift. Je ne connaissais par ce travail au moment, où je faisais ma communication. Le 3[e] cahier du tome 41 de la Mathematische Zeitschrift porte la mention: Abgeschlossen am 26. Juni 1936. Le travail est daté 3 février 1936. La démonstration complète du théorème I paraîtra prochainement dans le Journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky).

ON A CLASS OF INFINITE SOLUBLE GROUPS

By KURT A. HIRSCH, Cambridge, England.

Infinite groups are called "soluble", if their derived series terminates in the 1-element after a finite number of steps. A general theory of these groups has not been, and is unlikely to be, developed as the Abelian factor-groups of the derived series may be arbitrarily complicated. The underlying idea of the investigations on which a report is given here is:

to select by an additional finiteness-condition a subclass of infinite soluble groups — called "S-groups" — which is restricted to an extent that they can be treated on similar lines as developed in the theory of finite soluble groups, yet remains wide enough to contain many interesting examples.

There are three equivalent definitions for S-groups.

I) S-groups are soluble groups in which the Abelian factor-groups of the derived series all have finite numbers of generators.

II) S-groups are soluble groups with "maximal condition" or Teiler-kettensatz (i. e. in which every increasing chain of subgroups has only a finite number of different terms).

III) S-groups are groups with a "Normalreihe" — series of subgroups each self-conjugate in the preceding one — of finite length and with cyclical factor-groups.

Three fields of problems are mainly considered.

1. Uniqueness-theorems corresponding to the JORDAN-HÖLDER and related theorems in the theory of finite groups. The simplest instance is: The number of infinite factor-groups in any series of the type described in definition III) is an invariant of the group.

2. The study of S-groups which possess a "central series" (i. e. coincide with their hypercentral). These groups are highly analogous to the finite groups with the same property, viz. the p-groups and their direct products. Most of the well known properties of finite p-groups — as far as they are not of an "arithmetical" character — can be extended to the case of infinite S-groups with a central series. To mention only two examples: The central contains every cyclical self-conjugate subgroup of infinite or prime order. Every proper subgroup is different from its normaliser and, in particular, all maximal subgroups are self-conjugate.

In an S-group with central series the elements of finite order form a (characteristic) subgroup.

3. The investigation of general S-groups by means of characteristic constituents with a central series. An important result is that the property whether an S-group has, or has not, a central series, makes itself apparant already in the finite factor-groups. With the help of this theorem some of the properties of S-groups with a central series can be proved to be characteristic. E. g. if in an S-group all maximal subgroups are self-conjugate, then it has a central series.

A detailed account of these and further results, together with examples, will be published later.

LES SUBSTITUTIONS QUI SONT DES TRANSFORMÉES RÉCIPROQUES

Par SOPHIE PICCARD, Neuchâtel.

Nous appelons *transformées réciproques* deux substitutions S et T, telles que

$$STS^{-1} = TST^{-1} \text{ [1]}$$

Quelle que soit la substitution R et quel que soit l'élément a de R, désignons par a l'élément que R substitue à a.

Nous disons que deux substitutions S et T sont *connexes*, si elles sont composées des mêmes éléments formant un ensemble fini E et s'il n'existe aucun sous-ensemble propre E_1 de E, dont les éléments forment un système fini de cycles aussi bien dans S que dans T. On voit immédiatement que deux substitutions formées des mêmes éléments peuvent toujours être décomposées en un système de substitutions connexes.

Etant données deux substitutions connexes S et T, désignons par $\binom{T}{S}$ la substitution $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_n} \end{pmatrix}$ formée des mêmes éléments que S et T et telle que $a_j^t = a_{i_j}^s$, quel que soit $j = 1, 2, \cdots, n$.

Proposition 1. Soient S et T deux substitutions quelconques, composées des mêmes éléments. Pour que ces substitutions soient des transformées réciproques, il faut et il suffit que tout couple de substitutions connexes S_1 et T_1, telles que $S \supset S_1$ et $T \supset T_1$ soient des transformées réciproques.

Proposition 2. La condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions connexes S et T de degré n, dont les éléments forment un ensemble fini E, soient des transformées réciproques est qu'il existe un nombre impair α, tel que $n = \varkappa \cdot \alpha$ ($\varkappa =$ entier $\geqq 1$) et une suite $a_1, a_2, \cdots, a_n$ formée de tous les éléments de E, ainsi qu'un nombre entier fixe i_0 compris au sens large entre 1 et α, tels que dans les cycles de T figurent les successions d'éléments

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1 \; a_{\alpha+1} \cdots \; a_{q\alpha+1} \cdots \; a_{(\varkappa-1)\alpha+1} \\ a_2 \; a_{\alpha+2} \cdots \; a_{q\alpha+2} \cdots \; a_{(\varkappa-1)\alpha+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_\alpha \; a_{2\alpha} \cdots \; a_{(q+1)\alpha} \cdots \; a_{\varkappa\alpha} \end{cases}$$

et

$$(2) \qquad a_{(\varkappa-1)\alpha+1+l\cdot 2^\varkappa} \; a_{i_0+l} \quad (l = 0, 1, 2, \cdots, \alpha-1)$$

---

[1] Les substitutions successives de la composition étant effectuées de droite à gauche.

et que dans les cycles de S figurent les successions d'éléments

$$
(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l}
a_1 \, a_{2\alpha} \quad \cdots \quad a_{(q+1)\alpha-2(2^{q-1}-1)} \cdots\cdots \quad a_{\varkappa\alpha-2(2^{\varkappa-2}-1)} \\
a_2 \, a_{\alpha+1} \quad \cdots \quad a_{(q+1)\alpha-2(2^{q-1}-1)+1} \quad \cdots \quad a_{\varkappa\alpha-2(2^{\varkappa-2}-1)+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_\alpha \, a_{2\alpha-1} \cdots a_{(q+1)\alpha-2(2^{q-1}-1)+\alpha-1} \cdots\cdots a_{\varkappa\alpha-2(2^{\varkappa-2}-1)+\alpha-1}
\end{array} \right.
$$

et

$$
(4) \qquad a_{(\varkappa-1)\alpha+1+l\cdot 2^{\varkappa}+2^{\varkappa-1}} \; a_{i_0+l} \qquad (l=0, 1, 2, \cdots, \alpha-1),
$$

les indices devant être réduits mod. α, de façon à être compris au sens large entre $q\alpha+1$ et $(q+1)\alpha$ pour chaque élément de la $(q+1)^{\text{me}}$ colonne du système (3), $(q=1, 2, \cdots, \varkappa-1)$, le premier élément de (2) et de (4) devant appartenir à la dernière colonne de (1) ((3)), et le second élément de (2) et de (4) devant appartenir à la première colonne de (1) ((3)), quel que soit $l=0, 1, \cdots, \alpha-1$.

Corollaires,

1. Si S et T sont des transformées réciproques connexes, la substitution $\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix}$ est régulière d'ordre α impair. La condition que $\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix}$ soit régulière d'ordre impair est nécessaire mais pas suffisante pour que les substitutions connexes S et T soient des transformées réciproques.

2. S et T étant deux transformées réciproques connexes, la condition nécessaire et suffisante pour que la substitution $\begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix}$ soit circulaire est que chacune des substitutions S et T contienne un cycle et un seul de premier ordre.

3. Si les transformées réciproques connexes S et T sont régulières, elles sont composées chacune d'un nombre impair de cycles.

ÜBER LINEARE INHOMOGENE SUBSTITUTIONSGRUPPEN

Von J. J. Burckhardt, Zürich.

Untersuchungen zur Theorie der Bewegungsgruppen (auch Raumgruppen oder kristallographische Gruppen genannt) haben mich auf die folgenden Fragen der Gruppentheorie geführt:

a) Man soll alle inäquivalente Gruppen $\mathfrak{G}$ ganzzahliger homogener Substitutionen in n Variablen angeben, wobei die Transformation von $\mathfrak{G}$ mit unimodularer ganzzahliger Matrix zu einer äquivalenten und somit als nicht verschieden anzusehenden Gruppe führt. In der Ebene gibt es 13 solcher Gruppen oder Klassen, im Raume 73.

b) Es sind die sämtlichen inhomogenen Gruppen oder Bewegungsgruppen G der folgenden Art gesucht: Ihr rotativer Bestandteil soll eine der Gruppen $\mathfrak{G}$ sein, die translativen Bestandteile sollen ganze Zahlen sein, die man nur modulo der Ordnung von $\mathfrak{G}$ zu betrachten hat. Über die Anzahl der zu einer Klasse $\mathfrak{G}$ gehörigen Gruppen G habe ich die folgenden Sätze gefunden:

1) Enthält die zyklische Klasse der Ordnung p die identische Darstellung nicht, so gibt es genau eine zugehörige Bewegungsgruppe.

2) Enthält sie die identische Darstellung genau einmal in der Haupt diagonalen, so gibt es p zugehörige und wesentlich verschiedene Bewegungsgruppen.

3) Enthält sie die identische Darstellung mehr als einmal in der Hauptdiagonalen und ist p eine Primzahl, so gibt es zwei zugehörige Bewegungsgruppen.

4) Enthält die Klasse wohl die identische Darstellung, aber nicht in der Hauptdiagonalen, so gibt die Untersuchung der auftretenden Linearformen Aufschluß über die Anzahl der inhomogenen Gruppen. Für eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G}$ nehmen wir das Problem als gelöst an für einen größten Normalteiler $\mathfrak{H}$ und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Hieraus findet man die Lösung für $\mathfrak{G}$ mittels einer Vertauschungsrelation. Mit diesen Sätzen gelingt es, die Bewegungsgruppen aufzustellen und zu klassifizieren.

ÜBER DIE MÖGLICHKEIT FÜR π EINE GESETZMÄSSIGKEIT IN DEN DEZIMALEN ZU ENTDECKEN

Von Viggo Brun, Trondheim.

Eine Diskussion zwischen Montessus de Ballore, Paul Levy und Verfasser wurde erwähnt. („Sphinx" 1933, B. 3, Seite 51, 95 und 175).

Folgende Formeln wurden angegeben:

$$\frac{\sqrt{65}}{52\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{10n}{2n}\cdot\binom{26n}{13n}\cdot n}{10^{10n}}. \tag{1}$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{T(n,n,2n)\cdot n}{2^{6n}}. \tag{2}$$

(3) $$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \cdot \sqrt{n}\,.$$

Hier ist

$$T(a, b, c) = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$$

ein Trinomialkoeffizient.

Die Formeln lassen sich durch die Stirlingsche verifizieren. Man sieht, daß es von Bedeutung wäre, die Binomialkoeffizienten im dyadischen System bestimmen zu können. Als ein erster Schritt in dieser Richtung wird folgende Formel angegeben

(4) $$\binom{2r}{t} = 2^t \cdot T(r-t, t, 0) + 2^{t-2}\, T(r-(t-1), t-2, 1) + \cdots$$

Hieraus kann gefolgert werden, daß

(5) $$\binom{2^{n+1}}{2^n} - \binom{2^n}{2^{n-1}} = 2^{2n} \cdot E,$$

wo E eine ganze Zahl bedeutet.

Die $2n$ letzten Ziffern in diesen zwei Binomialkoeffizienten sind also — im dyadischen System — dieselben.

Beispiel

$$\binom{8}{4} = \overline{1\underline{00011}}\underline{0}$$

$$\binom{16}{8} = 1100100\underline{1\underline{000110}}$$

$$\binom{32}{16} = \overline{10001}11101001111000001001\underline{1000110}$$

In dieser Reihe von Zahlen wird also eine immer größere Serie von Ziffern einander gleich sein, wenn man von rechts nach links liest. Dasselbe gilt übrigens, wenn man von links nach rechts liest, für die Teilserie $\binom{8}{4}, \binom{32}{16}, \binom{128}{64} \cdots$, da diese Zahlen nach Anbringen des Kommas, Annäherungswerte für $\pi^{-\frac{1}{2}}$ sind. (Siehe übrigens „Norsk matematisk tidsskrift", B. 18, Oslo 1936, wo der Vortrag erschienen ist.)

ÜBER DIE APPROXIMATION VON KOMPLEXEN ZAHLEN

Von Nikolaus Hofreiter, Wien.

Es sei $k(i\sqrt{m})$ ein beliebiger imaginär quadratischer Körper und α eine beliebige komplexe Zahl, die nicht in $k(i\sqrt{m})$ liegt. Mit Hilfe des Minkowskischen Grundsatzes läßt sich zeigen: Es gibt Konstante γ, so daß $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\gamma}{|q|^2}$ unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen p, q aus $k(i\sqrt{m})$ hat und es gibt komplexe Zahlen β, so daß $\left|\beta - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\gamma - \varepsilon}{|q|^2}$ $(\varepsilon > 0)$ höchstens endlich viele Lösungen hat. Es ist die Aufgabe, die genauen Grenzen γ zu finden oder ihnen doch wenigstens nahe zu kommen. Mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung komplexer Zahlen fand man bisher schlechte Schranken. Bessere Schranken findet man durch geeignete Spezialisierung des Minkowskischen Linearformensatzes. Die genaue Schranke für $k(i)$ fand zuerst Ford und zwar $\frac{1}{\sqrt{3}}$, später Perron. Perron fand auch die genauen Grenzen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt[4]{13}}$ für $k(i\sqrt{2})$ bzw. $k(i\sqrt{3})$. Durch eine Übertragung von Ideen Furtwänglers ins Komplexe konnte ich nach Überwindung einiger Schwierigkeiten beweisen: Es sei $k(i\sqrt{m})$ ein imaginär quadratischer Körper mit der Klassenzahl 1 und $|d|$ die absolut kleinste Relativdiskriminante für die Relativkörper n-ten Grades über $k(i\sqrt{m})$. Es gibt $n-1$ unabhängige Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{n-1}$ so daß

$$\left|\alpha_i - \frac{x_i}{z}\right| < \frac{1}{|d|^{\frac{1}{2(n-1)}} |z|^{\frac{n}{n-1}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

höchstens endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z$ aus $k(i\sqrt{m})$ haben. Für $n = 2$ (Approximation einer komplexen Zahl) ergeben sich für $m = 1, 2, 3, 7, 11$ die Schranken $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{13}}, \frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$.

(Hofreiter, Monatshefte *42*, (1935), 401—416).

ÜBER DEN ABSOLUTEN BETRAG VON MATRIZEN

Von T. Rella, Wien.

Die folgenden Untersuchungen bezwecken, den Begriff des absoluten Betrages von Vektoren auf beliebige (quadratische oder rechteckige) Matrizen zu erweitern u. z. durch Angabe von Postulaten, denen der absolute Betrag genügen soll. Diese Postulate sind so gewählt, daß die ersten vier genügen, um verschiedene Funktionen anzugeben, die für Abschätzungen geeignet sind entsprechend dem Rechnen mit absoluten Beträgen von Zahlen oder Vektoren. Von diesen vier Postulaten wird die Unabhängigkeit durch Angabe von Beispielen nachgewiesen. Ein von diesen vier unabhängiges hinzukommendes fünftes Postulat definiert dann den absoluten Betrag eindeutig.

Die Elemente der Matrizen sollen zuerst reelle Zahlen sein. Matrizen werden durch Kurrentbuchstaben, die transponierte Matrix durch einen Strich, Zeilen- und Spaltenvektoren durch kleine gestrichene resp. ungestrichene Kurrentbuchstaben bezeichnet. Mit $\mathfrak{E}^{(i,k)}$ wird eine Matrix bezeichnet, deren Element in der i^{ten} Zeile und k^{ten} Spalte 1 ist, während alle übrigen Elemente verschwinden. $\mathfrak{e}_i$ ist der i^{te} Grundvektor. Bezeichnen wir die festzulegende Funktion mit φ, so lauten die Postulate:

P 1 $$\varphi(c\mathfrak{A}) = |c|\,\varphi(\mathfrak{A})$$

P 2 $$\varphi(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \leqq \varphi(\mathfrak{A}) + \varphi(\mathfrak{B})$$

P 3 $$\varphi(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \leqq \varphi(\mathfrak{A})\,\varphi(\mathfrak{B})$$

P 4 $$\varphi(\mathfrak{E}^{(i,k)}) = 1$$

P 5 $$\varphi^2(\mathfrak{A}) = \varphi(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}).$$

Aus den ersten vier Postulaten allein folgt:

F 1 $$\mathfrak{e}_i'\mathfrak{A}\,\mathfrak{e}_k = a_{ik}$$

$$1\cdot\varphi(\mathfrak{A})\cdot 1 \geqq |a_{ik}|$$

F 2 $$\mathfrak{A} = \sum_{i,k} a_{ik}\,\mathfrak{E}^{(i,k)}$$

$$\varphi(\mathfrak{A}) \leqq \sum_{i,k} |a_{ik}|$$

und daher zusammengefaßt

$$\operatorname{Max}\,|a_{ik}| \leqq \varphi(\mathfrak{A}) \leqq \sum_{i,k} |a_{ik}|.$$

Leichte Rechnungen zeigen, daß die ersten vier Postulate aber nicht das fünfte durch folgende 3 Funktionen erfüllt sind:

1 $$\varphi(\mathfrak{A}) = \sum_{i,k} |a_{i,k}|$$

2 $$\varphi(\mathfrak{A}) = \sqrt{\sum a_{ik}^2}$$

3 $$\varphi(\mathfrak{A}) = \sum_{\mu} |\mathfrak{a}_\mu|$$

wobei $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m$ die Spaltenvektoren von $\mathfrak{A}$ bedeuten.

Die Unabhängigkeit der ersten vier Postulate wird durch folgende vier Beispiele erwiesen, bei denen jeweils das Postulat 1 resp. 2, 3 und 4 nicht erfüllt ist, während die 3 übrigen Postulate erfüllt sind.

4 $$\varphi(\mathfrak{A}) = 1$$

5 $$\varphi(\mathfrak{A}) = R(\mathfrak{A}) \sum |a_{ik}|$$

wobei $R(\mathfrak{A})$ den Rang von $\mathfrak{A}$ bedeutet. (Dieses Beispiel verdanke ich Herrn Dr. L. Holzer.)

6 $$\varphi(\mathfrak{A}) = \text{Max } |a_{ik}|$$

7 $$\varphi(\mathfrak{A}) = 0.$$

Bei Hinzunahme des Postulates 5 ergeben sich folgende Folgerungen:

F 3 $$\varphi^2(\mathfrak{A}) = \varphi(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}) \leqq \varphi(\mathfrak{A}')\,\varphi(\mathfrak{A});$$

da $\quad \varphi(\mathfrak{A}) \neq 0, \quad$ wenn $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{O} \qquad \varphi(\mathfrak{A}) \leqq \varphi(\mathfrak{A}') \qquad$ ($\mathfrak{O}$ Nullmatrix)

und durch Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \varphi(\mathfrak{A}').$$

F 4 $$\varphi^2(\mathfrak{S}\mathfrak{A}) = \varphi(\mathfrak{A}'\mathfrak{S}'\mathfrak{S}\mathfrak{A}) = \varphi(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}) = \varphi^2(\mathfrak{A})$$
$$\varphi(\mathfrak{S}\mathfrak{A}) = \varphi(\mathfrak{A})$$

wenn $\mathfrak{S}$ orthogonal.

F 5 $$\varphi(\mathfrak{A}\mathfrak{T}) = \varphi(\mathfrak{T}'\mathfrak{A}') = \varphi(\mathfrak{A}') = \varphi(\mathfrak{A})$$

wenn $\mathfrak{T}$ orthogonal.

Da $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$ eine reelle, symmetrische, positiv definitive oder semidefinite Matrix ist, so kann $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$ durch Transformation mittels einer orthogonalen Matrix in die Normalform $\mathfrak{N}$ transformiert werden, wobei

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_u^2 \end{pmatrix}$$

und $\lambda_1^2 \geqq \lambda_2^2 \geqq \cdots \geqq \lambda_u^2 \geqq 0$ die charakteristischen Wurzeln von $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$ sind.

Aus P5 und F 1 bis F5 folgt

$$\lambda_1^2 \leqq \varphi^2(\mathfrak{A}) = \varphi(\mathfrak{N}) \leqq \sum \lambda_\nu^2 \leqq n\,\lambda_1^2$$

und durch Wiederholung

$$\lambda_1^{2 \cdot 2^k} \leqq \varphi(\mathfrak{N}^{2^k}) = \varphi^{2^k}(\mathfrak{N}) \leqq n \cdot \lambda_1^{2 \cdot 2^k}$$

daher durch Bildung des $\lim\limits_{k \to \infty}$

$$\varphi(\mathfrak{N}) = \lambda_1^2$$

$$\varphi(\mathfrak{A}) = |\lambda_1| = \operatorname*{Max}_{|\mathfrak{c}|=1} |\mathfrak{A}\mathfrak{c}|$$

und daher für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$ $|\mathfrak{A}\mathfrak{v}| \leqq \varphi(\mathfrak{A})\,|\mathfrak{v}|$.

Eine leichte Rechnung zeigt, daß für diese Funktion wirklich alle Postulate P1 bis P5 erfüllt sind.

Wenn für $\mathfrak{A}$ komplexe Elemente zugelassen werden, so tritt im Postulat P5 an Stelle der transponierten Matrix die Hermite'sche konjugierte und an Stelle der orthogonalen Matrizen die unitären. Als absoluter Betrag eines komplexen Vektors ist die positive Quadratwurzel aus dem Skalarprodukt des Vektors mit dem konjugiert-komplexen Vektor zu definieren.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Matrizen, deren Elemente reelle Funktionen der reellen Variabeln t sind, so folgt aus

$$\mathfrak{A}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{B}(\tau)\, d\tau$$

nach der Definition des bestimmten Integrals sofort

$$\varphi(\mathfrak{A}) \leqq \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(\mathfrak{B}(\tau))\, d\tau \right|.$$

Es lassen sich damit Konvergenzuntersuchungen, wie sie z. B. in der Methode der sukzessiven Approximationen auftreten, sehr einfach gestalten.

SOME PROBLEMS OF TOPOLOGICAL ALGEBRA

By O. Taussky, Cambridge, England.

The structure of a hypercomplex system with respect to the field of real numbers is usually described by its algebraic properties. However, it gives a quite different approach if one uses the fact that a hypercomplex system with respect to the field of real numbers is a topological ring with respect to the topology of the Euclidean vector space. Two problems which arise from this point of view are discussed.

1. The relationships between the topological properties of the group formed by the regular elements and the algebraic structure of the ring.

An example of this relationship is given by the fact that the theorem of Frobenius, which states that the real numbers, complex numbers, and quaternions are the only hypercomplex systems with respect to the field of real numbers which are fields, can easily be deduced from E. Cartan's theorem, which states that the n-dimensional Euclidean sphere is a group space only for $n=0, 1, 3$.

2. The structure of the set Λ consisting of all elements λ such that $\lim \lambda^n = 0$.

This set is of importance for applying analytical methods in hypercomplex systems, as it is a generalisation of the set of inner points of the unit sphere in complex function theory.

NON-SINGULAR MULTILINEAR FORMS AND NON-SINGULAR p-IC FORMS

By Rufus Oldenburger, Chicago.

Every multilinear form $F=a_{ij\ldots k}x_iy_j\cdots z_k$, $i, j, \cdots k=1, \cdots; n$ is equivalent in a field Φ under transformations

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_i &= b_{ip}x'_p\,, \\ y_j &= c_{jq}y'_q\,, \\ &\vdots \\ z_k &= d_{kr}z'_r\,, \end{aligned}$$

$i, j, \cdots, k=1, \cdots, n$; $p, q, \cdots, r=1, \cdots, m$,
not necessarily non-singular, to a form

$$R=x'_iy'_i\cdots z'_i,\ i=1, \cdots,\ h$$

for some values of h. If the transformations of (1) are non-singular the form F is said to be *non-singular*. The form F is non-singular if and only if the matrix $(a_{ij\cdots k})$ is of rank n on each index, and the forms

$$(2)\qquad F_1=a_{1j\ldots k}y_j\cdots z_k, \cdots,\ F_n=a_{nj\ldots k}y_j\cdots z_k$$

are simultaneously equivalent in Φ to a set of forms of the type

$$(3)\qquad R_1=a_{1i}y_i\cdots z_i, \cdots,\ R_n=a_{ni}y_i\cdots z_i,\ i=1, \cdots,\ n.$$

The equivalence of (2) to (3) is completely solved with the aid of arithmetic invariants studied by Hitchcock[1] and the author.[2]

An analogous theory is obtained if one defines the p-ic form $E=a_{ij\ldots k}x_i x_j\cdots x_k$, $i, j, \cdots, k=1, \cdots, n$ with n indices to be ***non-singular*** if E is equivalent in a field Φ to

$$G=\lambda_1 y_1^p+\cdots+\lambda_n y_n^p$$

under a non-singular transformation $x_i=b_{ij}y_j$. Bronowski[3] considered the problem of equivalence of E to G and translated the problem into one in geometry which has not been solved. The problem is solved here with the use of higher determinants in 3-space and an extension of invariant factor theory.

In the binary case the theory of equivalence of E to G gives a simple set of necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of an algebraic equation of the n-th degree, where the solutions are of the form

$$\frac{a+bk_1}{c+dk_1}, \cdots, \frac{a+bk_n}{c+dk_n}, \tag{4}$$

where

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

and $k_1, \cdots, k_n$ are n-th roots of a quantity in a given field Φ, and further a, b, c, d are in Φ. A simple method is developed for finding these solutions. Brahana[4] treated the problem of the existence of solutions of the form (4) for quartics, where the field is a finite Galois field $GF(p)$, p being a prime.

The generalization of the theory of equivalence of bilinear and quadratic forms to $x_1 y_1+\cdots+x_p y_p$ and $\lambda_1 x_1^2+\cdots+\lambda_p x_p^2$ respectively is in a sense here brought to completeness. The use of higher dimensional matrices in treating equivalence of p-ics is a new one.

---

[1] F. L. Hitchcock, Multiple invariants and generalized rank of a p-way matrix or tensor, Journal of Mathematics and Physics, vol. 7 (1927), 40—79.

[2] R. Oldenburger, Composition and rank of n-way matrices and multilinear forms, Annals of Mathematics, vol. 35 (1934), 622—657.

[3] Bronowski. The sum of powers of a canonical expression, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 29 (1933), 69—82.

[4] Brahana. Note on irreducible quartic congruences, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 38 (1935), 395—400.

SUR LE THÉORÈME DE GRACE

Par S. Mandelbrojt, Clermont-Ferrand.

Soit $F[f(z)]$ une fonctionelle linéaire dont le champ de définition est constitué par les polynômes. Supposons que $F[1] \neq 0$. Si pour un polynôme de degré n, $P_n(z)$, $F[P_n(z)] = 0$, ce polynôme a, au moins, un zéro dans toute région circulaire contenant toutes les racines de $F_n(x) = F[(z-x)^n] = 0$.

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant:

Le polynôme $Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x-a_i)^n$ a, au moins, un zéro dans toute région circulaire contenant tous les a_i.

Pour le démontrer il suffit de remarque qu'en posant $x = \dfrac{a_i t}{t-a_i}$, $Q_n(x) = \varphi(t)$, on a $\dfrac{d[\varphi(t)(t-a_i)^n]}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} b'_i(t-a'_i)^{n-1}$; et le théorème est vrai pour n, s'il est vrai pour $n-1$, en vertu du théorème de Lucas—Gauss. Or il est vrai pour $n=1$.

Pour passer du lemme au théorème on remarquera qu'on peut, lorsque les hypothèses du théorème sont réalisées, écrire:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x-a_i)^n,$$

où les a_i sont des zéros de $F_n(x)$.

Le lemme est une certaine forme du théorème connu de Grace. Le théorème et le lemme sont, d'ailleurs, équivalents.

NOTE ON SOME ADDITIVE PROPERTIES OF INTEGERS

By Paul Erdős, Manchester.

1. It is well known that for suitable n's both the equations $n=x^2-y^2$ and $n=x^2+y^2$ have more than $n^{\frac{c_1}{\log\log n}}$ solutions. I show that for suitable n's the number of solutions of the equations $n=p^2-q^2$ resp. $n=p^2+q^2$ (p, q primes) is greater than $n^{\frac{c_2}{\log\log n}}$.

I sketch the proof for $n=p^2-q^2$.

Let $A=2\cdot 3\cdots p_r$, the product of consecutive primes, be sufficiently large. By elementary method we prove that the number of solutions of the congruence $p^2-q^2\equiv 0 \pmod{A}$ with $0<q<p<A$ is greater than $A^{1+\frac{1}{4\log\log A}}$. But the integers of the form p^2-q^2 with $0<q<p<A$ lie all between 0 and A^2, hence there exists a multiple of A say $n(<A^2)$ such that the number of solutions of the equation $n=p^2-q^2$ is greater than $A^{\frac{1}{4\log\log A}}>n^{\frac{1}{8\log\log n}}$.

The proof for $n=p^2+q^2$ is much more complicated but also elementary. It requires Brun's method.

2. Schnirelmann proved that there exists a constant c_8 such that every integer is the sum of c_8 or less primes. Some time ago Heilbronn-Landau-Scherk proved that $c_8\leqq 71$. By Brun's method I proved that there exists a constant c_4 such that any integer is the sum of c_4 or less positive and negative squares of primes. The same result holds for any powers of primes. It can be proved also that the density of integers of the form $p^2+q^2-r^2-s^2$ is positive.

3. Now I sketch some new results of N. P. Romanoff (Tomsk).

Let us denote by $f(x_1, x_2, \cdots, x_{k_1}; y_1, y_2, \cdots y_{k_2}|n)$ the number of integers not exceeding n belonging to the sequence x_i, y_j and x_i+y_j. It is an old and most important problem of the additive theory of numbers to determine the value of f for given x_i and y_j. But this can be solved only for special sequences. Romanoff deduced 4 formulas for the mean value of f for general sequences of integers.

First mean-value-theorem:

$$\sum_{1\leqq x_1<x_2<\cdots<x_{k_1}\leqq n} f(x_1, x_2, \cdots, x_{k_1}; y_1, y_2, \cdots, y_{k_2}|n)$$

$$= n\, C^n_{k_1} - \sum_{z=1}^{n-k_2} C_k^{n-1-\bar{y}_z+z}$$

where $C^n_k=\binom{n}{k}$ and $\bar{y}_z$ denotes the complementary sequence of y_z.

Second mean-value-theorem:

$$\sum_{x_1=1}^{n}\sum_{x_2=1}^{n}\cdots\sum_{x_{k_1}=1}^{n} f(x_1, x_2, \cdots, x_{k_1}; y_1, y_2, \cdots, y_{k_2}|n)$$

$$= n^{k+1} - \sum_{z=1}^{n-k_2} (n-1-\bar{y}_z+z)^{k_1}.$$

Third mean-value-theorem:

$$\sum_{1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{k_1} \leqq n} \quad \sum_{1 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{k_2} \leqq n} f(x_1, x_2, \cdots x_{k_1}; y_1, y_2, \cdots y_{k_h} | n)$$

$$= n\, C^n_{k_1} C^n_{k_2} - C^n_{k_1+1} C^n_{k_2+1} + C^n_{k_1+1} C^{n-k_1+1}_{k_2}$$

Fourth mean-value-theorem:

$$\sum_{1 \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqq n} f(x_1, x_2, \cdots, x_{k_1}; x_1, x_2, \cdots x_k | n)$$

$$= n\, C^n_k - 2\, C^n_{k+2} - C^n_{k+1} + 2^{k+3} C^{\left[\frac{n}{2}\right]}_{k+2} + 2^{k+1}(1 + 2\,\varepsilon_n)\, C^{\left[\frac{n}{2}\right]}_{k+1}$$

with $\varepsilon_n = 0$ if n even, and $\varepsilon_n = 1$ if n odd.

The proof depends on elementary combinatoric methods.

MODULES RÉCIPROQUES

Par Marcel Riesz, Lund.

Soit M un module constitué de certains points (vecteurs) x de l'espace à n dimensions. L'ensemble des points (vecteurs) v tels que le produit scalaire (x, v) soit entier pour chaque x, forme un *module fermé*, c.-à-d. un module qui contient tous ses points limites. En désignant ce module par M^{-1}, on a la relation fondamentale

$$(1) \qquad (M^{-1})^{-1} = [M],$$

où $[M]$ désigne la fermeture de M. Dans le cas où M est fermé lui-même, cette relation se réduit à une vraie relation de réciprocité, savoir à $(M^{-1})^{-1} = M$. En retournant au cas général et en désignant par N un second module, formons au sens de l'addition vectorielle le module $M+N$. On a alors

$$(2) \qquad (M+N)^{-1} = M^{-1} N^{-1},$$

le second membre signifiant d'après une notation usuelle l'ensemble des points communs à M^{-1} et à N^{-1}.

Les théorèmes de Kronecker sur les approximations diophantiques sont des conséquences évidentes des relations (1) *et* (2).

Soit maintenant M un module discret (c.-à-d. un grillage de points) du rang n. Il en sera alors de même du module réciproque M^{-1}. Par

$|b|$ nous entendons la longueur d'un vecteur b quelconque, mesurée dans le sens de Minkowski par un certain corps convexe C, et par $|u|^*$ la longueur d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ quelconque, mesurée par le corps dual (réciproque) C^*. On a alors le théorème suivant.

Il existe une base $b_1, b_2, \cdots b_n$ de M et une base $u_1, u_2, \cdots u_n$ de M^{-1} telles que

$$1 \leqq |b_k|\,|u_k|^* \leqq \alpha_n, \quad k = 1, 2, \cdots n,$$

le nombre α_n ne dépendant que de n, c.-à-d. que ce nombre est indépendant du module M et du corps C. On peut aussi admettre que les bases soient réciproques, c.-à-d. que $(b_k, u_l) = \delta_{kl}$, δ_{kl} étant le symbole de Kronecker.

ORDER AND THE INCLUSION RELATION

By Garrett Birkhoff, Cambridge, Mass.

The higher theory of order developed recently has interesting applications not only to algebra and projective geometry, but also to arithmetic and set theory.

Let X and Y be any two partially ordered systems. Define $X + Y$ as the system of all symbols $x \varepsilon X$ or $y \varepsilon Y$, letting $x \geqq x'$ resp. $y \geqq y'$ in $X + Y$ preserve their meaning in X resp. Y, and denying $x \geqq y$ and $y \geqq x$ in all cases. Define XY as the system of all couples (x, y), where $(x, y) \geqq (x', y')$ if and only if $x \geqq x'$ in X and $y \geqq y'$ in Y. Define X^Y to be the set of all functions $f(y)$ from Y to X which are *monotonic* — i. e., such that $y \geqq y'$ implies $f(y) \geqq f(y')$. These definitions include the corresponding definitions for cardinal numbers as a special case, and the usual arithmetic laws are valid.

Further, if B denotes the Boolean algebra of two elements, then (1) the correspondence $X \rightleftarrows B^X$ is one-one between finite partially ordered systems and finite distributive lattices, (2) if X is any lattice, then X^B is the lattice of its quotient-symbols (quotient-structure of Ore), (3) B^{2^n} is the free Boolean algebra and B^{B^n} the free distributive lattice generated by n symbols.

As to set theory, one may note that Borel sets modulo sets of measure zero are a complete lattice; so are they modulo sets of the first category; so also are closed sets. But these lattices are not isomorphic (joint result with S. Ulam). Numerous other applications might be given.

SECTION II

Analyse

SUR «L'INTÉGRATION LOGIQUE» DES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

Par M. JULES DRACH (Paris).

I. Quelques mots d'abord sur *l'Intégration logique*, pour laquelle je renvoie aux Comptes Rendus des Congrès de Cambridge (1912), Strasbourg (1920), Toronto (1924), Bologne (1928) et Zürich (1932).

Le domaine des *éléments* de l'Intégration logique est formé par toutes les fonctions z_i de variables complexes x_j, définies par des relations *rationnelles* (Σ) en nombre fini, entre ces fonctions, les variables, et *leurs derivées de tous ordres*. Quand le système (Σ) est *irréductible*, c'est-à-dire que toute relation de même nature compatible avec (Σ) en est une conséquence *nécessaire* (le nombre de variables dont doivent dépendre les z_i étant fixé), les fonctions z_i sont *bien définies*: le calcul sur ces éléments (quatre opérations de l'arithmétique et dérivation) est univoque. Sinon, il y a lieu de preciser le choix des z_i et d'ajouter à (Σ) des inégalités pour écarter toute *alternative*: on peut donc toujours caractériser les fonctions *bien définies*.

L'Intégration logique envisage des systèmes (Σ), dont la forme en $z_i, \dfrac{\partial z_i}{\partial x_k}, \ldots$, est particulière; les coefficients, en nombre fini, sont alors choisis dans un *domaine de rationalité* (Δ) constitué par des fonctions *bien définies*. Les résultats les plus précis sont relatifs aux équations différentielles ordinaires, ou mieux aux équations linéaires aux dérivées partielles:

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0\,, \tag{1}$$

où les A_i, d'abord rationnels en $x, x_1, \cdots, x_n$, sont ensuite des éléments d'un domaine de rationalité (Δ) *quelconque*. Les fonctions $z_1, \cdots, z_n$ qui constituent le système *fondamental le plus simple* de (1), lorsque cette équation est *spéciale*, sont définies par des relations (Σ)

$$\Omega_j\left(z_i, \cdots, \frac{\partial z_i}{\partial x_k}, \cdots, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k \partial x_l}, \cdots\right) = \alpha_j(x, x_1, \cdots, x_n) \quad (j = 1 \cdots p)$$

où les Ω_i sont *tous* les invariants, *rationnellement distincts*, d'un certain *groupe-type* de transformations (Γ) des z_i, étendu en y regardant les z_i comme fonction des $x_1, \cdots, x_n$ non transformés et les α_i des éléments de (Δ): c'est le *groupe de rationalité de* (1) *dans* (Δ); je dis que les z_i sont *attachés* a (Γ) dans (Δ), qui est le domaine *minimum* comprenant les coefficients A_i.

Ces éléments sont définis *aux transformatious près* de (Γ); la *structure* de (Γ) donne leurs propriétés profondes. L'intégration de (1) revient à la détermination de (Γ), c'est-à-dire de (Σ), qui est *irréductible* et *primitif*: aucune réduction de (Γ) à un groupe-type plus petit ne peut être obtenue par une transformation des z_i seuls. On reconnait ici l'extension de la théorie algébrique de Galois et l'intervention des groupes-types de S. Lie *à équations de définition rationnelles*.

Une partie de ces résultats subsiste lorsque les A_i sont des fonctions d'un ordre plus général (holomorphes, méromorphes ou uniformes) dès que l'on a pour les éléments une représentation *univoque*, soit partout, soit dans un *voisinage* de points singuliers.

II. Mes recherches récentes (1933—1935) poursuivent, pour les équations de la Dynamique la construction *a priori*, dans les cas les plus simples, des types d'équations dont l'Intégration logique se fait avec des moyens fixés d'avance — par exemple des quadratures de différentielles totales (irréductibles bien entendu).

a) J'ai déterminé (C. R. Acad. Paris, *196*, 1933, p. 310) les éléments linéaires, $ds^2=4\lambda dudv$, pour lesquels l'équation des géodésiques possède une intégrale première de la forme: $\varphi=\sigma(v'-a_1)^{m_1}\cdots(v'-a_p)^{m_p}$ où les σ, a_i, λ dépendent de u, v, les m_i étant des constantes — et traité les cas *singuliers*. La méthode remplace une équation aux dérivées partielles d'ordre n à une fonction inconnue de u et v par un système d'équations de Laplace aux variables $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ (caractéristiques d'Ampère) intégrable par quadratures et un système d'équations aux différentielles totales en u, v, φ_i dont j'ai donné les combinaisons intégrables.

J'ai montré plus tard (C. R. Acad. Paris, *198*, 1934, p. 513) sous quelles conditions générales, où interviennent les systèmes *complètement conjugués* de G. Darboux pour l'espace euclidien à n dimensions, on peut conserver cette méthode.

b) Abordant le problème des *intégrales quadratiques* de la Dynamique — c'est-à-dire de l'involution $(H, K)=0$ où $H=A-U$ avec $A=\Sigma a_{ik}p_ip_k$ les a_{ik} et U étant fonction de $q_1 \ldots q_n$ [et de même $K=B-V$], j'ai en traitant *analytiquement* le problème lorsque A et B n'ont que des termes p_i^2 retrouvé *seulement* les résultats donnés sans démonstration par P. Stäckel. Mais, dans le cas général, j'ai montré que si l'on veut une solution où U dépende (comme dans le cas de Liouville) de n fonctions d'un argument qui ne figurent pas dans les a_{ik} et U, il existe un changement de variables qui ramène A et B à la forme orthogonale (C. R. Acad. Paris, *198*, 1934, p. 294).

c) Pour les problèmes de dynamique à deux variables, j'ai cherché les cas où en raison de l'existence d'une intégrale de forme simple, on peut les intégrer ***par quadratures*** quelle que soit la ***constante des aires*** pour les forces centrales, ou celle des *forces vives* pour les systèmes conservatifs.

J'ai donné, entre autres résultats, pour le cas des forces centrales des exemples où la détermination de la force exige l'intégration du système hyperelliptique le plus général (C. R. Acad. Paris, *199*, 1934, p. 749).

Pour les systèmes conservatifs, j'ai traité le cas des intégrales ***cubiques*** en p, q pour l'équation: $\frac{pq}{\lambda} - U = h$, montré la décomposition du problème général suivant le nombre des intégrales cubiques pour le problème géodésique, donné tous les types de problèmes ***plans*** où ***U dépend de constantes qui ne figurent pas dans*** λ (C. R. Acad. Paris, *200*, 1935, p. 22) résolu la même question pour la ***sphère***. Enfin (C. R. Acad. Paris, *200*, 1935, p. 599) j'ai repris la question de la transformation des équations de Lagrange ***avec conservation des trajectoires*** pour deux variables et donné les types que Paul Painlevé s'était proposé de déterminer.

SUR LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

Par R. TAMBS LYCHE, Trondheim.

La solution de l'équation différentielle

$$y' = f(x, y)$$

se réduisant à y_0 pour $x = x_0$ a une développement taylorienne autour du point $x = x_0$ dont les coefficients peuvent être calculés à l'aide de la méthode d'Euler, si la fonction $f(x, y)$ est regulière au point (x_0, y_0). On peut donner, pour ces coefficients, une formule explicite (Det Kongl. N. Vid.-Selsk. Skrifter, 1935, no. 35).

En appliquant cette formule au cas $f(x, y) = 1 + y^2$ et $x_0 = y_0 = 0$ on obtient une formule explicite pour les nombres de Bernoulli. Cette formule, bien qu'elle soit assez compliquée, a l'avantage de donner les nombres cherchés sous forme d'une somme de termes *positifs*.

INTÉGRALE DE RIEMANN-LIOUVILLE ET SOLUTION INVARIANTIVE DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION DES ONDES

Par MARCEL RIESZ, Lund.

On définit dans l'espace à m dimensions l'intégrale

$$I^\alpha u(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} u(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} d\,Q\,.$$

Ici $r = r_{PQ}$ désigne la distance hyperbolique $\sqrt{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2-\cdots}$ des points $P=(x_1, x_2, \cdots)$ et $Q=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$, D_S^P le domaine que la surface (à $m-1$ dimensions) S « orientée dans l'espace » découpe du cône lumière rétrograde au sommet P et

$$H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right).$$

L'intégrale converge pour $\alpha > m-2$ et satisfait aux relations $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$ et $\Delta I^{\alpha+2} = I^\alpha$, où $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 - \partial^2/\partial x_2^2 - \cdots$. La définition s'étend par prolongement analytique par rapport à α aux indices $\alpha \leqq m-2$ sous des conditions de régularité convenables. On a la formule de GREEN

$$I^\alpha u(P) = I^{\alpha+2} \Delta u(P) - \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \int_{S^P} \left(\frac{\partial u(Q)}{\partial n} r_{PQ}^{\alpha+2-m} - u(Q) \frac{\partial r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{\partial n} \right) d\,S\,.$$

Ici S^P désigne la portion de surface découpée de S par le cône et n la conormale extérieure. Par prolongement analytique la formule reste valide pour $\alpha = 0$. Le premier membre devient alors $u(P)$ et le second membre fournit la solution du problème de CAUCHY, qui se présente ainsi sous la même forme pour m impair et pair. Pour m impair, on retrouve la solution donnée par M. HADAMARD (aussi pour des coefficients non constants) à l'aide de la partie finie des intégrales. Pour m pair, l'évanouissement des facteurs devant les intégrales fait surgir le principe de HUYGENS.

Pour $m = 4$, on déduit de la formule générale pour l'équation homogène $\Delta u = 0$, à laquelle nous nous bornons ici, la solution suivante

$$u(P) = \frac{1}{\pi} \int_s \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} \right) \cdot u - \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)_\nu \right\} d\,s\,.$$

Ici s est le bord de S^P, l'élément ds est mesuré dans le sens *lorentzien*, $R=R_{PQ}=r^2_{PQ}$. En chaque point de s il n'intervient qu'une seule dérivée, elle est prise par rapport à R suivant la génératrice ν de la nappe intérieure d'une certaine surface, enveloppée par les cônes rétrogrades qui ont leurs sommets sur s. La congruence des ν admet sur chacune des ν deux foyers Q_1 et Q_2. Dans la formule ci-dessus on a posé $R_{PQ_1}=R_1$ et $R_{PQ_2}=R_2$.

METRIC METHODS IN CALCULUS OF VARIATIONS

By KARL MENGER, Wien.

The calculus of variations deals with a *space* S, a *function* φ defined in S and a class K of figures of S, in the one-dimensional problems with a *class of curves*. With each curve C of K there is associated by a processus of integration of φ along C a number, say $\lambda_\varphi(C)$. A main question is if a given subclass K_0 of K contains a curve C_0 which minimizes the functional λ_φ in K_0, i. e. such that $\lambda_\varphi(C_0)\leqq\lambda_\varphi(C)$ for all curves C of K_0.

So far, S was always supposed as a *part of a n-dimensional Cartesian space;* the function φ of a point of S and essentially of a direction [viz. depending on $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ and positively homogeneously on $\boldsymbol{x}'=(x'_1, \cdots, x'_n)$] as *everywhere continuous* and *in each point quasi-regular* (i. e. such that for each $\boldsymbol{x}$ the n-dimensional surface $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ over the n-dimensional $\boldsymbol{x}'$-space is convex); K as the class for all *rectifiable* curves, the number $\lambda_\varphi(C)$ associated with the curve C given by a system $\boldsymbol{x}(t)$ of n almost everywhere differentiable functions $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ $(t_0\leqq t\leqq t_1)$ being $\int\limits_{t_0}^{t_1}\varphi(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t))\,dt$. Metric methods enable us to deal with entities S, φ, K which are considerably more general.

1st. S may be *a general metric space* in the sense of FRÉCHET. We assume that there is defined a function $\varphi(p; q, r)$ of the points and the pairs of distinct points $q\neq r$ (1). We then define a new space S_φ consisting of the points of S in which two points $q\neq r$ have the distance $\delta_\varphi(q, r)=\varphi(q; q, r)\,\delta(q, r)$, where $\delta(q, r)$ is their distance in S, and $\delta_\varphi(q, q)=0$. The functional associated in the calculus of variations for a given inte-

(1) In a Cartesian space S and in the particular case that for each point p we always have $\varphi(p; q, r)=\varphi(p; q', r')$ if the direction from q to r is the same as from q' to r', we obtain the classic form of φ by setting $\varphi(p; q, r)=\frac{1}{d}\varphi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})$ where $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ are the coordinate n-tuples of p, q, r, respectively, and d is the distance of q and r.

grand φ with a curve C is the length $\lambda_\varphi(C)$ of C in S_φ, viz. the limit of the lengths in S_φ of sufficiently dense sub-polygons of C, the integral being the limit of Riemannian sums. The minimizing curves we look for are thus geodesics in S_φ.

2nd. φ is (setting aside some technical details) admitted to be *discontinuous and non quasi-regular in a subset of linear measure* 0 *of each rectifiable curve*, whereby φ is called quasi-regular in p if $\varphi(p; p, q)\delta(p, q)+\varphi(p; q, r)\delta(q, r)\geqq\varphi(p; p, r)\delta(p, r)$, a definition which in a Cartesian space S coincides with the above mentioned, according to a theorem of ALT. If then K is the class of all rectifiable curves, $\lambda_\varphi(C)$ exists and is finite for each C of K, and *each closed family K_0 of rectifiable curves contains at least one which minimizes λ_φ in K_0 provided that for each λ the length of all curves C with $\lambda_\varphi(C)\leqq\lambda$ is bounded.*

3rd. K may contain *all continuous curves whatever,* rectifiable or not, if we add an hypothesis on φ, e. g. in the case that S is a domain of a euclidean space and φ everywhere continuous and quasi-regular the hypothesis H_1 (satisfied, in particular, it φ is *seminormal* in the sense of TONELLI): $\chi(x)>0$ *for each point x of S*, where $\chi(x)$ is the minimum of $\varphi(x, x')+\varphi(x,-x')$ for all x'. For, under the hypothesis $H_1, \lambda_\varphi(C)$ exists for *each* curve C and $\lambda_\varphi(C)=\infty$ if C is non-rectifiable. If we furthermore assume either that the length of the curves C with $\lambda_\varphi(C)\leqq 0$ is bounded, or the (equivalent) hypothesis H_2 that each sequence of curves $C_1, C_2, \cdots$ for which $\lambda_\varphi(C_k)$ is bounded contains a sequence which converges towards a curve, — then *each closed family K_0 of curves contains a curve C_0 which minimizes λ_φ in K_0, and C_0 is rectifiable* unless K_0 merely contains non-rectifiable curves. If $\varphi\geqq 0$ then already H_2 and the hypothesis H_1' (weaker than H_1) that $\chi(x)>0$ *outside a closed set of linear measure* 0 guarantee[1] that each closed family K_0 contains a curve C_0 which minimizes λ_φ in K_0, but now *the minimizing curve may be non-rectifiable* as is shown by an example due to HAHN and illustrated by CARATHÉODORY even in the simple case that the integrand φ is the square root of a polynomial of degree 8.

See my notes in C. R. Paris t. 201, p. 705, t. 202, p. 1007 and 1648; for the com plete proofs: Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums, issue 8, Wien 1937. In the case of a Euclidean space and an everywhere continuous and quasi-regular φ an elegant proof of an existence theorem by considering the functional as the limit of Riemannian sums is given by BOULIGAND, Mém. Soc. Sc. Liège, t. 19.

(1) H'_1 and H_2 are satisfied, in particuliar, if for each two distinct points p and q of S the lower bound of the numbers $\lambda_\varphi(C)$ for all curves C joining p and q is >0.

FUNCTIONAL ANALYSIS IN THE LARGE

By MARSTON MORSE, Princeton, N. J.

We are concerned with the analysis of a function F which is lower semi-continuous on an abstract metric space M. A Vietoris k-cycle z is termed F-non-bounding if it lies on some domain $F < C$ on which it is not homologous to zero. To such cycles z we assign superior and inferior cycle limits $s(z)$ and $t(z)$. We term the pair (s, t) the rank $p(z)$ of z and order these ranks lexicographically. This leads us to abstract group theory considerations in which certain elements u of an abelian operator group possess ranks $p(u)$ satisfying four postulates.

I. If u has a rank and $\delta \neq 0$, $p(u) = p(\delta u)$.

II. If $u, u+v$, and v have ranks $p(u+v) \leqq \max p(u), p(v)$.

III. If u and v have unequal ranks $p(u+v)$ exists.

The fourth postulate is somewhat too complicated to be presented here.

Groups suitably associated with the numbers $s(z)$, $t(z)$ correspond to our earlier type numbers. We give three definitions of critical points, homotopic, homologic, and differential, the first two being purely topological. The existence of these topological critical points implies the existence of the differential critical points under very general conditions. All this is applied to the calculus of variations, the topological extremal being central.

SUR LES CHAMPS GÉODÉSIQUES DES INTÉGRALES MULTIPLES DU CALCUL DES VARIATIONS

Par TH. LEPAGE, Bruxelles.

Les champs géodésiques introduits par M. H. WEYL, dans l'étude des conditions d'extrémum d'une intégrale multiple dépendant de plusieurs fonctions inconnues, diffèrent des champs géodésiques de M. CARATHÉODORY. La raison de cette différence s'explique aisément en utilisant la théorie des formes différentielles symboliques. Pour fixer les idées nous considérerons une intégrale double

$$I = \int\int f\, dx\, dy$$

où f dépend des arguments

$$x, y, z_1, \cdots, z_n, p_i = \frac{\partial z_i}{\partial x}, \ q_i = \frac{\partial z_i}{\partial y}, \ i = 1, \cdots, n.$$

Nous poserons

$$\omega_i = d z_i - p_i d x - q_i d y, \ \ i = 1, \cdots, n.$$

1. Considérons, tout d'abord, les x, y, z_i, p_i, q_i, comme variables indépendantes et résolvons le problème suivant: rechercher toutes les formes quadratiques symboliques Ω donnant lieu aux congruences

$$\left.\begin{array}{r} \Omega \equiv f\, dx\, dy \\ d\Omega \equiv 0 \end{array}\right\} (\mathrm{mod}\ \omega_1, \cdots, \omega_n),$$

$d\Omega$ désignant la différentielle symbolique de la forme Ω. On trouve pour solution

$$\Omega = f\, dx\, dy + (f_{q_i} dx - f_{p_i} dy)\, \omega_i + A_{ij}\, \omega_i\, \omega_j,$$

les A_{ij} désignant $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires des x, y, z_i, p_i, q_i.

2. Considérons maintenant, dans l'espace x, y, z_i, les p_i, q_i comme des fonctions des x, y, z_i. Nous convenons de dire que le champ des fonctions p_i, q_i est géodésique relativement à une forme Ω quand on a identiquement

$$d[\Omega] = 0 \tag{I}$$

$[\Omega]$ désignant la forme déduite de Ω en y substituant les p_i, q_i par leurs valeurs et fonctions des x, y, z_i.

L'identité (I) conduit à

$$[\Omega] = dS_1\, dS_2 + dS_3\, dS_4 + \cdots + dS_{2\gamma-1}\, dS_{2\gamma}, \tag{II}$$

où les S désignent 2γ fonctions différentiables des x, y, z_i et 2γ désignant la classe de la forme intégrable $[\Omega]$. En explicitant des identités (I) et (II) on obtient, sous deux formes équivalentes, les systèmes différentiels des champs géodésiques relatifs à Ω.

3. Tout champ géodésique relatif à une forme Ω se comporte, dans le problème de variation de l'intégrale I, comme les champs géodesiques introduits par MM. Carathéodory et Weyl. D'ailleurs un champ géodésique au sens de M. Weyl est un champ relatif à la forme Ω pour laquelle tous les A_{ij} sont nuls, tout champ au sens de M. Carathéodory est au contraire un champ relatif à la forme Ω pour laquelle les A_{ij} correspondent à la plus petite valeur de γ. Dans un champ de Weyl γ est égal à 2, dans un champ de Carathéodory γ est égal à 1.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE CARACTÈRE INTÉGRAL DE L'ÉQUATION $P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Par T. Ważewski, Kraków, Pologne.

L'équation

$$P(x, y)\,dy - Q(x, y)\,dx = 0 \tag{1}$$

($P^2 + Q^2 > 0$) considérée dans un ensemble ouvert Ω (simplement connexe dans la suite) donne les caractéristiques de l'équation

$$P(x, y)\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Nous nous occuperons des conditions dans lesquelles une des propriétés suivantes a lieu.

Propriété A. Il existe une solution de classe C^i [1] de (2) valable dans Ω pour laquelle $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 > 0$ (dans ce cas l'équation (1) admet dans Ω un facteur intégrant non nul).

Propriété B. Toute solution (valable dans Ω tout entier) de classe C^1 de (2) est constante dans Ω (dans ce cas tout facteur intégrant de (1) valable dans Ω est identiquement nul).

Voici d'abord quelques définitions. Soient, dans Ω, deux segments fermés $[D, E]$ et $[F, G]$ dont aucun n'est tangent à aucune intégrale de (1) et tels que chaque caractéristique coupant $[D, E]$ en un point $L \neq D$ coupe $[F, G]$ en un point $M \neq F$. Supposons que la correspondance ainsi établie entre les points variables L et M puisse être étendue aux points D et F de façon à être de classe C^i. Nous dirons alors que D et F sont *reliables* R^i. Nous complétons cette définition en postulant la transitivité de la relation R^i.

La totalité T des points reliables R^0 avec un point de Ω se réduit à une seule caractéristique ou bien se compose de plusieurs (au plus une infinité dénombrable) de caractéristiques. Dans le dernier cas T sera appelée *caractéristique de branchement. T sera dite être de classe* C^i lorsque chaque couple de points de T reliable R^0 est reliable R^i. Voice nos théorèmes:

---

[1] Une fonction est dite être de classe C^i dans un ensemble lorsqu'elle y possède des dérivées partielles continues d'ordre i. Cette notion comprend les cas $i = 0$ (continuité) et $i = \infty$.

I. La condition nécessaire et suffisante pour la propriété A est que toute caractéristique de branchement soit de classe C^i (on suppose que P et Q sont de classe C^1). [1]

II. La condition nécessaire et suffisante pour la propriété B est que la famille de caractéristiques de branchement qui ne sont pas de classe C^1 soit partout dense dans Ω.

III. Il peut arriver qu'à la fois $P \equiv 1$, Q soit de classe C^∞, Ω soit identique avec le plan tout entier et la propriété B ait lieu. [2]

IV. La famille de *toutes* les caractéristiques de branchement (considérées comme éléments) est homéomorphe d'une dendrite Δ (sans points d'arrêt). La famille des caractéristiques de branchement est donc dénombrable.

V. Pour que deux équations de la forme (1) découlent l'une de l'autre par une transformation, il faut que les dendrites respectives Δ soient homéomorphes. Les conditions nécessaires et suffisantes sont bien compliquées.

Cette transformation est toujours possible lorsqu'il n'y a aucune caractéristique de branchement.

INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

By Garrett Birkhoff, Cambridge, Mass.

Consider any ordinary differential equation

$$dx_i / dt = X_i(x_1, \cdots x_n; t) \qquad [0 \leqq t \leqq 1] \tag{1}$$

and assume that the instantaneous vector-fields $X_i(t)$ are variable linear combinations of infinitesimal generators $X^1, \cdots, X^\nu$ of an s-parameter Lie group G. Since the linear operators on t variables form a Lie group, one sees that this holds for any linear differential equation, as well as for many non-linear differential equations. Actually, the same methods enable one to integrate infinitesimal linear transformations of Hilbert space.

One may generalize Schlesinger's "L-integration of matrices" as follows. Rewrite (1),

$$dx_i / dt = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k(t) \cdot X_i^k(x_1, \cdots, x_n) \tag{2}$$

---

[1] Pour les conditions suffisantes v. E. Kamke: Zur Theorie der Differentialgleichungen, *Math. Annalen* T. 99.

[2] Pour un exemple moins complet v. mon article dans *Mathematica*, T. VIII (Cluj 1933).

and assume that the $\lambda_k(t)$ are Lebesgue integrable. Then integrate $dx_i / dt = \lambda_i(t)$ under the boundary condition $x_i(0)=0$; the integral will be a rectifiable curve in Euclidean r-space, which we shall call the *graph* of (2). Transformations of t in (2) affect only the parametric representation of the graph, and not its trajectory.

Now assume that G is mapped onto coordinate-space in such a way that X^k is obtained by differentiating with respect to the kth variable, and that it is known how to multiply transformations of G. Divide the interval $[0, 1]$ into subintervals $\Delta_k t$, and denote the chords between the corresponding divisions of the graph by $\Delta_k \lambda$. Then the finite transformation-products

$$T_\pi \equiv T(\Delta_1 \lambda) \circ \cdots \circ T(\Delta_q \lambda)$$

converge in G to a limit T as $|\pi| \to 0$. T is independent of the representation of G, and is the definite integral of (1).

There is another way to determine G. To each *graph* corresponds a unique formal series in the X and their successive Poisson brackets $[X^i, X^j]$ etc., whose sum Y has the property that (within a certain positive radius of convergence) T is the definite integral over $[0, 1]$ of

$$dx_i / dt = Y_i(x_1, \cdots, x_n) \tag{3}$$

which has constant coefficients.

The series does not depend on G, and in case $r=2$ and the graph consists of two sides of the unit square, it specializes to the well-known series of F. Schur-Hausdorff.

EIN MITTELWERTSATZ FÜR DIE LÖSUNGEN VON $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right) = 0$ ANGEWANDT AUF ZWEI POTENTIALFUNKTIONEN

Von Leifur Ásgeirsson, Laugar, Island.

Es gilt der Satz: Für $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq a$, $a=$konst.>0, sei $u(x_1, \cdot\cdot, x_n, y_1, \cdot\cdot, y_n)$ zweimal stetig differenzierbar mit $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right) = 0$. Dann ist $\int_{K_1} u(x_1, \cdot\cdot x_n, 0, \cdot\cdot 0)\, do_1 = \int_{K_2} u(0, \cdot\cdot 0, y_1, \cdot\cdot y_n)\, do_2$, wo do_1, do_2 Inhaltselemente und wo die Integrationen über die ganzen Gebilde K_1

mit $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a^2$ und K_2 mit $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = a^2$ zu erstrecken sind. Man kann auch sagen: u hat auf K_1 und auf K_2 gleiche Mittelwerte. Für Beweise und einige Anwendungen s. Leifur Ásgeirsson: Über eine Mittelwertseigenschaft usw., Math. Annalen 113, S. 321—346.

Ich bringe hier noch eine Anwendung. Es seien $v(\xi_1, \xi_2)$ und $w(\eta_1, \eta_2)$ zwei Potentialfunktionen. Für

$$u(x_1, x_2, y_1, y_2) = v(x_1 \operatorname{Cos} \alpha_1 + y_1 \operatorname{Sin} \alpha_1,\ x_2 \operatorname{Cos} \alpha_2 + y_2 \operatorname{Sin} \alpha_2)$$
$$\cdot\, w(x_1 \operatorname{Sin} \alpha_1 + y_1 \operatorname{Cos} \alpha_1,\ x_2 \operatorname{Sin} \alpha_2 + y_2 \operatorname{Cos} \alpha_2)$$

(α_1, α_2 bel. Konstante) gilt dann $\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} \right) = 0$. Es folgt

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} v(a \operatorname{Cos} \alpha_1 \cos\varphi,\ a \operatorname{Cos} \alpha_2 \sin\varphi) \cdot w(a \operatorname{Sin} \alpha_1 \cos\varphi,\ a \operatorname{Sin} \alpha_2 \sin\varphi)\, d\varphi \\ = &\int_0^{2\pi} v(a \operatorname{Sin} \alpha_1 \cos\varphi,\ a \operatorname{Sin} \alpha_2 \sin\varphi) \cdot w(a \operatorname{Cos} \alpha_1 \cos\varphi,\ a \operatorname{Cos} \alpha_2 \sin\varphi)\, d\varphi; \end{aligned}$$

die Argumentpunkte von v bzw. w durchlaufen hierbei in der (ξ_1, ξ_2)-Ebene bzw. der (η_1, η_2)-Ebene kongruente Paare konfokaler Ellipsen, und für jede der Funktionen wird im Inneren der größeren zugehörigen Ellipse und auf dieser Ellipse selbst Regularität vorausgesetzt.

In dem speziellen Falle von zwei Paaren konzentrischer Kreise hat man

$$\text{(2)}\quad \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} v(r_1 \cos\varphi,\ r_1 \sin\varphi) \cdot w(r_2 \cos\varphi,\ r_2 \sin\varphi)\, d\varphi \\ = &\int_0^{2\pi} v(r_2 \cos\varphi,\ r_2 \sin\varphi) \cdot w(r_1 \cos\varphi,\ r_1 \sin\varphi)\, d\varphi \end{aligned}$$

(r_1, r_2 Konstante). Hier ist ein direkter Beweis leicht zu erbringen. Entweder trage man in (2) ein

$$v(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin \beta\varphi),$$
$$w(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\gamma_n \cos n\varphi + \delta_n \sin n\varphi)$$

(α_n, β_n, γ_n, δ_n Konstante) oder man ersetze nach der Poissonschen Integralformel (angenommen $r_1 > r_2$) in (2) links $w(r_2 \cos\varphi,\ r_2 \sin\varphi)$ durch

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_1^2 - r_2^2)\, w(r_1 \cos\psi,\ r_1 \sin\psi)}{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\varphi - \psi)}\, d\psi$$

und rechts $v(r_2 \cos\varphi,\ r_2 \sin\varphi)$ durch

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_1^2-r_2^2)\,v(r_1\cos\psi,\ r_1\sin\psi)}{r_1^2+r_2^2-2\,r_1\,r_2\cos(\varphi-\psi)}\,d\psi .$$

Es sei noch bemerkt, daß ein allgemeines Verfahren angebbar ist zur Übertragung des benutzten Mittelwertsatzes auf ein beliebiges Produkt $\prod_{i=1}^{m} f_i$ von Funktionen $f_i(x_1^{(i)}, \cdots x_{n_i}^{(i)})$ mit

$$\sum_{h,\,k=1}^{n_i} a_{hk}^{(i)}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_h^{(i)}\,\partial x_k^{(i)}}+2\sum_{j=1}^{n_i} b_j^{(i)}\frac{\partial f_i}{\partial x_j^{(i)}}+c^{(i)} f_i=0\,;\quad (a_{hk}^{(i)},\ b_j^{(i)},\ c^{(i)}\ \text{Konstante}).$$

Der hier betrachtete Fall von zwei Potentialfunktionen ist insofern ein spezieller.

SUR QUELQUES NOYAUX DES ÉQUATIONS INTÉGRALES SE RAPPORTANTS AUX SYSTÈMES ORTHOGONAUX PARTICULIERS DES FONCTIONS FONDAMENTALES

Par Karel Dusl, Praha, Czechoslovakia.

Cette communication a l'intention de faire ressortir une méthode élémentaire pour obtenir le noyau envisagé d'une classe de polynomes orthogonaux.

1. Au système de fonctions trigonométriques: $\varphi_m(x)=\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\, m\,x$ et à des valeurs caractéristiques $\lambda_m=m^2$, m entier, se rattache le noyau symétrique $K(x, s)=\frac{1}{4\pi}(x-s)^2-\frac{1}{2}\,|\,x-s\,|$ et l'équation intégrale homogène aux limites $-\pi$, $+\pi$.

2. Le système de polynomes de Legendre $\varphi_m(x)=P_m(x)$ et les valeurs caractéristiques $\lambda_m=-\frac{m\,(m+1)}{2}$, m entier, correspondent au noyau

$$K(x,\ s)=l(1-s)+l(1+x)+1-2\,l\,2,\quad s\leqq x;$$
$$K(x,\ s)=l(1-x)+l(1+s)+1-2\,l\,2,\quad x\leqq s$$

entre des limites -1, $+1$.

3. Les fonctions de Bessel $\varphi_\varrho(x)=I_m(\varrho x)$, ϱ satisfaisant à l'équation $\varrho I'_m(\varrho)+c I_m(\varrho)=0$ où c est une constante arbitraire et les valeurs caractéristiques dépendent de noyau de la forme:

$$K(x,\, s)=\frac{1}{4\pi}\left[u^{\frac{m}{2}}-(xs)^{\frac{m}{2}}\right]+\frac{(xs)^{\frac{m}{2}}}{2(m+c)};\; u=\frac{x}{s},\; x<s \text{ et } u=\frac{s}{x},\; x>s.$$

Les limites en question sont 0, 1.

4. Le système orthogonal de fonctions de Weber $\varphi_m(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}H_m(x)$ et celui de fonctions de Laguerre: $\varphi_m(x)=x^{\frac{k}{2}}e^{\frac{x}{2}}L_{m,\,k}(x)$ où $H_m(x)$, $L_{m,\,k}(x)$ signifient les polynomes d'Hermite et ceux de Laguerre correspondent à un spectre continu des valeurs caractéristiques $\lambda_m=\frac{1}{\xi^m}$, ξ réel et $|\xi|<1$ tandisque les noyaux correspondants sont de la forme singulière:

$$K(x,\, s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\frac{x^2+s^2}{4}+\frac{\xi}{1-\xi^2}xs} \quad \text{et}$$

$$K(x,\, s)=\frac{1}{i^k}\left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{k}{2}}\frac{1}{\xi-1}\,e^{-\frac{\xi+1}{\xi-1}}\,I_k\left(2i\,\frac{\sqrt{\xi xs}}{\xi-1}\right)$$

pour les polynomes de Laguerre. D'ailleurs ce dernier noyau reste toujours réel pour des ξ en question.

II. C'était M. Hilbert et M^me^ Věra Myller Lebeděv qui s'occupaient de la question de trouver le noyau correspondant à un système donné de fonctions caractéristiques. Leurs méthodes sont un peu différentes. Tandisque M. Hilbert déduit le noyau comme la fonction de Green se rapportante à l'équation différentielle ordinaire et satisfaisante aux certaines conditions frontières, le point de départ de M^me^ Věra Myller Lebeděv est l'équation différentielle partielle de la chaleur et son adjointe. La formule de Green appliquée à une circonférence convenable donne le noyau pour les polynomes d'Hermite et ceux de Laguerre. M. Kampé de Fériet a démontré une méthode élémentaire pour obtenir le même résultat. On part d'une formule connue par ex. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du=1$ et par le simple changement de variable $u=\frac{s-\xi x}{\sqrt{1-\xi^2}}-a\sqrt{1-\xi^2}$ où s est une nouvelle variable, x un paramètre, ξ et a des constantes, l'intégrale se transforme en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(s, x; \xi) \frac{F(a, s)}{F(a\xi, x)} ds = 1$$

où $F(a, s)$ est la fonction génératrice pour des polynomes en question. Si nous identifions dans les deux membres les coefficients de a^m nous obtenons à la fin:

$$\frac{1}{\xi^m} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{K}(s, x, \xi) H_m(s) ds = H_m(x).$$

Le spectre de valeurs caractéristiques est dans tous les cas continu et de la forme $\frac{1}{\xi^m}$. J'ai l'intention de faire ressortir que cette méthode se laisse généraliser pour toutes les sortes de polynomes. Seulement: 1. il faut trouver une intégrale convenable connue comme le point de départ, 2. choisir le changement convenable de la variable. En réponse à ces questions il faut prendre en considération: 1. la formule d'orthogonalité pour un système donné de fonctions caractéristiques 2. la fonction génératrice pour le système envisagé. Ainsi, pour le système de polynomes de Laguerre on parte de la formule

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt = 1$$

k entier et de la fonction génératrice:

$$(-1)^{k+1} \frac{e^{-\frac{xa}{a-1}}}{(a-1)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} L_{n,k}(x).$$

AN INTEGRAL EQUATION OF STIELTJES

By D. V. Widder, Cambridge, Mass.

The equation here considered is

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{d\alpha(t)}{x+t}.$$

Two distinct problems are discussed: inversion and solubility. We define a linear differential operator as follows:

$$L_{k,t}[f] = \frac{(-t)^{k-1}}{k!(k-2)!} \frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}} [t^k f(t)].$$

In the particular case in which $\alpha(t)$ is the integral of a function $\varphi(t)$ we show that $L_{k,t}[f]$ approaches $\varphi(t)$ for almost all positive values of t as k becomes infinite. For the inversion of the general equation we have

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t L_{k,u}[f]\,du=\alpha(t).$$

Concerning solubility we prove that the equation has a solution $\alpha(t)$ of bounded variation in $(0,\infty)$ if and only if $\int_0^\infty |L_{k,t}[f]|\,dt$ is bounded uniformly in k. The equation has a non-decreasing solution if and only if $L_{k,t}[f]\geqq 0$ for all positive t and all positive integers k and if $f(\infty)=0$. Necessary and sufficient conditions that the equation should have solutions of various other classes are also obtained.

An inversion of the integral had previously been obtained by Paley and Wiener in the special case in which $\alpha(t)$ is the integral of a function $\varphi(t)$ of class L^2. Their solution is

$$\pi^{-1}t^{-\frac{1}{2}}\cos(\pi t D)\cdot t^{+\frac{1}{2}}f(t)=\varphi(t),$$

where D denotes differentiation with respect to t, and the cosine is to be expanded into its *power-series* which converges in the mean to $\varphi(t)$. Thus, their inversion operator is linear and of infinite order. We find that our operator $L_{k,t}$, when transformed so as to operate on $\sqrt{x}f(x)$ instead of on $f(x)$, is a section of the *infinite product* expansion of this same operator. It is to be noted, however, that in our case no restriction whatever on the class of $\alpha(t)$ is imposed. It is enough that the integral should converge.

ON A CERTAIN INTEGRAL EQUATION QUADRATIC IN THE UNKNOWN FUNCTION

By I. A. Barnett and C. W. Mendel, Cincinnati, U. S. A.

In a paper presented before the American Mathematical Society, December, 1935, the authors consider the problem of finding all real valued continuous functions $y(x)$ defined on $0\leqq x\leqq 1$, and satisfying the integral equation

$$[y(x)]^2=[y(x)-k(x)]\int_0^1 y(s)\,ds$$

where $k(x)$ is a prescribed continuous function on this interval. It was shown that the solution of the given equation may be made to depend upon a step function $\varepsilon(x)$ taking on only the values $+1$ and -1 on $(0, 1)$. A step function is said to be of type r if it has precisely $r-1$ essential discontinuities. A solution is said to be of type r if the associated step function is of type r. Necessary and sufficient conditions were given for a unique real valued continuous solution and some applications to various types of kernels were made.

If the original integral equation is written in the form

$$cy^2 - 4y + 4k = 0, \quad c = \frac{4}{\int_0^1 y(s)\,ds},$$

then it is seen readily that the problem of solving the integral equation is equivalent to finding a c satisfying the equation

$$\int_0^1 \varepsilon(x)\sqrt{1-ck(x)}\,dx = 1,$$

where the $\varepsilon(x)$ is a prescribed step function.

A natural question arising at this point is to determine the interval on which c must fall as the functions $k(x)$ vary over a certain class for a prescribed ε function. This gives rise to the following problem. Find the largest c for which

$$\int_0^1 \varepsilon(x)\sqrt{1-ck(x)}\,dx = 1 \quad \text{and} \quad \int_0^1 k(x)\,dx = 1.$$

It is found that the largest c is given by the expression $-\dfrac{1-m}{1+m}$, where $m = \int_0^1 \varepsilon(x)\,dx$ i. e., m is the difference between the measure of the sets of points on which ε is positive and negative.

An extension of this problem is that of finding the maximum c for which

$$\int_0^1 \varepsilon(x)\sqrt{1-ck(x)}\,dx = 1 \quad \text{and} \quad \int_0^1 [k(x)]^r\,dx = 1,$$

where r is any positive integer. For the case of even r's, results analogous to the previous one are found but the problem and the results are much more complicated. The method used in solving this more general problem is that of the calculus of variations where the λ-multiplier rule of Lagrange must be suitably modified because of the discontinuous nature of the ε function.

SUR UNE SÉRIE DE LAURENT IDENTIQUEMENT NULLE

Par M. RADU BADESCO, Cluj, Roumanie.

Dans nos recherches antérieures,[1] nous avons établi que, dans des cas très généraux, les trois théorèmes classiques de FREDHOLM étaient encore valables pour quelques extensions au domaine complexe d'une certaine classe d'équations intégrales ou fonctionnelles. Nous nous étions bornés au champ des solutions méromorphes dans tout le plan complexe du paramètre λ de FREDHOLM, qui étaient holomorphes autour de l'origine du plan de la variable d'intégration. M. C. POPOVICI[2] a introduit une nouvelle et intéressante solution; par ex. pour l'équation fonctionnelle

$$\Phi(z) = \lambda\Phi(\alpha z) \text{ la solution } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^n q(\alpha^n z) \tag{1}$$

où $q(z)$ est une fonction arbitraire, mais réalisant la convergence abs. et unif. de cette série. C'est là une fonction uniforme en λ, mais qui n'est pas méromorphe dans tout ce plan et qui n'est non plus holomorphe au voisinage de l'origine du plan z. Nous avons voulu voir si, par le procédé de M. POPOVICI, on pouvait former une solution analogue pour une équation fonctionnelle rentrant dans la catégorie étudiée par nous, mais qui fût holomorphe en z autour de l'origine. Par exemple, pour l'équation

$$\Phi(z) = \lambda z [\Phi'(s)]_{s=\alpha z}, \qquad |\alpha| < 1. \tag{2}$$

nous avons trouvé la solution *uniforme*[3] en λ

$$\Phi_r(\lambda, z) + \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n (n-1)!} [\operatorname{Log} z - \operatorname{Log} t]^{n-1} Q\left(\frac{t}{\alpha^n}\right) \frac{dt}{t}; \quad Q(z) \text{ arbitraire.}$$

De cette expression, nous avons déduit que *la solution de cette espèce* de l'équation (2) *ne pouvait être holomorphe en z autour de l'origine sans être identiquement nulle*, conclusion valable d'ailleurs pour toutes les équations fonctionnelles rentrant dans la classe étudiée par nous (loc. cit.). Les résultats mentionnés par nous au début de cette note ne sont donc pas contredits par l'existence de ces nouvelles solutions. Les autres conclusions de cette étude feront l'objet d'un mémoire plus détaillé.

---

[1] Bulletin de l'Académie roumaine. Bucarest. t. XVI et XVII.

[2] Voir par ex. MATHEMATICA. Cluj. 1932. pag. 195.

[3] où $\Phi_r(\lambda; z)$ est la partie régulière de la solution dont l'expression est facile à former, et qui est holomorphe en z et λ autour des origines respectives si $Q(z)$ l'est aussi par rapport à z.

UN THÉORÈME GÉNÉRAL RELATIF AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE LINÉAIRES ET DU TYPE HYPERBOLIQUE

Par M. S. ZAREMBA, Cracovie.

Le théorème que j'ai en vue est aussi aisé à apercevoir qu'à démontrer, mais est fort utile quand il s'agit de déterminer les singularités de la fonction représentant la solution d'un problème mixte relatif à une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire et du type hyperbolique.

Il va sans dire que nous nous placerons au point de vue des variables réelles. Cela posé, soit u une fonction des n variables $x_1, x_2, \cdots x_n$, définie sans ambiguité dans un domaine fermé (D), simplement connexe, possédant dans ce domaine des dérivées partielles continues jusqu'à un ordre p $(p \geqq 1)$ inclusivement. Supposons que la fonction u satisfasse à l'intérieur du domaine (D) à l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique suivante:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu + d = 0,$$

{où les quantités $a_{i,j}$, b_k, c et d représentent des fonctions des variables $x_1, x_2, \cdots x_n$ définies sans ambiguité dans le domaine (D) et possédant, à l'intérieur de ce domaine, des dérivées partielles continues au moins jusqu'à l'ordre $p+1$ inclusivement et admettant des valeurs périphériques distribuées continuement sur la frontière du domaine considéré} sauf peut-être, au cas où l'on aurait $p=1$, sur une caractéristique (S) de cette équation. Nous supposerons que la caractéristique (S) de l'équation (1), caractéristique que nous aurons à considérer quelle que soit la valeur de l'entier p, partage le domaine (D) en deux domaines simplement connexes (D_1) et (D_2). Nous supposerons encore que la fonction u admette à l'intérieur de chacun des domaines (D_1) et (D_2) des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $p+1$ inclusivement et que chacune de ces dérivées, considérée en l'un quelconque des domaines (D_1) ou (D_2) admette des valeurs périphériques distribuées continuement sur la frontière du domaine considéré. Enfin nous admettrons que la partie de toute bicaractéristique de l'équation (1) située sur la caractéristique (S) et formée de points appartenant au domaine (D) se réduise à un seul arc limité par deux points. Les hypothèses précédentes étant vérifiées, on a le théorème suivant:

Si, à la traversée de la caractéristique (S) en un point A situé dans le domaine (D), les dérivées d'ordre $p+1$ de la fonction u ne sont pas toutes *continues, il en est de même à la traversée de la caractéristique* (S) *en n'importe quel autre point situé, dans le domaine* (D), *sur la bicaractéristique de l'équation* (1) *qui passe par le point* A.

Faute de place, je publierai ailleurs la démonstration de ce théorème.

Je dois ajouter que, dans le cas particulier où l'on a $p=1$ la démonstration du théorème précédent est incluse dans celle du théorème que j'ai communiqué à l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres le 8 octobre 1934.

NICHTLINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VOM HYPERBOLISCHEN TYPUS

Von J. Schauder, Lwów.

Sei

$$f(x_1, \cdots, x_m, u, p_1, p_2, \cdots, p_m, r_{11}, \cdots, r_{ik}, \cdots, r_{mm}) = 0 \tag{1}$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Das folgende gemischte Randwertproblem wird im reellen Gebiete betrachtet: eine Lösung u von (1) zu finden, falls ihre Anfangswerte (d. h. die Werte der Funktion u selbst und ihrer ersten Ableitungen) auf einer raumartigen Fläche S_1 und die Randwerte auf einer zeitartigen Fläche S_2 vorgegeben sind. Dabei schneiden sich S_1 und S_2 in einer $(m-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Viele andere Aufgaben lassen sich auf diesen Fall zurückführen.

In Weiterführung meiner früheren Untersuchungen[1] wird dieses Problem zuerst für quasilineare Differentialgleichungen gelöst,[2] d. h. für Differentialgleichungen, die in den zweiten Ableitungen linear sind. Dadurch wird die Lösung unserer gemischten Randwertaufgabe für die ganz allgemeine nichtlineare Differentialgleichung (1) ermöglicht.[3]

Ähnlich gehe ich, wenn es sich um das Cauchy'sche Problem handelt, auch bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vor. So z. B. kann man mit derselben Methode das Cauchy'sche Problem für die Differentialgleichungen erster Ordnung

$$g(x_1, \cdots, x_m, u, p_1, p_2, \cdots, p_m) = 0 \tag{2}$$

---

[1] J. Schauder. Fundamenta Math. 26 (1935), p. 213—246.

[2] M. Krzyżański and J. Schauder. Studia Math. 6; p. 162—189.

[3] J. Schauder. Studia Math. 6; p. 190—198.

lösen (Com. Math. Helvetici, im Druck). Dabei ist es wichtig, daß statt der Integralabschätzungen für die Lösung *u* und ihre Ableitungen, in diesem Falle gewisse auf A. Haar[1] zurückgehende Abschätzungen benutzt werden. Mittels der Haarschen Ungleichungen können auch in derselben Weise Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen und unbekannten Funktionen behandelt werden. Vermutlich lassen sich Abschätzungen, die den Haarschen entsprechen, auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung ableiten.

SUR LES SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A DEUX FONCTIONS INCONNUES

Par Maurice Janet, Caen.

1. — Le degré de généralité de la solution d'un système différentiel est caractérisé essentiellement par deux entiers: nombre maximum λ des arguments des fonctions arbitraires, nombre μ des fonctions arbitraires de λ arguments.

Considérons un système linéaire comprenant autant d'équations aux dérivées partielles que de fonctions inconnues, et supposons les premiers membres indépendants; je ne connais aucune démonstration du fait général suivant (T) qui semble extrêmement vraisemblable[2]: « *n désignant le nombre total des variables indépendantes, λ ne peut être inférieur à $n-1$ que si, à la fois, $\lambda=0$, $\mu=0$.* »

Soit un couple d'opérateurs différentiels linéaires (A, A'), tel que la solution du système $A(u)=0$ $A'(u)=0$ ne dépende pas de fonctions arbitraires de $n-1$ variables; soit alors *un couple particulier d'opérateurs différentiels linéaires L, L' tel que*

$$LA+L'A'=0. \tag{I}$$

Le théorème admis entraînerait la conséquence suivante:

« *L'équation (aux inconnues: op. C, C')*

$$LC+L'C'=1, \tag{II}$$

n'est possible que si l'équation (aux inconnues: op. M, M')

$$MA+M'A'=1, \tag{III}$$

est elle-même possible. »

---

[1] A. Haar. Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologna, 1928.

[2] Cf. Ann. Soc. Polonaise de Math. t. XIII 1934: « Les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles ».

2. — Je voudrais indiquer ici un cas particulier où le théorème (T) se démontre aisément: c'est celui d'un système:

$$A(u) + B(v) = 0 \qquad A'(u) + B'(v) = 0,$$

où, A, A' étant du premier ordre, il existe un couple du premier ordre M, M' tel que $MA + M'A' = 1$. Le système auquel doit satisfaire v est alors:

$$D(v) \equiv (AM - 1)B(v) + AM'B'(v) = 0.$$
$$D'(v) \equiv A'MB(v) + (A'M' - 1)B'(v) = 0.$$

On voit d'ailleurs que D, D' sont liés par la relation $MD + M'D' = 0$. Il résulte de là-même que, sauf s'ils sont tous deux identiquement nuls, ils sont, en v, d'un même ordre au moins égal à *deux*. Mais alors, si l'on exclut le cas où v peut être choisi arbitrairement, il devient clair en utilisant un mode de raisonnement employé[1] dans le travail précédemment cité, que le nombre λ relatif au système $D(v) = 0$ $D'(v) = 0$ est *égal* et non pas inférieur à $n - 1$.

3. — L'exemple présent montre que l'équation (aux inconnues: op. M, M') $MA + M'A' = 1$ peut être possible sans que (L, L' désignant des opérateurs tels que $LA + L'A' = 0$) l'équation (aux inconnues: op. C, C') $LC + L'C' = 1$ le soit (ce qui est à rapprocher du résultat indiqué comme probable plus haut: fin de 1). Il suffit pour le voir de choisir $L = AM - 1$, $L' = AM'$.

On remarque d'autre part que les opérateurs différentiels linéaires les plus généraux H, H' tels que

$$\text{(IV)} \qquad (AM - 1)H + AM'H' = 0,$$

sont: $H = AK$, $H' = A'K$, où K est un op. diff. linéaire arbitraire. Il devient alors évident[2] que (IV) entraîne:

$$\text{(IV)}' \qquad A'MH + (A'M' - 1)H' = 0.$$

POTENTIELS DE DIVERS ORDRES ET LEURS FONCTIONS DE GREEN

Par Marcel Riesz, Lund.

L'autre jour je vous ai indiqué une intégration du type hyperbolique. Dans le même ordre d'idées on peut aussi considérer une intégration du type elliptique. Ω étant l'espace à n dimensions et r_{PQ} désignant la distance euclidienne des points P et Q, nous posons, pour $\alpha > 0$,

[1] Cf. loc. cit. p. 66.

[2] Cf. loc. cit. p. 65.

$$I^{\alpha} f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{\Omega} f(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} \, dQ; \quad H_m(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} 2^{\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)}.$$

On a $I^{\alpha} I^{\beta} = I^{\alpha+\beta} (\alpha+\beta<m)$ et $\Delta I^{\alpha+2} = -I^{\alpha}$, Δ désignant l'opérateur de Laplace. C'est la valeur $\alpha=2$ qui donne le potentiel newtonien, sauf pour $m=2$, où un passage à la limite facile conduit au potentiel logarithmique. En remplaçant $f(Q)dQ$ par une différentielle de STIELTJES, on peut aussi considérer des potentiels de la forme

$$v(P) = \int_{F} r_{PQ}^{\alpha-m} \, d\mu(Q),$$

F étant un ensemble fermé. Dans sa Thèse, M. FROSTMAN a étudié la capacité des ensembles par rapport à ces potentiels et, sous la condition indispensable $\alpha \leq 2$, il a démontré l'existence du potentiel d'équilibre pour tout ensemble fermé de capacité positive. De ce résultat de M. Frostman, on déduit par la transformation de KELVIN l'existence d'une distribution unique μ_M telle que la fonction de GREEN

$$G_M(P) = r_{MP}^{\alpha-m} - \int_{F} r_{PQ}^{\alpha-m} \, d\mu_M(Q)$$

s'annule en tout point de F, sauf peut-être dans un ensemble de capacité nulle. Une différence essentielle entre le cas newtonien et le cas $\alpha<2$, c'est que, dans le dernier cas, la masse se répartit — dans un sens facile à préciser — sur l'ensemble F tout entier et non seulement sur sa frontière. Un probléme central est de donner les conditions pour qu'une fonction donnée sur un ensemble F puisse s'écrire comme potentiel de masses portées par cet ensemble. Nous arrivons dans cet ordre d'idées à une extension naturelle des fonctions surharmoniques (sousharmoniques).

Un résumé assez complet de ces recherches va paraître dans les *Acta Szeged.*

LA MÉTHODE DE VARIATION DE GAUSS ET LES FONCTIONS SOUSHARMONIQUES

Par OTTO FROSTMAN, Lund.

Un travail portant le même titre va paraître prochainement dans les *Acta Szeged.*

MEAN VALUE THEOREMS, WITH APPLICATIONS IN THE THEORY OF HARMONIC, SUBHARMONIC AND SUPERHARMONIC FUNCTIONS

By Fred W. Perkins, Hanover, New Hampshire, U. S. A.

Let $f(t)$ be a real function of the real variable t, continuous on I: $0 \leqq t \leqq a$. We set $g(\varrho, f) = \int_0^\varrho f(t)\,\omega(t)\,dt \Big/ \int_0^\varrho \omega(t)\,dt$, $0 < \varrho \leqq a$, where $\omega(t)$ is continuous on I and does not vanish identically on any subinterval of I. If $g(\varrho, f)$ is constant, $0 < \varrho \leqq a$, then $f(t)$ is the same constant. Now let u be a function continuous in a finite region R of space; let P be an arbitrary interior point of R; let a_p be a positive number such that the interior and boundary of the sphere of radius a_p with center at P lies entirely in R; let $f_p(t)$, $0 \leqq t \leqq a_p$, be the arithmetic mean of u on the surface of a concentric sphere of radius t. If $g(\varrho, f_p)$ is independent of ϱ, then u is harmonic.

We now set

$$\varphi(\alpha, \beta, \varrho; f) = \frac{\beta^\alpha}{\varrho^\beta \Gamma(\alpha)} \int_0^\varrho f(t)\, t^{\beta-1} \left(\log \frac{\varrho}{t}\right)^{\alpha-1} dt, \quad 0 < \alpha, 0 < \beta, 0 < \varrho \leqq a,$$

$$\varphi(0, \beta, \varrho; f) = f(\varrho), \qquad 0 < \beta, \qquad 0 \leqq \varrho \leqq a,$$

$$\varphi(\alpha, 0, \varrho; f) = f(0), \qquad 0 \leqq \alpha, \qquad 0 \leqq \varrho \leqq a,$$

$$\varphi(\alpha, \beta, 0; f) = f(0), \qquad 0 \leqq \alpha, \qquad 0 \leqq \beta.$$

The integral converges uniformly when $\alpha' \leqq \alpha \leqq \alpha''$, $\beta' \leqq \beta \leqq \beta''$, $\varrho' \leqq \varrho \leqq \varrho''$, where $\alpha', \alpha'', \cdots, \varrho''$ are positive constants and $\varrho'' \leqq a$. Moreover, φ is a continuous function of α, β, ϱ in its region of definition except when $\alpha = \beta = 0$, $0 < \varrho \leqq a$. The expression φ is related to the Laplace Integral, and to certain formulas used in the theory of summability.

A necessary and sufficient condition that u be harmonic is that $\varphi(\alpha, \beta, \varrho; f_p)$ have a value independent of one of the variables α, β, ϱ. Another such condition is that to each interior point P of R there correspond an integer $\alpha_p \geqq 0$ and a constant $\beta_p > 0$ such that in the interior of R,

$$\varphi(\alpha_p, \beta_p, \varrho; f_p) = \varphi(\alpha_p + 1, \beta_p, \varrho; f_p), \qquad 0 \leqq \varrho \leqq a_p.$$

A necessary condition that u be subharmonic is that, at each interior point P of R, the expression $\varphi(\alpha, \beta, \varrho; f_p)$ considered as a function of α alone (for fixed positive β and ϱ) should be non-increasing, but considered as a function of either β or ϱ alone (for fixed positive values of the other variables) should be non-decreasing. A sufficient condition that u be subharmonic is that to each interior point P of R there correspond constants β_p' and β_p'' such that $0 \leqq \beta_p' < \beta_p''$ and

$$\varphi(1, \beta_p', \varrho; f_p) \leqq \varphi(1, \beta_p'', \varrho; f_p), \qquad 0 \leqq \varrho \leqq a_p.$$

A necessary and sufficient condition that u be harmonic is that for some distinct β_p' and β_p'',

$$\varphi(1, \beta_p', \varrho; f_p) = \varphi(1, \beta_p'', \varrho; f_p), \qquad 0 \leqq \varrho \leqq a_p.$$

In these theorems $\varphi(1, \beta_p'', \varrho; f_p)$ may be replaced by $f_p(\varrho)$.

The case in which $\alpha = 1$ is particularly interesting. Some of the corresponding means can be given simple geometric interpretations. When applied in some such cases, parts of our results are contained in theorems given by Littlewood, and by Beckenbach and Radó.

ÜBER EIN PRINZIP IN DER VARIATIONSRECHNUNG

Von S. Mazur und J. Schauder, Lwów.

Sei H eine konvexe und abgeschlossene Punktmenge in einem linearen normierten und vollständigen Raume. In H sei ein stetiges Funktional $f(x)$ erklärt mit

$$f(\lambda x + \mu y) \leqq \lambda f(x) + \mu f(y); \ \lambda + \mu = 1, \ \lambda \geqq 0, \ \mu \geqq 0.$$

Wir setzen voraus, daß f in H nach unten beschränkt ist und bezeichnen mit μ die untere Grenze der Werte von f in H. Wir nehmen jetzt an, es gebe eine Punktfolge x_n aus H, die nach einem Elemente x schwach konvergiert und für welche $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = \mu$ gilt. Dann wird behauptet: x gehört zu H und es ist $f(x) = \mu$, d. h. das Minimum wird in H angenommen.

Dieser Satz wird dazu benutzt, um Existenzsätze aus der Variationsrechnung[1] für mehrfache Integrale wiederzugewinnen, ohne wesentliche Benutzung der Halbstetigkeit. Ähnlich können auch Variationsprobleme behandelt werden, bei denen unter dem Integralzeichen höhere Ableitungen vorkommen; die Integrationsmannigfaltigkeit darf auch geschlossen sein. Endlich sind gewisse Variationsprobleme für Doppelintegrale in Parameterform der Methode zugänglich.

---

[1] L. Tonelli, L'estremo Assoluto degli Integrali Doppi. Ann. di Pisa, 2 (1933).

ERWEITERTE INTEGRALGLEICHUNGEN

Von Wolfgang Sternberg, Jerusalem.

Gegenstand meines Vortrages waren Integralgleichungen der Form

$$(A) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(x)\varphi(c_\nu) + f(x)$$

und

$$(B) \qquad \varphi(P) = \lambda \iint_T K(P,Q)\varphi(Q)\,d\tau + \mu \int_C M(P,s)\varphi(s)\,ds + f(P)$$

Ich habe über sie eine Note in den C. R. (1936) veröffentlicht und werde eine ausführlichere Arbeit in der Comp. Math. publizieren.

Sie stellen gegenüber dem Fredholmschen Typus durch die Zusatzglieder $\sum_\nu \cdots$ bezw. $\mu \int_C \cdots$ eine Erweiterung dar, weswegen ich sie als „erweiterte" Integralgleichungen bezeichne. Es bedeutet $p_\nu(x)$ eine gegebene Funktion von x und c_ν einen gegebenen Punkt des Intervalls $a \cdots b$, ferner C eine gegebene ganz in T liegende Kurve (z. B. die Randkurve), s einen Punkt von C, P einen Punkt von T, M (P, s) eine gegebene Funktion und μ, ebenso wie λ, einen Parameter. Alle auftretenden Funktionen werden der Einfachheit halber als stetig vorausgesetzt.

Zu einer Gleichung vom Typus (B) gelangte ich bei der Lösung eines physikalischen Problems („Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetischen Lichttheorie". Comp. Math., V. 3, F. 2, (1936)), während (A) das eindimensionale Analogon von (B) darstellt.

Was (A) betrifft, so habe ich speziell den Fall $\nu = 1$, also die Gleichung

$$(A_1) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_a^b (K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + p(x)\varphi(c) + f(x)$$

behandelt. Diese Spezialisierung dient aber nur zur Vereinfachung der Rechnungen.

Es zeigt sich, daß die Sätze der Fredholmschen Theorie im allgemeinen auf (A) oder (A_1) und (B) übertragen werden können: Hat die homogene Gleichung, die mit (A^+) bezw. (A_1^+) und (B^+) bezeichnet werde, keine Lösung, so besitzt die unhomogene eine und nur eine Lösung. Hat die homogene Gleichung aber Lösungen, so besitzt die unhomogene nur unter gewissen Bedingungen eine Lösung, und diese ist nicht mehr eindeutig. Diejenigen Werte von λ, für welche die homogene Gleichung Lösungen hat, sind im allgemeinen die Wurzeln einer transzendenten Gleichung. Hier treten aber auch Ausnahmefälle auf. So hat (A_1^+), wenn $p(c) = 1$ und $K(c, \xi) \equiv 0$ ist, für jeden Wert von λ Lösungen. Ebenso hat (B^+) in gewissen Fällen für jeden Wert von μ bei festem λ und für jeden Wert von λ bei festem μ Lösungen.

Den obigen ähnliche Gleichungen wurden schon von Hurwitz, F. Riesz, Moore und Kneser untersucht. Doch handelt es sich bei diesen Autoren entweder um Gleichungen ohne Parameter oder um solche, bei denen λ sowohl vor dem Integral wie vor den Zusatzgliedern erscheint. Daher stellen (A) und (B) einen neuen Typus dar (man vgl. das über meine C.-R.-Note im „Zentralblatt" von Herrn Hildebrandt gelieferte, allerdings unexakte und nicht klare Referat). Die zu variablem λ gehörigen Sätze sind neu, insbesondere die Behandlung der Ausnahmefälle. Die zu festem λ gehörigen müssen die genannten Autoren mit mir gemeinsam haben, wobei aber meine Beweismethode neu ist.

Auch allgemeinere Gleichungen, die man z. B. aus (A) erhält, indem man die $p_\nu(x)$ durch Funktionen $p_\nu(x, \lambda)$ ersetzt, welche noch von λ abhängen, können mit unseren Methoden behandelt werden. Sie enthalten übrigens die von A. Kneser untersuchten „belasteten" Integralgleichungen (Rend. di Pal., 37, 1914, S. 169—197) als speziellen Fall.

Neben der Fredholmschen kann auch die Theorie der Eigenfunktionen für die erweiterten Integralgleichungen entwickelt werden.

GEOMETRISCHES ZUR FUNKTIONENTHEORIE

Von ANDREAS SPEISER, Zürich.

Konstruiert man die zu einem elliptischen Integral gehörige Überlagerungsfläche, so gestattet sie Deckoperationen, welche sich durch drei Involutionen, deren Produkt wieder eine solche ist, erzeugen lassen. Daraus ergibt sich, daß die Produkte zweier Involutionen eine Abelsche Gruppe mit zwei Erzeugenden liefert, deren Ordnung unendlich ist. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Fläche vom parabolischen Typus ist und das Umkehrproblem ist mit dem Fundamentalsatz der Funktionentheorie gelöst. Der Kern der Lehre besteht darin, daß man die Ebene mit einem beliebigen Viereck, deren Seiten Kurven mit Mittelpunkt sind, überdecken kann, indem man das Viereck um die Mittelpunkte der Seiten dreht und damit fortfährt.

Entsprechend liefert der hyperelliptische Fall hyperbolische $2n$-Ecke, welche jene Ebene pflastern. Fordert man, daß die Produkte zweier Involutionen vertauschbar sind, so wird die Kommutatorgruppe der durch sie erzeugten Gruppe zu 1 und man erhält die Gruppe der Abelschen Integrale. Sie liefert euklidische $2n$-Ecke mit der Winkelsumme 2π, welche Verzweigungspunkte in ihrem Innern enthalten.

SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS MÉROMORPHES DANS UN CERCLE

Par HENRI MILLOUX, Bordeaux.

L'extension du théorème de P. BOUTROUX—H. CARTAN à la géométrie non euclidienne conduit, dans ses applications à l'étude de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes dans un cercle, à des résultats meilleurs que ceux qui ont été obtenus jusqu'ici.

Ainsi, *soit* $\varphi(x)$ *une fonction méromorphe dans le cercle* $|x|=1$, *et n'y prenant pas plus de* n *fois l'ensemble de trois valeurs, dont les distances sphériques prises deux à deux sont supérieures à* d.

On désigne, dans ce qui suit, par $\Delta_r(a)$ *la distance euclidienne au cercle* $|x|=r$, *d'un point intérieur à ce cercle, où* $\varphi(x)$ *est égale à* a; *par* $\delta(u, v)$ *la distance sphérique de deux quantités* u *et* v, *par* k *une constante numérique qui n'a pas partout la même valeur.*

Ceci posé, deux circonstances peuvent se présenter, qui se complètent:

Circonstance A. Le nombre des zéros de $\varphi - a$ est le même pour toutes les valeurs de a telles que

$$\log [d\,\delta(a, A)] > -k\,n\,.$$

Il est en particulier inférieur à n. Pour les autres a, on a l'inégalité:

$$\sum \Delta_1(a) < k\,n + k + k \log \frac{1}{d\,\delta(a, A)}\,.$$

A est une certaine quantité fixe.

Circonstance B. Il existe un nombre fixe ϱ inférieur à un, tel que:

$$\sum \Delta_r(a) < \frac{1}{1-\varrho}\left[k\,n + k + k \log \frac{1}{1-r} + k \log \frac{1}{1-\varrho}\right].$$

Et de plus, si ϱ dépasse 0,7, le nombre des zéros de $\varphi - a$ est, dans le cercle $|x| = \frac{1}{2}$, indépendant de a (donc inférieur à n) sauf peut-être pour les valeurs de a satisfaisant à

$$\log [d\,\delta(a, A)] > -k\,n\,.$$

Alors ce nombre est majoré par:

$$k\,n + k + k \log \frac{1}{d\,\delta(a, A)}\,.$$

ÜBER DAS UMKEHRPROBLEM DER WERTVERTEILUNGSLEHRE

Von Egon Ullrich, Gießen.

Wir verstehen darunter allgemein die Aufgabe, meromorphe Funktionen mit vorgeschriebenen Wertverteilungseigenschaften herzustellen; hier soll es sich darum handeln, gebrochene Transzendenten (= meromorph für $|z| < \infty$) aufzubauen, die für $q \geqq 3$ gegebene Werte $a_1, \cdots, a_q$ vorgeschriebene Defekte $\delta(a)$ und Indizes $\varepsilon(a)$ aufweisen so, daß die Defektrelation

$$\sum_{\gamma=1}^{q} \delta(a_\gamma) + \sum_{\gamma=1}^{q} \varepsilon(a_\gamma) \leqq 2$$

im Sinne der Gleichheit erfüllt ist (vgl. Satz 2 unten).

Für den Fall, wo nur Defekte von 0 verschieden sind, ist diese Aufgabe von R. Nevanlinna erledigt worden. Er untersuchte die Riemannschen Flächen mit nur — endlich vielen — logarithmischen Windungspunkten: Zu jeder gegebenen Vorschrift über die Defekte (mit einer Einschränkung; vgl. Satz 2) gibt es angebbare und i. a. sogar unendlich viele solche Flächen, deren Erzeugende (= Umkehrung der Abbildungsfunktion) die gewünschten Wertverteilungseigenschaften zeigt.

Sollen nun auch Indizes der algebraischen Verzweigtheit von 0 verschieden sein, so muß man jedenfalls Flächen heranziehen, die unendlich viele algebraische Windungspunkte enthalten — neben endlich vielen logarithmischen je nach den Defektvorschriften.

Die Schwierigkeit liegt jetzt darin, diese unendlich vielen algebraischen Windungspunkte so in der Fläche zu verteilen, daß man deren Typus feststellen und die Wertverteilung der erzeugenden Funktion ausdrücklich berechnen kann.

Diese Klippe konnte ich aufgrund der Streckenkomplexdarstellung Riemannscher Flächen überwinden, indem ich die Klasse von *Flächen mit endlich vielen periodischen Enden* heranzog.

Jene Darstellung ist — nach Vorarbeiten von Speiser und Nevanlinna — zuerst von Elfving in geeigneter Allgemeinheit eingeführt worden. Man ziehe durch die a_γ eine einfache geschlossene Kurve L; sie zerlegt die Ebene in zwei Gebiete J und A. Dort wählen wir je einen Punkt i, a als Vertreter und verbinden diese Punkte durch q Bögen, die bzw. je eines der q Stücke $a_1 a_2, \cdots, a_q a_1$ von L genau einmal schneiden. Die Figur K aus diesen q Bögen projizieren wir auf die Fläche über der w-Ebene. Indem wir endlich die Fläche topologisch schlicht abbilden, erhalten wir zugleich, als Bild jener Projektion, den Streckenkomplex k. (Er hängt von der Wahl von L ab; das ist aber hier belanglos).

Der Streckenkomplex k kann als Wiedergabe der Verheftungsvorschrift gelten, nach der man die gegebene Fläche durch Aneinanderheften von Halbblättern J und A längs der Stücke von L aufbauen kann. So pflegt man ja auch in funktionentheoretischen Vorlesungen den Aufbau bekannter Flächen zu vollziehen (wie bei den Erzeugnissen des Sinus, der Pefunktion, der Modulfunktion).

Mithilfe dieser Streckenkomplexe erscheinen die von Herrn Nevanlinna eingeführten Flächen als Komplexe mit nur logarithmischen Enden; abgesehen von Zweiecken, die schlichter Überdeckung eines a_γ entsprechen, enthalten sie keine topologischen Kreisbilder.

Die von uns aufgebauten Flächen dagegen werden durch Komplexe mit endlich vielen periodischen Enden gekennzeichnet, in denen sich gewisse Anordnungen von 2λ-Ecken (als Bilder λ-blättriger algebraischer Windungspunkte) periodisch wiederholen.

Eine von Ahlfors bei den Nevanlinnaschen Flächen entwickelte Methode läßt sich so weit ausbauen, daß man die folgenden Sätze gewinnen kann:

1. *Alle Flächen mit nur endlich vielen periodischen Enden sind grenzpunktartig.*

2. *Defekte und Indizes ihrer erzeugenden Funktionen ergeben sich als rationale Zahlen mit der Summe* 2. *Dabei bleibt*

$$0 \leqq \delta \leqq 1\,, \quad 0 \leqq \varepsilon < 1\,.$$

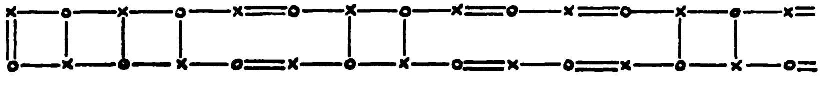
3. *Unsere Klasse ist umfangreich genug, um Flächen anzugeben, für deren Erzeugende Defekte und Indizes (abgesehen von diesen Einschränkungen) beliebig vorgeschriebene Werte annehmen.*

4. *Die Wachstumsordnung der erzeugenden Funktionen hängt nur ab von der Zahl n der periodischen Enden, bzw. der logarithmischen Windungspunkte zwischen ihnen. Sie ist genau gleich* $\dfrac{n}{2}$.

Die Flächenklasse[1] umfaßt die von Nevanlinna und Elfing behandelten Flächen mit nur endlich vielen Windungspunkten (darunter mindestens zwei logarithmischen); sie enthält aber auch Flächen mit nur einem logarithmischen und unendlich vielen algebraischen Windungspunkten in einem periodischen Ende. Sie umfaßt ferner alle von rationalen Funktionen von e^z erzeugten Flächen, insbesondere also die von trigonometrischen Polynomen erzeugten.

Es bleibt dabei offen, wie man eine Funktion herstellen kann, bei der eine Sorte einen algebraischen Verzweigungsindex vom Höchstwert 1 zeigt; ein solches Beispiel war bisher nicht bekannt.

Ich kann indessen auch solche Beispiele mithilfe von Streckenkomplexen angeben. Das kann nicht mehr mithilfe periodischer Enden gelingen; der Index kann nur dann den Wert 1 haben, wenn für jedes n alle Punkte einer Stellensorte bis auf endlich viele mehr-als-n-blättrige algebraische Windungspunkte sind. Es genüge, den folgenden Komplex zu zeigen, an dem man den Gedanken der Konstruktion abliest:



Unserem Komplex entspricht eine Fläche mit einem logarithmischen Windungspunkt, an dem alle Blätter hängen; er liege über $w=\infty$; dann ist die Erzeugende Funktion ganz und $\delta(\infty)=1$. Die 2λ-Ecke gehören

[1] Eine ausführlichere Darstellung findet man in den Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1936. Dort auch Angaben über das Schrifttum.

abwechselnd (von links nach rechts) zu zwei verschiedenen Stellensorten. Zur ersten ($w=1$) gehört der Reihe nach ein schlichtes Blatt, dann ein 2, 4, 6, . . .-blättriger algebraischer Windungspunkt. Zur zweiten Sorte ($w=0$) gehören alle noch übrigen Vierecke (also zweiblättrige Windungspunkte) und die sämtlichen Zweiecke oben und unten, also viele schlichte Blätter über $w=0$.

Daraus folgt leicht $\varepsilon(0)=0$ und $\varepsilon(1)=1$, w. z. b. w.

ON ANALYTIC FUNCTIONS WITH NON-ISOLATED ESSENTIAL SINGULARITIES

By M. L. Cartwright, Cambridge, England.

Iversen proved that if a function $f(z)$ omits the value a near an isolated essential singularity Z, then a is an asymptotic value of $f(z)$ at Z, i. e. $f(z)\to a$ as $z\to Z$ along some continuous path. This is obviously false if $f(z)$ has a set of singularities of *positive linear measure* near Z. A set is said to be of *logarithmic measure zero* if for every $\varepsilon>0$ there exists a sequence of circles with radii $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, covering the set, such that

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\overset{+}{\log}\left(\frac{1}{\varrho_\nu}\right)\right]^{-1}<\varepsilon.$$

Theorem. *Suppose that $f(z)$ is meromorphic in an open simply connected domain D, except for a set of essential singularities of logarithmic measure zero. If $f(z)\neq a$ near an essential singularity Z, then for every $\delta>0$ $f(z)\to a$ as z tends along a continuous path to some singularity in $|z-Z|<\delta$.*

A proof of this theorem and a fuller discussion of the subject is given in my paper in the Journal of the London Mathematical Society (1936).

ABELSCHE INTEGRALE UND ENDLICHVIELDEUTIGE ANALYTISCHE FUNKTIONEN

Von Henrik L. Selberg, Oslo.

Sei $f(x)$ eine endlichvieldeutige analytische Funktion, die für alle endlichen x algebraischen Charakter hat. Die Anzahl der verschiedenen Zweige bezeichnen wir mit k und die Zweige selbst mit $f_1, f_2, \ldots, f_k$. $f(x)$ genügt offenbar einer Gleichung

$$\{f(x)\}^k + A_1(x)\{f(x)\}^{k-1} + \cdots + A_k(x) = 0,$$

deren Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_k$ meromorphe Funktionen sind. Im Anschluß an R. Nevanlinna setzen wir

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f), \text{ wo}$$

$$m(r, f) = \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\overset{+}{\log}\,|f_\nu(re^{i\vartheta})|\right\}d\vartheta,$$

$$N(r, f) = \frac{1}{k}\int_0^r\Big[n(t, f) - n(0, f)\Big]d\log t + \frac{n(0, f)}{k}\log r,$$

dabei bezeichnet $n(r, f)$ die unter Berücksichtigung der Multiplizität bestimmte Anzahl der ∞-Stellen von $f(x)$ im Kreise $|x| \leqq r$.

Sei nun $W(z)$ eine algebraische Funktion der Variable z. Bildet man die Funktion

$$\Phi(x) = \frac{f'(x)}{F(x)}, \text{ wo } F(x) = W(f(x)), f' = \frac{df}{dx},$$

so kann $T(r, \Phi)$ unter Umständen von niedrigerer Größenordnung als $T(r, f)$ sein. Dies ist z. B. der Fall mit $f(x) = \wp(x)$, $W(z) = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$. Wann kann nun eine solche Senkung der T-Funktion eintreten? In einer früheren Arbeit[1] habe ich bewiesen, daß wenn das Integral

[1] H. L. Selberg, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale. Avh. utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo I. Matem.-Naturv. Kl. 1934. No. 8, S. 53.

$$(1) \qquad u = \int^{z} \frac{dz}{W(z)}$$

höchstens mit rein logarithmische Unstetigkeiten versehen ist d. h. die Bedingungen

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{W(z)} \neq \infty \text{ für alle endliche } z_0$$

$$\lim_{z \to \infty} \frac{z}{W(z)} \neq \infty$$

erfüllt sind, so kann

$$(2) \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{N(r, \Phi)}{T(r, f)} = 0$$

nur stattfinden, wenn die Umkehrfunktion $z(u)$ des Integrales (1) endlichvieldeutig ist. Ist $f(x)$ von endlicher Ordnung d. h.

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r} < \infty$$

so kann sogar in (2) $\underline{\lim}$ geschrieben werden.

Ist das Integral (1) auch mit nicht rein logarithmische Unstetigkeiten versehen, so liegen die Verhältnisse ganz anders an. Ich habe dann nur beweisen können, daß wenn $f(x)$ von endlicher Ordnung ist, so kann

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r, \Phi)}{T(r, f)} = 0$$

nur stattfinden, wenn $f(x)$ algebraisch ist und $\Phi(x)$ sich auf eine Konstante reduziert. Dieser Satz fließt unmittelbar aus der Abschätzung:

Ist das Integral (1) mit nicht rein logarithmische Unstetigkeiten versehen, so gilt für jedes $k > 1$

$$(3) \qquad T(r, f) = O(T(kr, \Phi)) + O(\log r).$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der von G. Valiron[1] gefundenen Abschätzung

$$T(r, f) = O(T(kr, f')) + O(\log r).$$

Auf den Beweis von (3) kann ich hier nicht eingehen.

[1] Sur la dérivée des fonctions algébroides, Bull. soc. math. France 59 (1931), S. 17—39.

ÜBER DAS ANWACHSEN EINER ANALYTISCHEN FUNKTION IN EINER GEGEBENEN PUNKTFOLGE

Von A. JUNNILA, Helsinki.

Es handelte sich im Vortrage um die Abhängigkeit des Anwachsens einer analytischen Funktion in einem Gebiete von ihrem Verhalten auf dem Rande und in einer gegebenen *Folge* $x_1, x_2, \cdots$ *von Gebietspunkten*, eine Frage, die in ihrer Allgemeinheit nur wenig untersucht worden ist. V. BERNSTEIN, MARY L. CARTWRIGHT, PÓLYA und H. SELBERG haben einige diesbezügliche Sätze vorgelegt. Üblich nimmt man in diesen Untersuchungen als Ausgangspunkt die Theorie der Potenzreihen von der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, x^n .$$

Ich habe diese Frage durch eine direkte, einheitliche Methode behandelt, die ausschließlich von der JENSEN-NEVANLINNAschen Darstellung der Funktion Gebrauch macht und die im Wesentlichen auf einem Vergleich der durch diese Darstellung gegebenen Funktionswerte in einem Punkte x_n der gegebenen Folge und in einem anderen Punkte des Gebietes beruht. Eine ausführliche Darstellung der Methode mit einigen Anwendungen wird demnächst in meiner Arbeit „Über das Anwachsen einer analytischen Funktion in einer gegebenen Punktfolge", Ann. Acad. Scient. Fennicæ, Ser. A, T. XLVIII, erscheinen.

ÜBER ANALYTISCHE TRANSFORMATIONEN, WELCHE ZWEI PAARE VON RANDBOGEN INEINANDER ÜBERFÜHREN

Von V. PAATERO, Helsinki.

Das sog. LÖWNERsche Lemma enthält eine Aussage über die Einschränkungen der Variabilität einer im Kreise $|z| < 1$ beschränkten regulären analytischen Funktion $w(z)$, welche ein Paar von Randbogen ineinander überführt.

Es liegt nun nahe zu versuchen das LÖWNERsche Lemma für den Fall zu verallgemeinern, wo m e h r e r e Paare von zugeordneten Randbogen gegeben sind. Dies soll im folgenden für den Fall von zwei Bogenpaaren geschehen. Wir stellen uns folgende Aufgabe:

Es seien auf den Peripherien Γ_x und Γ_y von zwei Kreisen K_x und K_y je vier Punkte a_x, b_x, c_x und d_x bzw. a_y, b_y, c_y und d_y gegeben, welche in der angegebenen Reihenfolge aufeinander folgen, wenn man Γ_x bzw. Γ_y im positiven Sinn durchläuft.

Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine analytische Funktion $y = y(x)$ existiert, welche folgenden Bedingungen genügt:

1:o. *Die Funktion $y(x)$ ist innerhalb des Kreises K_x regulär und nimmt hier Werte an, welche in oder auf den Rand von K_y fallen.*

2:o. *$y(x)$ ist stetig auf den offenen Randbogen $a_x b_x$ und $c_x d_x$ von K_x und bildet diese auf die Randbogen $a_y b_y$ bzw. $c_y d_y$ von K_y ab.*

Die Kreise K_x und K_y werden zuerst durch lineare Transformationen auf die oberen Halbebenen $\mathfrak{J} z > 0$ bzw. $\mathfrak{J} w > 0$ derart abgebildet, daß die Punkte a_x, b_x und c_x bzw. a_y, b_y und c_y in $z = \infty$, $z = 0$ und $z = 1$ bzw. $w = \infty$, $w = 0$ und $w = 1$ übergehen. Es gilt dann die Existenz einer Funktion $w(z)$ zu untersuchen, welche den aus 1:o und 2:o hervorgehenden Bedingungen genügt. Durch Anwendung des Maximumprinzips der harmonischen Funktionen findet man folgendes Ergebnis[1]:

Damit eine analytische Funktion $y = y(x)$ existiert, welche den Bedingungen 1:o und 2:o genügt, ist notwendig und hinreichend, daß die Doppelverhältnisse der gegebenen Randpunkte der Beziehung $(a_x, b_x, c_x, d_x) \leqq (a_y, b_y, c_y, d_y)$ genügen.

Im Falle $(a_x, b_x, c_x, d_x) = (a_y, b_y, c_y, d_y)$ existiert eine einzige Funktion $y(x)$, welche den Bedingungen genügt, nämlich diejenige lineare Funktion, welche den Kreis K_x in K_y derart konform abbildet, daß die Punkte a_x, b_x, c_x, d_x in die Punkte a_y, b_y, c_y, d_y übergehen.

Falls wiederum $(a_x, b_x, c_x, d_x) < (a_y, b_y, c_y, d_y)$, so hat das vorgelegte Problem unendlich viele Lösungen; unter diesen gibt es unendlich viele rationale Funktionen zweiten Grades.

Die gefundene Ungleichung besagt, daß bei einer gegebenen Lage der Bogen $a_x b_x$ und $c_x d_x$ die Bildbogen $a_y b_y$ und $c_y d_y$ nicht zu weit voneinander liegen dürfen.

---

[1] Der Beweis ist vollständig in meiner Arbeit *Zur Theorie der beschränkten Funktionen* (Ann. Acad. Scient. Fenn., Ser. A, Tom. XLVI, N:o 5, 1936) ausgeführt.

A CLASS OF DIVERGENT SERIES

By R. Cooper, Belfast.

It is almost trivial, that corresponding to any conditionally convergent series Σv_n, there exists a non-convergent series Σu_n for which $u_n \sim v_n$. The solution of the non-trivial converse problem is given by the following theorem:

Let Σu_n be a non-convergent series whose terms are bounded. A necessary and sufficient condition for the existence of a convergent series Σv_n for which $v_n \sim u_n$, is that, for every sequence $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ for which the sums

$$\sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} |u_n|$$

are bounded, we should have

$$\lim_{r \to \infty} \sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} u_n = 0.$$

SUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES LIMITES DE FONCTIONS RATIONNELLES

Par Nikola Obrechkoff, Sofia.

Dans cette note je donne des théorèmes nouveaux pour les fonctions méromorphes qui sont limites uniformes des fonctions rationnelles sur les pôles desquels seulement on fait des hypothèses convenables.

I. Supposons que la suite des fonctions rationnelles

$$R_n(z) = P_n(z) + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{s=1}^{\lambda} \frac{A_{n\nu}^{(s)}}{(z-\alpha_{n\nu})^s},$$

où $P_n(z)$ sont de polynomes de dégré $\leqq q$, tende uniformément vers la fonction méromorphe $R(z)$, dont le point $z=0$ est régulier. Supposons encore que l'on ait uniformément pour un $k \geqq 0$,

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{A_{n\nu}^{(s)}}{\alpha_{n\nu}^{s+k}} \right| < M.$$

Alors la fonction $R(z)$ a la forme suivante

$$R(z)=P(z)+\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(s)}\left[\frac{1}{(z-a_n)^s}+(-1)^{s-1}\sum_{g=0}^{m-1}\binom{s-1+g}{g}\frac{z^g}{a_n^{s+g}}\right],$$

où $P(z)$ est un polynome de dégre max. $(q,[k])$ et $m=k$ si k est un nombre entier, $m=[k]+1$ dans les autres cas. La série $\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{A_n^{(s)}}{a_n^{s+k}}\right|$ est convergente. Cette condition pour $R(z)$ est aussi suffisante.

Dans l'énoncé on peut supposer que la convergence est seulement uniforme dans le plan ouvert en enlevant les points des cercles décrits autour les pôles a_n avec des rayons arbitrairement petits.

II. Supposons que la suite de fonctions rationnelles

$$R_n(z)=\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_{n\nu}^{(s)}}{(z-a_{n\nu})^s},$$

où $A_{n\nu}^{(s)}$ sont réels, $(-1)^{s-1}A_{n\nu}^{(s)}\geqq 0$, $|\arg a_{n\nu}|\leqq\theta<\frac{\pi}{2\lambda}$, tende vers la fonction méromorphe $R(z)$. Alors $R(z)$ a la forme

$$R(z)=-\delta+\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A_\mu^{(s)}}{(z-a_\mu)^s},$$

où $(-1)^{s-1}A_\mu^{(s)}\geqq 0$, $|\arg a_\mu|\leqq\theta$, $|\arg\delta|\leqq\lambda\theta$, et la série $\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\frac{A_\mu^{(s)}}{a_\mu^s}\right|$ est convergente. Cette condition pour $R(z)$ est aussi suffisante.

III. Supposons que la suite

$$R_n(z)=\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{(a_{n\mu}-z)^s},$$

où $A_{n\mu}^{(s)}\geqq 0$, $|\arg a_{n\mu}|\leqq\frac{\pi}{2\lambda}$, tende vers la fonction méromorphe $R(z)$ dont le point $z=0$ est régulier. Alors $R(z)$ a la forme

$$R(z)=\gamma z+\delta+\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu^{(s)}\left[\frac{1}{(a_\mu-z)^s}-\frac{1}{a_\mu^s}\right],$$

où l'on a: $A_\mu^{(s)}\geqq 0$, $|\arg a_\mu|\leqq\frac{\pi}{2\lambda}$, γ un nombre réel $\leqq 0$,

$$R(\delta) \geqq R \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_{\mu}^{(s)}}{\alpha_{\mu}^{s}}$$

et la série $\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \frac{A_{\mu}^{(s)}}{\alpha_{\mu}^{s+1}} \right|$ est convergente.

On démontre aussi des théorèmes semblable dans des autres cas pour $A_{n\mu}^{(s)}$.

DER KONTINUITÄTSSATZ UND DIE REGULÄRKONVEXITÄT

Von H. Behnke, Münster (Westf.).

Unsere Kenntnisse über die Singularitäten der analytischen Funktionen $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ gründeten sich bis vor kurzem fast ausschließlich auf den Kontinuitätssatz. Im einfachsten Falle (er wurde von Hartogs schon angegeben) lautet dieser Satz: „Ist eine Funktion $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ auf dem Kreisrande $\mathfrak{R}$: $|z_1| = 1$ der Ebene $z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0$ regulär und bei Fortsetzung auf $\mathfrak{R}$ eindeutig, treten dagegen im Innern des Kreises Singularitäten auf, so gilt gleiches bei genügend kleiner Wahl von $\delta > 0$ für den Kreis $|z_1| \leqq 1$ auf allen Ebenen $z_2 = z_2^0, \cdots, z_n = z_n^0$, $|z_i - z_i^0| < \delta$, $i = 2, \cdots, n$.[1]

Die drei wichtigsten Folgerungen aus dieser Aussage sind:

1. Der Satz von Osgood: Ist die Funktion $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ in sämtlichen Randpunkten eines schlichten, endlichen Bereiches $\mathfrak{B}$ mit zusammenhängendem Rande regulär, so läßt sich f in jeden inneren Punkt von $\mathfrak{B}$ hinein analytisch fortsetzen.

2. Der Satz von Hartogs über die isoliert liegenden Mannigfaltigkeiten singulärer Punkte der Dimension $(2n-2)$. (Isolierte singuläre Mannigfaltigkeiten niederer Dimension gibt es nicht.)

3. Die notwendigen und im kleinen auch hinreichenden Bedingungen von E. E. Levi, damit ein $(2n-1)$-dimensionales Flächenstück von einer vorgegebenen Seite her natürliche Grenze einer analytischen Funktion ist.

Wegen des grundlegenden Charakters dieser Folgerungen ist von den einzelnen Forschern immer wieder die Aufmerksamkeit auf den Kontinuitätssatz gelenkt worden. Auch war man bemüht, die Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes abzuschwächen. Doch sind in allen bisher bekannten For-

[1] F. Hartogs, Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funkt. mehr. Ver. Münch. Ber. Bd. 36 (1906).

mulierungen die Schnitte durch die Singularitätenmannigfaltigkeiten, die in Voraussetzung und Behauptung auftreten, stets analytische Ebenen. Der Kontinuitätssats muß aber zu einer Aussage ausgedehnt werden können, die invariant gegenüber analytischen Abbildungen ist, in der also die analytischen Ebenen vor den übrigen analytischen Flächen nicht mehr ausgezeichnet sind. Welche Vorteile wir aus einer solchen Verallgemeinerung des Kontinuitätssatzes ziehen können, werden wir sogleich sehen.

Durch die neuen Untersuchungen[1] über die Regularitätsbereiche ist ein weiterer Zugang zur Erforschung der Singularitäten aufgezeigt, dessen wir uns hier bedienen wollen. Ein Bereich $\mathfrak{B}$ über dem Raume der $z_1, z_2, \cdots, z_n$ heißt bekanntlich ein Regularitätsbereich, wenn es zu $\mathfrak{B}$ eine Funktion f gibt, sodaß $\mathfrak{B}$ genau die Gesamtheit der regulären Punkte von f ausmacht.[2] Das fundamentale Kriterium für Regularitätsbereiche lautet nun: $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann Regularitätsbereich, wenn er regulär-konvex ist.[3] Mittels dieser Charakterisierung der Regularitätsbereiche gelingt es auch, die singulären Stellen einer Funktion f als die Randpunkte des Regularitätsbereiches von f zu erfassen und so — wie an andrer Stelle gezeigt wird[4] — die gewünschte Verallgemeinerung des Kontinuitätssatzes abzuleiten. Dieser Satz lautet:

$\mathfrak{F}$, sowie $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \cdots$ mit den Rändern C bezw. $C_1, C_2, \cdots$ seien abgeschlossene Teile analytischer Flächenstücke ν-ter Dimension. Die $\mathfrak{F}_m$ mögen gegen $\mathfrak{F}$ konvergieren. $g(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ sei regulär auf C und bleibe bei jeder Fortsetzung innerhalb einer gewissen Nachbarschaft von $\mathfrak{F}$ eindeutig. Weist nun g mindestens eine Singularität auf $\mathfrak{F}$ auf, so gibt es ein m_0, sodaß gleiches für die $\mathfrak{F}_m$, $m > m_0$, gilt.

Mit Hilfe dieser Aussage gelingt es, den Satz von Osgood zu vervollständigen. Die in ihm auftretenden Voraussetzungen schlicht und beschränkt können nicht wesentlich sein, denn für alle nicht schlichten und nicht beschränkten Bilder gilt die Aussage des Satzes notwendigerweise auch wieder. Andrerseits kann sie nicht für alle Bereiche gelten. Beispielsweise ist die Aussage des Osgoodschen Satzes sicher falsch für den Bereich, den man erhält, wenn man aus dem abgeschlossenen (w, z)-Raum eine vierdimensionale Kugel herausschneidet. (Anderenfalls würde ja unmittelbar folgen, daß eine Funktion $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, die an irgend einer Stelle regulär

[1] Ausführliche Literaturangabe siehe H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg. d. Math. u. ihr. Grenzg. Bd. 3; abgekürzt: B.-T.-Bericht.

[2] B.-T.-Bericht, S. 16.

[3] B.-T.-Bericht, S. 72.

[4] H. Behnke, Der Kontinuitätssatz und die Regulärkonvexität, Math. Ann. *113* (1936).

st, gleiches Verhalten überall zeigt.) In einer von mir angeregten Arbeit[1] hat nun Herr F. Sommer mit Hilfe des soeben angegebenen verallgemeinerten Kontinuitätssatzes die Bereiche angegeben, auf die noch der Osgoodsche Satz übertragen werden kann, und sich auch mit jenen beschäftigt, für die er falsch wird. So findet er, daß sich der Osgoodsche Satz zu folgender Aussage ausdehnen läßt: *Der Bereich* $\mathfrak{B}$ *habe einen zusammenhängenden Rand und sei Teilbereich eines Regularitätsbereiches, der nicht der abgeschlossene Raum ist. Ist dann die Funktion* $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ *in allen Randpunkten von* $\mathfrak{B}$ *regulär und bleibt sie bei Fortsetzung auf dem Rande eindeutig, so läßt sich* $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ *überall ins Innere von* $\mathfrak{B}$ *regulär und eindeutig fortsetzen.* Die Bereiche, die den abgeschlossenen Raum als Hülle haben, werden sodann weiter untersucht. Sicher gibt es unter ihnen solche, auf die der Satz noch übertragbar ist, z. B. den abgeschlossenen Raum der z_1, z_2, z_3 nach Herausnahme der zu einander windschiefen zweidimensionalen Ebenen $z_1 = z_2 = 0$ und $z_1 = 1$, $z_3 = 0$. Ebenso gibt es jedoch Bereiche, für die er falsch wird, z. B. $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 > 1$.

Gehen wir jetzt noch einmal auf den einfachsten Fall des Osgoodschen Satses zurück! Ist $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ auf dem Rande einer $2n$-dimensionalen Hyperkugel $\mathfrak{H}$ regulär, so ist f auch im Innern von $\mathfrak{H}$ regulär. Setzen wir die Regularität von f nur auf $\mathfrak{H}$ mit Ausnahme eines kleinen Stückes voraus, so drängt sich nun die Frage auf, ob f jetzt auch noch in einem $2n$-dimensionalen Bereich $\mathfrak{B}$ regulär sein muß, der nicht von f, sondern nur von dem restlichen Stück der Hyperkugeloberfläche abhängt, oder ob diese Erscheinung jetzt nicht mehr zutrifft. Allgemeiner gesprochen: Hängt die Aussage des Osgoodschen Satzes davon ab, daß die Regularität der Funktion auf einer Mannigfaltigkeit vorausgesetzt wird, die einen $2n$-dimensionalen Bereich umschließt? Herr K. Stein[2] hat diese letzte Frage eindeutig mit Nein (und damit auch die vorhergehende Frage) beantworten können. Jedes differentierbare Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$ (Mannigfaltigkeit $(2n-1)$-ter Dimension), das nicht analytisch ist, hat schon die Eigenschaft daß zu ihm ein $2n$-dimensionaler Bereich existiert, in dem alle auf $\mathfrak{H}$ regulären Funktionen auch noch regulär sind. Auch $(2n-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten gibt es, die $2n$-dimensionale Regularitätshüllen haben. So gilt der Satz: *Ist* $f(z_1, z_2)$ *auf den 2-dimensionalen Kanten eines 4-dimensionalen Simplexes regulär, so weist* f *im ganzen Simplex gleiches Verhalten auf.* Diesen Satz kann man zugleich auch als eine Aussage über die topologische Beschaffenheit der Regularitätsbereiche aussprechen.: *Wenn die 2-dimensionalen Kanten*

---

[1] F. Sommer, Bereiche ohne geschlossene innere Singularitätenmannigfaltigkeiten. Dissertation Münster 1936, erscheint in den Math. Ann.

[2] K. Stein, Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Dissertation Münster 1936, erscheint in den Math. Ann.

eines Simplexes im Innern eines Regularitätsbereiches enthalten sind, so ist es der ganze Simplex. Ebenso sind natürlich der Osgoodsche Satz sowie seine Erweiterungen als topologische Aussagen anzusprechen. Trotzdem ist bis heute die vollständige topologische Charakterisierung der Regularitätsbereiche noch nicht gelungen.

THE HIGHER SINGULARITIES OF ALGEBRAIC CURVES

B. M. WALKER, Starkville, U. S. A.

The theory of the singularities of algebraic curves is classed among the celebrated problems in the domain of mathematics. The relative importance dates from the time of EULER and CRAMER. PLÜCKER is due the credit of having made the first systematic study.

NOETHER demonstrated "Every irreducible algebraic curve can be transformed by a birational transformation *of the plane* (a so-called CREMONA transformation) into a curve, which has *no other singular points than ordinary multiple points*". HALPHEN enunciated "Every irreducible algebraic curve can be transformed by a birational transformation *of the curve* (a so-called RIEMANN transformation) into another curve, which has *no other singular points than ordinary double points*".

Three essentially different methods have been employed by mathematicians for the final proof:

1. PICARD uses a quadratic one-to-three transformation of the plane.
2. BERTINI uses, for the same purpose, a cubic one-to-two transformation of the plane.
3. POINCARÉ transforms the plane curve into a twisted curve in space of higher dimensions which has no singular points and then shows that this curve may be projected into a plane curve with no other singular points than ordinary double points.

Under the title "On the Resolution of Higher Singularities of Algebraic Curves into Ordinary Nodes", I have given a new proof with a geometric back-ground in ordinary spaces of two and three dimensions, as follows:

Given an irreducible algebraic curve K, in a plane Π, with r ordinary multiple points, $A_1, \cdots, A_r$. Selected six points, fundamental points of the transformation, so that *no three lie on a straight line. All cubics through the six points form,* **without exception**, *a triply infinite system.* Chose one fundamental point to coincide with A_1, to be resolved, the other five external to K. Imposed a condition *all six must not lie on a conic.* Obtained a one-to-one correspondence between K and its image K' on the cubic surface.

Projected K' from a point O of the surface upon a second plane Π'. Imposed upon O, the condition *not to lie on certain curves*; obtained a one-to-one correspondence between the curve K' and its image K'' in the plane Π'. K'' has $r-1$ ordinary multiple points, $A_2'', \cdots, A_r''$, of the same respective multiplicities as $A_2, \cdots, A_r$; a finite number of new double points with linear cycles and distinct tangents; but, no other singularities.

Apply to the curve K'' and the multiple point A_2'' the same process, repeating as necessary, combining with **Noether's Theorem**; we obtain the solution of **Halphen's Theorem.**

SUR LES CLASSES QUASIANALYTIQUES DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

Par SVEN TÄCKLIND, Uppsala.

Le problème classique sur le refroidissement de la barre infinie et homogène peut être énoncé comme suit: *Déterminer une solution $z(x,y)$ de l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

définie au dessus de l'axe $y=0$, et qui sur cette droite se réduise a une fonction continue donnée $f(x)$. Si $|f(x)| < M e^{Lx^2}$, M et L étant des constantes, la solution du problème est représentée par l'intégrale de Poisson:

$$z(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}}}{\sqrt{y}} d\xi.$$

Comme l'ont démontré plusieurs auteurs, la solution est unique dans la condition $|z(x,y)| < M e^{Lx^2}$. M. Holmgren a démontré que la solution est unique dans la condition plus large $|z(x,y)| < M e^{Lx^2 \log(1+|x|)}$. Dans ma thèse pour le doctorat j'ai généralisé ce résultat de M. Holmgren[1].

Supposons que $h(r)$ soit une fonction positive, définie pour $r > 1$. Nous désignerons par $C_{h(r)}$ ou C_h l'ensemble des solutions de (1) qui sont

[1] S. Täcklind, Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique, (Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsal., Ser. IV, Vol. 10, N:o 3, 1936.)

régulières dans toute partie finie de la bande $0<y<Y$, et qui vérifient une inégalite de la forme

$$|z(x,y)|<e^{k|x|h(|x|)} \text{ dans } |x|>1,\ 0<y<Y,$$

ou k est une constante dépendant seulement de $z(x,y)$. Nous dirons que la classe C_h est quasianalytique, si une solution, qui appartient à C_h, est complètement déterminée dans toute la bande par les valeurs qu'elle prend sur l'axe $y=0$. J'ai traité les problèmes suivants:

1° *Déterminer la condition nécessaire et suffisante que doit remplir $h(r)$, pour que la classe C_h soit quasianalytique.*

2° *Déterminer la condition que doit remplir une fonction continue $f(x)$, pour qu'il existe une solution, appartenant à la classe quasianalytique C_h, et qui sur l'axe $y=0$ se réduise à $f(x)$, et calculer la solution au moyen de $f(x)$.*

La solution du premier problème est contenue dans le théorème:

Pour que la classe C_h soit quasianalytique il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{dr}{\bar{h}(r)}$$

soit divergente, $\bar{h}(r)$ étant la plus grande minorante non décroissante de $h(r)$.

J'ai démontré ce théorème en m'appuyant sur le théorème de M. Carleman sur les fonctions quasianalytiques indéfiniment dérivables d'une variable réelle. Cependant, j'ai démontré la suffisance de la condition du théorème sans avoir recours à des moyens étrangers à la théorie de l'équation de la chaleur, mais seulement par l'emploi du principe du maximum pour les solutions de (1). La méthode employée fournit un procédé pour résoudre le second probleme. Je forme pour toute classe quasianalytique C_h une fonctionelle, plus générale que l'intégrale de Poisson, et qui approche autant qu'on veut toute solution appartenant à C_h.

FAMILLES COMPACTES DE FONCTIONS DANS LES CLASSES QUASI-ANALYTIQUES (D)

Par M. Paul Flamant, Strasbourg.

J'ai indiqué antérieurement[1] le mode de convergence le plus naturel à considérer dans une classe quasi-analytique (D). Soit $\|\varphi\|_s$ la borne supérieure de $|\varphi^{(r)}(x)|/A_r s^r$, la fonction appartient au type s de la classe $\{A_r\}$ si cette borne supérieure est finie; cette norme conduit à la convergence

[1] Comptes rendus Académie des Sciences, tome 197, Paris 1933, page 1282.

considérée dans le type s. Une famille compacte du type s est une famille dont les fonctions appartiennent à tout type supérieur et où toute suite admet une suite partielle convergente dans ces types. Les propriétés de ces familles sont très analogues à celles des familles normales des fonctions holomorphes à éléments d'accumulation finis. A cause de l'intérêt des familles normales où ∞ est élément d'accumulation, j'ai cherché à définir la convergence vers ∞ dans les classes quasi-analytiques.

J'ai dû introduire les expressions suivantes: fonction réduite d'une fonction donnée

$$\varphi^*(x)=\varphi(x)-\frac{1}{2}(\min\varphi+\max\varphi)$$

fluctuation d'une fonction de signe constant

$$fl(\varphi,s)=1-\frac{A_0\|\varphi^*\|_s}{\min|\varphi|}$$

$$z(\varphi;s,k)=\min|\varphi|-\frac{A_0\|\varphi^*\|_s}{k-1}=\frac{[k-fl(\varphi,s)]\min|\varphi|}{k-1}.$$

Pour les puissances négatives des fonctions de signe constant, j'ai établi les inégalités

$$\left\|\frac{1}{\varphi^p}\right\|_{ks}\leqq\frac{1}{A_0z^p(\varphi;s,k)}\qquad\left\|\frac{1}{\varphi^p\psi^q}\right\|_{ks}\leqq\frac{1}{A_0z^p(\varphi;s,k)z^q(\psi;s,k)}.$$

Si $z(\varphi;s,k)$ tend vers $+\infty$, les puissances négatives de φ tendent vers 0 dans le type ks, ce qui conduit à la définition suivante: $\min|\varphi_n|$ tendant vers $+\infty$, nous dirons que φ_n tend vers ∞ en norme (s) si les $fl(\varphi_n,s)$ sont bornées supérieurement; quel que soit $k>\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}fl(\varphi_n,s)$, $1/\varphi_n$ tend vers 0 en norme (ks). Cette convergence sera dite faible ou forte suivant que cette limite supérieure est supérieure ou égale à 1.

Le convergence faible vers ∞ est analogue à la convergence vers une fonction finie non constante; la convergence forte est analogue à la convergence vers une constante finie.

A cette définition correspond une compacité généralisée. Toute famille compacte du type s est la réunion des deux sous-familles bornées l'une en norme, l'autre en fluctuation dans tout type superieur à s.

Sauf pour la convergence vers ∞, les propriétés des suites sont les mêmes que pour les familles compactes primitivement définies. D'autre part, dans toute famille compacte ne contenant pas de constante, n'en admettant pas parmi ses éléments d'accumulation et où la convergence vers ∞ est faible, les fonctions ont une certaine égalité de propriétés: ordre de multivalence borné, oscillation bornée inférieurement.

THEORY OF AN INFINITE SYSTEM OF NON-LINEAR INTEGRAL EQUATIONS

By M. RAZIUDDIN SIDDIQI, Hyderabad.

We investigate the existence and uniqueness of the solution of the infinite system of non-linear integral equations:

$$\text{(I)} \qquad u_n(x) = f_n(x) + \int_0^x g_n(x,y) \sum_{k,\,l}^{1\ldots\infty} h_n(k,l;y)\, u_k(y)\, u_l(y)\, dy, \quad (n = 1, 2, \cdots, \infty).$$

f_n, g_n, h_n are given functions, and their character determines whether a solution exists for all values of x, or only for a finite range. Thus there arise two cases, according as there exists a solution only in a restricted domain, or in the unrestricted domain.

If f_n, g_n, h_n satisfy the following conditions:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h_n(k,l;x)| \leqq A, \quad |g_n(x,y)| \leqq B, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leqq C$$

for all x, y, in $0 \leqq y \leqq x \leqq T$, and all k, l, $n > 1$, then we can show that one and only one solution of the system (I) exists, provided:

$$T < \min\left(\frac{1}{8AB}, \frac{1}{4ABC^2}, \frac{1}{2AB(C+1)}\right).$$

The solution is obtained by the following successive approximations, which are proved to be convergent. Let

$$\omega_n^{(0)}(x) = 0, \text{ and for all } m \geqq 1:$$

$$w_n^{(m)}(x) = \int_0^x g_n(x,y) \sum_{k,\,l}^{1\ldots\infty} h_n(k,l;y) \left\{f_k(y) + w_k^{(m-1)}(y)\right\} \left\{f_l(y) + w_l^{(m-1)}(y)\right\} dy;$$

and let

$$w_n(x) = \lim_{m \to \infty} w_n^{(m)}(x).$$

The solution of the system (I) is then given by:

$$u_n(x) = f_n(x) + w_n(x), \quad (n = 1, 2, \cdots, \infty).$$

But if f_n, g_n, h_n, are such that:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^x g_n(x,y)\, h_n(k,l;y)\, dy \right| \leqq A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leqq C,$$

for all values of $x \geqq 0$ and all k, $l \geqq 1$, then there exists one and only one solution of the system (I) for all values of x, and this is given by the following successive approximations:

$$u_n^{(0)}(x) = 0, \quad \text{and for all } m \geqq 1:$$

$$u_n^{(m)}(x) = f_n(x) + \int_0^x g_n(x,y) \sum_{k,\,l}^{1\dots\infty} h_n(k,l;y)\, u_k^{(m-1)}(y)\, u_l^{(m-1)}(y)\, dy.$$

The solution is provided by the following limit-functions which are proved to exist, and to be unique:

$$u_n(x) = \lim_{m \to \infty} u_n^{(m)}(x), \quad (n = 1, 2 \cdots, \infty).$$

Such systems of integral equations are fundamental in the theory of non-linear partial differential equations of parabolic and hyperbolic types:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{p(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right\} - \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_r p_r(x,t)\, u^r,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{p(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right\} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_r p_r(x,t)\, u^r.$$

These have been considered by the present writer in various papers, of which the following may be mentioned: Math. Zeitschrift, vol. 35 (1932); ibid, vol. 40 (1935); Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 31 (1935).

These considerations are based on the following theorem: Let $\lambda_n (n = 1, 2, \cdots)$ be the Sturm-Liouville eigen-values, $\Phi_n(x)$ the corresponding eigen-functions, and let

$$y = \Phi_{k_1}(x)\Phi_{k_2}(x)\cdots\Phi_{k_s}(x), \quad f_n = \int_0^{\pi} y\, \Phi_n(x)\, dx,$$

where k_1, k_2, k_s and s can take all positive integral values. Then for any positive integral r, and for all k_1, k_2, $k_s \geqq 1$, the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{r-\frac{1}{2}} |f_n|}{(\lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \cdots \lambda_{k_s})^r}$$

is uniformly convergent.

ON THE UNIFORMISATION OF HYPERELLIPTIC CURVES

By M. Mursi Ahmed, Le Caire.

If the two variables s and z are connected by the relation

$$s^2 = 1 + z^3 \tag{1}$$

then it is known that s and z are uniform (elliptic) functions of a third variable t, called the uniformising variable and given by

$$t = \int^{z} \frac{dz}{\sqrt{1+z^3}}.$$

I propose to extend this theory to the hyperelliptic curve,

$$s^2 = 1 + z^{2n+1} \equiv f(z) \tag{2}$$

of genus n.

The uniformising variable t of the curve (2) is the quotient of two solutions of the equation

$$\frac{d^2 y}{d z^2} + \psi(z) = 0 \tag{3}$$

where

$$\psi(z) = \frac{3}{16}\left[\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2 - \frac{2n+2}{2n+1}\frac{f''(z)}{f(z)}\right].$$ [1]

Thus if $Y(z)$ and $y(z)$ are two independent solutions of (3), t is given by

$$t = \frac{Y(z)}{y(z)} = c\int^{z} \frac{dz}{\{y(z)\}^2}$$

as can be deduced easily from (3). Now using the transformations

$$y = \{f(z)\}^{\frac{1}{4}} u(z),\ s^2 = 1 + z^{2n+1} \equiv f(z), \text{ and } s = 2x - 1,$$

equation (3) reduces to the hypergeometric equation

$$x(x-1)\frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{2n}{2n+1}(2x-1)\frac{du}{dx} + \frac{n(n-1)}{(2n+1)^2}u = 0$$

a solution of which (valid near $x=0$) being

$$u = F\left(\frac{n-1}{2n+1}, \frac{n}{2n+1}; \frac{2n}{2n+1}; x\right).$$ [2]

---

[1] E. T. Whittaker, Journal London Math. Soc. 4 (1929), 274. Also J. M. Whittaker, Journal London Math. Soc. 5 (1930), 150.

[2] M. Mursi, Proc. Edinburgh. Math. Soc. (2), (1930—1931) 101.

Hence a solution of the original equation is

$$y(z) = \{f(z)\}^{\frac{1}{4}} F\left(\frac{n-1}{4n+2}, \frac{n}{4n+2}; \frac{1}{2}; 1+z^{2n+1}\right),$$

and thus (3) becomes

$$t = \int^{z} \frac{dz}{F^2\left(\frac{n-1}{4n+2}-, -\frac{n}{4n+2}; \frac{1}{2}; 1+z^{2n+1}\right)\sqrt{1+z^{2n+1}}} \tag{4}$$

and the uniformising functions are obtained by inverting this integral.

SUR L'IRRÉDUCTIBILITÉ DE CERTAINES INTÉGRALES ABÉLIENNES AUX TRANSCENDANTES ÉLÉMENTAIRES

Par M. l'Abbé Potron, Paris.

Soit y une fonction algébrique de x. Si $\int y\,dx$ était réductible aux transcendantes élémentaires, cette fonction aurait, d'après un théorème de Liouville (*Crelle*, t. 13, 1835), la forme

$$\int y\,dx = R_0(x,y) + \sum_1^k a_i R_i(x,y), \tag{1}$$

les R_i étant des fonctions rationnelles, et les a_i des constantes entre lesquelles (hypothèse H_1) n'existe aucune relation $\Sigma m_i a_i = 0$, à coefficients entiers non tous nuls.

Si les périodes cycliques de $\int y\,dx$ ne sont pas toutes nulles (hypothèse H_2), les a_i vérifiant l'hypothèse H_1 ne peuvent être tous nuls. On sait de plus que, au voisinage de tout point de la surface de Riemann, on peut développer y et $y\frac{dx}{dt}$ suivant les puissances entières croissantes de $t=(x-a)^{1/h}$ ou $x^{-1/h}$, h entier $\geqq 1$. Si l'intégrale n'est pas de 3-ème espèce, le développement de $y\frac{dx}{dt}$ n'a aucun terme en $\frac{1}{t}$, et celui de $\int y\,dx$ aucun terme en Log t.

D'autre part, les fonctions $R_i(x,y)$ ont des zéros et des pôles. Si, au voisinage d'un tel point, on remplace x par $a+t^h$ et y par le développement indiqué, on obtient, pour le second membre de (1), un développement où le terme en Log t a le coefficient $\Sigma a_i m_i$, les m_i entiers non tous nuls. Si les hypothèses H_1 et H_2 sont vérifiées, ce coefficient ne peut être nul. Il est donc impossible qu'une intégrale abélienne de 1-ère ou 2-ème espèce, dont les périodes cycliques ne sont pas toutes nulles, puisse vérifier la formule (1).

Si, par exemple, $y\,dx$ est une « différentielle binome «, on peut montrer, au moyen des développements indiqués ci-dessus, que, en dehors des trois cas ordinaires d'intégrabilité, $\int y\,dx$ est une intégrale de 1-ère ou 2-ème espèce, et l'on voit qu'elle n'est pas uniforme sur la surface de Riemann (POTRON, Communication faite à la Soc. Math. de France le 11 avril 1934, *Compte-Rendu des Séances*, p. 36; SEGRE, *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, t. 19, 1934, p. 279). Mais, pour en conclure l'irréductibilité aux transcendantes élémentaires, il semble nécessaire de faire intervenir le théorème de Liouville (POTRON, Sur l'intégrale de Différentielle binôme, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, cahier 33, p. 161, tirés à part chez Gauthier-Villars).

ÜBER DIE LÖSUNG ALGEBRAISCHER GLEICHUNGSSYSTEME DURCH HYPERGEOMETRISCHE FUNKTIONEN

Von KARL MAYR, Graz.

Über die Lösung einer algebraischen Gleichung mit Hilfe von hypergeometrischen Funktionen, als deren Veränderliche die Gleichungskoeffizienten auftreten, liegen schon eingehende Untersuchungen vor, u. a. von Birkeland, Capelli, Belardinelli, Heymann, Mellin. Es wird darin gezeigt, daß sich jede ganzzahlige Potenz einer gewissen Hauptlösung durch Potenzreihen in den Gleichungskoeffizienten ausdrücken läßt. Aus einer Eigenschaft der Koeffizienten folgt, daß diese Potenzreihen hypergeometrische Funktionen darstellen und man kann das System der Differentialgleichungen angeben, das diese Funktionen als Lösungen besitzt.

Die Methode, über die ich hier berichte, geht einen umgekehrten Weg, indem sie das System der Differentialgleichungen an die Spitze stellt, das sich unmittelbar aus der algebraischen Gleichung gewinnen läßt. Diese Methode läßt sich auch auf Systeme algebraischer Gleichungen übertragen.

Handelt es sich um eine Gleichung mit einer Unbekannten in der Form $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$, so ergibt sich das Differentialgleichungssystem, von dem ich ausgehe, aus folgenden Differentialrelationen:

$$\frac{\partial^n (x^k)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k \cdots \partial \lambda_r} = \frac{\partial^n (x^k)}{\partial \lambda_{i'} \partial \lambda_{k'} \cdots \partial \lambda_{r'}} \quad (i + k + \cdots + r = i' + k' + \cdots + r').$$

Da sich x^k als Funktion von $n-1$ Veränderlichen darstellen läßt, etwa in der Form

$$x^k = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_n}\right)^{\frac{k}{n}} \varphi \left\{ \frac{\lambda_1 \lambda_0^{\frac{1}{n}-1}}{\lambda_n^{\frac{1}{n}}}, \frac{\lambda_2 \lambda_0^{\frac{2}{n}-1}}{\lambda_n^{\frac{2}{n}}}, \ldots \frac{\lambda_{n-1} \lambda_0^{\frac{n-1}{n}-1}}{\lambda_n^{\frac{n-1}{n}}} \right\},$$

so erhält man auf Grund der erwähnten Differentialrelationen für φ ein System von $n-1$ Differentialgleichungen, das integrierbar ist. Die Lösungen sind hypergeometrische Funktionen.

Liegt ein System von 2 Gleichungen vor in der Form

$$\lambda x = \lambda_0 + \lambda_1 y + \lambda_2 y^2 + \cdots + \lambda_n y^n,$$

$$\mu y = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots + \mu_m x^m,$$

so läßt sich x (bzw. y) als Funktion von $n+m$ Veränderlichen darstellen und man erhält aus den bestehenden Differentialrelationen ein System von ebensovielen Differentialgleichungen. Im Falle $n=m=2$ ergibt die Rechnung, daß sich die in der Umgebung von $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ konvergente Lösung nach den Appellschen Funktionen F_1 entwickeln läßt.

Hat das algebraische System die Form

$$\lambda x^n = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 y,$$

$$\mu y^m = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_1 y,$$

so entspricht dem ein System von 4 Differentialgleichungen, von denen 2 zweiter, eine n-ter und eine m-ter Ordnung ist. Für das System

$$\lambda x = \lambda_{00} + \lambda_{20} x^2 + \lambda_{11} xy + \lambda_{02} y^2,$$

$$\mu y = \mu_{00} + \mu_{20} x^2 + \mu_{11} xy + \mu_{02} y^2$$

läßt sich ein System von 6 Differentialgleichungen 2-ter Ordnung angeben. Die Frage, welches Differentialgleichungssystem einem beliebigem algebraischem System $\varphi(x,y) = 0$, $\psi(x,y) = 0$ entspricht, ist offen.

Es ist oft zweckmäßig, die Lösung einer Gleichung auf die Lösung eines Systems zurückzuführen. Setzt man in der Gleichung

$$\lambda x^2 = (\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2)(\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2)^{1}$$

---

[1] Die Gleichung spielt eine Rolle in der Theorie der Schwingungen. Für $\lambda^2 = \lambda_1 = \mu_1$ ist sie nämlich die charakteristische Gleichung des Differentialgleichungssystems der gekoppelten Schwingung zweier Kreisscheiben, die durch Reibung miteinander verbunden sind.

$y = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2$, so erhält man das System

$$\lambda x^2 = y(\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2),$$
$$y = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2,$$

dem ein System von 4 Differentialgleichungen 2-ter Ordnung entspricht. Die Integration zeigt, daß sich x nach den Appellschen Funktionen F_4 entwickeln läßt.[1]

UNE GÉNÉRALISATION DES POLYNOMES DE GEGENBAUER

Par M. Jacques Devisme, Tours.

Considérons les polynomes définis par la fonction génératrice

$$V = [1 - x^m + (x-h)^m]^{-\nu} = \sum h^n {}_m C_n^\nu (x) \tag{1}$$

En dérivant par rapport à h ou x suivant le procédé classique, on obtient

$$\left[1 - m h x^{m-1} + \cdots + (-1)^p \binom{m}{p} h^p x^{m-p} + \cdots + (-1)^m h^m\right] \frac{\partial V}{\partial h} \tag{2}$$
$$= m\nu \left[x^{m-1} + \cdots + (-1)^p \binom{m-1}{p} h^p x^{m-p-1} + \cdots + (-1)^{m-1} h^{m-1}\right] V,$$

$$\left[(m-1) h x^{m-2} + \cdots + (-1)^p \binom{m-1}{p} h^p x^{m-p-1} + \cdots \right. \tag{3}$$
$$\left. + (-1)^{m-1} h^{m-1}\right] \frac{\partial V}{\partial h} = \left[x^{m-1} + \cdots + (-1)^p \binom{m-1}{p} h^p x^{m-p-1} \right.$$
$$\left. + \cdots + (-1)^{m-1} h^{m-1}\right] \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Identifions les termes en h^n et écrivons C_n^ν à la place de ${}_m C_n^\nu$ pour simplifier l'écriture; on a les deux formules

$$(n+1) C_{n+1}^\nu - m(n+\nu) x^{m-1} C_n^\nu + \cdots +$$
$$(-1)^p \binom{m}{p} (n-p+1+p\nu) x^{m-p} C_{n-p+1}^\nu + \cdots + \tag{4}$$
$$(-1)^m (n-m+1+m\nu) C_{n-m+1}^\nu = 0,$$

[1] Eine ausführliche Darstellung dieser Untersuchungen erscheint in den Monatsheften für Mathematik und Physik.

$$x^{m-1}\frac{dC_n^\nu}{dx}-(m-1)x^{m-2}\frac{dC_{n-1}^\nu}{dx}+\cdots+(-1)^p\binom{m-1}{p}x^{m-p-1}\frac{dC_{n-p}^\nu}{dx}$$

$$+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{dC_{n-m+1}^\nu}{dx}(m-1)\,n\,x^{m-2}C_n^\nu$$

$$(5)\qquad +\cdots+(-1)^p\binom{m-1}{p}(n-p+1)\,x^{m-p+1}\,C_{n-p+1}^\nu$$

$$+\cdots+(-1)^m(n-m+2)\,C_{n-m+2}^\nu=0.$$

Eliminons $\frac{dC_{n-m+1}^\nu}{dx}$ entre (5) et la dérivée de (4); il vient après division par $n+1$

$$\frac{dC_{n+1}^\nu}{dx}-(m-1)\,x^{m-1}\frac{dC_n^\nu}{dx}+\cdots+(-1)^p\binom{m-1}{p}x^{m-p}\frac{dC_{n-p+1}^\nu}{dx}$$

$$(6)\qquad +\cdots+(-1)^{m-1}x\frac{dC_{n-m+2}^\nu}{dx}-(m-1)(m+\nu)\,x^{m-2}\,C_n^\nu$$

$$+\cdots+(-1)^p\binom{m-1}{p}(n-p+1+m\nu)\,x^{m-p-1}\,C_{n-p+1}^\nu$$

$$+\cdots+(-1)^m(n-m+2+m\nu)\,C_{n-m+2}^\nu=0.$$

Soit (5′) déduit de (5) par le changement de n en $n+1$; éliminons $\frac{dC_{n-m+2}^\nu}{dx}$ entre (6) et (5′)

$$(x^m-1)\frac{dC_{n+1}^\nu}{dx}-(m-1)(n+1)\,x^{m-1}\,C_{n+1}^\nu$$

$$(7)\qquad +\cdots+(-1)^m\binom{m}{p}(n-p+2+p\nu)\,x^{m-p}\,C_{n-p+2}^\nu$$

$$+\cdots+(-1)^m(n-m+2+m\nu)\,C_{n-m+2}^\nu=0,$$

ou

$$(7')\qquad (x^m-1)\frac{dC_n^\nu}{dx}-(m-1)\,n\,x^{m-1}\,C_n^\nu$$

$$+\cdots+(-1)^m(n-m+1+m\nu)\,C_{n-m+1}^\nu=0;$$

retranchons (7′) de (4), il vient

$$\boxed{(n+1)\,C_{n+1}^\nu=(n+m\nu)\,x^{m-1}\,C_n^\nu+(x^m-1)\frac{dC_n^\nu}{dx}}$$

qui est la formule que nous avions en vue.

SUR LE PROBLÈME DE M. WATSON DE LA THÉORIE DES SÉRIES ASYMPTOTIQUES ET SOLUTION A UN PROBLÈME DE M. CARLEMAN DE LA THÉORIE DES FONCTIONS QUASIANALYTIQUES

R. San Juan, Madrid.

I. Comme il arrive dans tout problème de ceux que Borel a appelés d'interpolation linéaire en sens large[1], la fonction ne reste pas déterminée par la série asymptotique seulement, sinon par celle-ci et, en outre, par une condition complémentaire. Mais tandis que les théorèmes de M. M. Watson et Nevanlinna donnent une seule condition d'unicité, les théorèmes de MM. Carleman et Ostrowski en donnent un nombre infini et il se présente le problème de savoir si les conditions

$$\left|\frac{F(z)-\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n}\right| < A_n; \quad \left|\frac{F(z)-\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n}\right| < A'_n; \text{ pour } |1-z|<1$$

$$\int_1^\infty \log \sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2} \frac{dx}{x^2} = \infty \qquad \int_1^\infty \log \sum_{\nu=\nu}^\infty \frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2} \frac{dx}{x^2} = \infty$$

entraînent $F(z) \equiv F_1(z)$, $F(z)$ et $F_1(z)$ étant deux fonctions holomorphes dans le cercle $|1-z|<1$.

Pour répondre négativement nous construirons deux fonctions $\alpha(t) \geqq 0$ et $\alpha_1(t) \geqq 0$ telles que

$$\alpha(t) + \alpha_1(t) = e^{-\sqrt[4]{t}}$$

et dont les moments

$$\mu_n = \int_0^\infty \alpha(t) t^n dt \qquad \text{et} \qquad \mu'_n = \int_0^\infty \alpha_1(t) t^n dt$$

remplissent les conditions

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt[n]{\mu_n}} = \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt[n]{\mu'_n}} = \infty.$$

Au moyen de ces deux fonctions nous définissons les fonctions

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{\alpha(t) \operatorname{sen} \sqrt[4]{t}}{t+z} dt \qquad F_1(z) = \int_0^\infty \frac{-\alpha_1(t) \operatorname{sen} \sqrt[4]{t}}{t+z} dt$$

[1] E. Borel: Leçons sur les séries divergentes 2e ed. p. 36.

qui ont le même développement asymptotique

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}}, \quad c_n = \int_0^{\infty} a(t) \operatorname{sen}\left(\sqrt[4]{t}\right) t^n \, dt = \int_0^{\infty} a_1(t) \operatorname{sen}\left(\sqrt[4]{t}\right) t^n \, dt$$

avec des bornes $A_n = \mu_n$ et $A'_n = \mu'_n$ qui remplissent la condition de Carleman.

Il existe donc des séries qui sont le développement asymptotique de fonctions distinctes, avec des bornes différentes qui remplissent la condition de M. Carleman.

La condition nécessaire et suffisante pour que coincident toutes les fonctions qui ont un meme développement asymptotique avec des bornes distinctes qui remplissent la condition de M. Carleman, c'est que ce développement admet une fonction d'approximation asymptotique optime, c'est-à-dire, dont les bornes A_n soient ordonnément moindres que les homologues A'_n de toute autre fonction quelconque: $A_n < A'_n$.

On démontre que le prolongement analytique ordinaire, les fonctions qui remplissent la condition de Watson-Nevanlinna, celles que Stieltjes assignait à ses séries, celle exprimée pour la série de Stirling, celles intégrales de Fresnel qui se développent dans les séries de Cauchy, etc., sont toutes des fonctions d'approximation asymptotique optime.

On voit facilement que toute valeur assignée à une série potentielle est d'approximation optime si elle satisfait aux lois formelles d'unicité, d'holomorphie, distributive et de suppression du terme initial. Cette notion résout donc le problème d'unicité dans la théorie de séries divergentes de la manière la plus ample possible, compatible avec ces lois formelles du calcul; et pour certains algorithmes, comme celui de M. Borel, qui ne permettent pas la suppression du terme initial, cette conclusion subsiste lorsque la somme est une fonction holomorphe asymptotiquement approchée par la série, ce qui est l'unique cas d'intérêt analytique pour les séries de rayon nul.

II. $a(t)$ et $a_1(t)$ étant les fonctions définies dans I, au moyen des fonctions

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(t) \operatorname{sen} \sqrt[4]{t} \cdot e^{-tx} \cdot dt \qquad \text{et}$$

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} -a_1(t) \operatorname{sen} \sqrt[4]{t} \cdot e^{-tx} \cdot dt$$

on trouve la réponse négative a la demande de Carleman (page 67 de son livre « Les fonctions quasianalytiques ») sur la coïncidence de deux fonctions réelles qui ont d'égales dérivées en un point

$$f^{\nu}(0)=f_1^{\nu}(0) \qquad (\nu=0,1,2,3,\cdots)$$

et remplissent la condition de Denjoy, c'est-à-dire,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[\nu]{M_\nu}}=\infty \quad \text{et} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[\nu]{M'_\nu}}=\infty$$

M_ν et M'_ν étant les maximums de $f^{\nu}(x)$ et $f_1^{\nu}(x)$ respectivement dans l'intervalle (0, a).

Il y a donc des classes quasianalytiques D (avec la dénomination de M. S. Berstein) dont la somme n'est pas quasianalytique $\triangle$ (avec la dénomination de M. Mandelbrojt;[1] il résulte par conséquent *qu'il n'existe pas une classe quasianalytique* $\triangle$ *qui comprenne toutes les autres.*

Ce résultat est démontré dans le livre de Carleman (page 3), mais pour le classe que M. Mandlebrojt appelle quasianalytiques I.

III. On sait que la succession A_n définissant une classe de fonctions quasi-analytiques C_A au moyen des limitations

$$|f^{\nu}(x)|<k^{\nu}\cdot A_\nu \qquad (\nu=0,1,2,\cdots) \qquad (a\leqq x\leqq b)$$

satisfait a la condition de M. Carleman, mais il ne paraît pas avoir encore été démontré que, quand touts les fonctions de C_A sont periodiques, l'on puisse choisir d'autres bornes, $B_\nu\leqq A_\nu$ telles que

$$|f^{\nu}(x)|<k_1^{\nu}\cdot B_\nu \qquad (\nu=0,1,2,\cdots) \qquad (a\leqq x\leqq b).$$

lesquelles remplissent la condition plus restreinte de M. Denjoy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[\nu]{B_\nu}}=\infty.$$

Cela se démontre en s'apuyant sur un théorème de M. Mandelbrojt.[2]

---

[1] M. Mandelbrojt. Séries de Fourier et classes quasianalytiques etc. 1935, pag. 51.

[2] M. Mandelbrojt. Loc. cit. pag. 86.

INSTRUMENTELLE AUSWERTUNG VON STIELTJESINTEGRALEN

Von E. J. NYSTRÖM, Helsingfors.

Wir werden ein Instrument betrachten, das *Stieltjesintegrale* $I = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dh(t)$ durch Flächenmessung auswertet. Der Wert eines Integrals der Form $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$ läßt sich dadurch messen, daß man mit dem Fahrstift eines gewöhnlichen *Planimeters* den betreffenden Bogen der Kurve $y = f(t)$, dessen Endordinaten und das dazwischenliegende Stück der t-Achse im Uhrzeigersinn umfährt und die Drehung der Integrierrolle des Planimeters abliest. Da im Stieltjesintegral I zwei willkürliche Funktionen auftreten, hat man für die Bewegung des Planimeters zwei gleichzeitige Führungen nötig, die von verschiedenen Personen bewerkstelligt werden, indem sie je eine Fahrmarke bewegen. Die eine Fahrmarke umläuft das schon erwähnte Flächenstück, während die andere stets längs der Kurve $x = h(t)$ gleitet. Die Kurven sind auf verschiedene Papierblätter gezeichnet und die beiden t-Achsen sind zueinander rechtwinklig. Der Planimeterstift umläuft jetzt eine transformierte Figur, für deren Flächeninhalt man den Wert I findet: diese Figur wird vom Apparat nur gemessen, nicht gezeichnet (Vgl. den Aufsatz des Verfassers in *Soc. Scient. Fenn.*, *Comm. Phys.-Math.* IX. 4).

Das Instrument selbst wird aus dem bekannten *harmonischen Analysator Mader-Ott* (Hersteller: A. OTT, Kempten, Bayern) erhalten, wenn man die Zahnräder wegläßt, dafür aber ein besonderes Zusatzgerät daran befestigt. Während der Analysator nur zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten $a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos n \frac{2\pi}{p} t\, dt$, $b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin n \frac{2\pi}{p} t\, dt$ dient, wird sein Arbeitsgebiet jetzt infolge der zweiten Führung gemäß der frei wählbaren Funktion $h(t)$ wesentlich erweitert. — Als weitere Verwendungsmöglichkeiten des „Stieltjesintegrometers" erwähnen wir: Bestimmung von statischen- und Trägheitsmomenten, Entwicklung beliebiger Funktionen in Reihen nach Kugelfunktionen, Mittelwerte bei Anwendung besonderer Koordinatensysteme, Planimetrierung von Mercatorkarten, Überlagerung von Wahrscheinlichkeitskennlinien; überhaupt ist das Stieltjesintegral ein ziemlich anpassungsfähiger Ausdruck. Die erreichbare Genauigkeit genügt für die meisten praktischen Zwecke. — Ein Exemplar des neuen Instruments befindet sich in der Technischen Hochschule zu Helsingfors. Der Preis des Zusatzgeräts, das noch nicht im Handel ist, wird verhältnismäßig gering sein.

ÜBER EINE DARSTELLUNG DES NEWTONSCHEN DIFFERENZENQUOTIENTEN UND IHRE ANWENDUNGEN

Von L. TCHAKALOFF, Sofia.

Ein Newtonscher Differenzenquotient[1] mit wiederholten Argumenten läßt sich wie folgt definieren. Es seien $a_0, a_1, \cdots, a_m$ $m+1$ verschiedene Zahlen mit den entsprechenden Vielfachheiten $r_0, r_1, \cdots, r_m$. Man bilde den linearen Ausdruck

$$\sum_{\tau=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_\tau - 1} A_{\tau\lambda} f^{(\lambda)}(a_\tau) = N[f], \tag{1}$$

der von den Werten der Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitungen an den Stellen $a_0, a_1, \cdots, a_m$ abhängt, und bestimme die von $f(x)$ unabhängigen Koeffizienten $A_{\tau\lambda}$ derart, daß

$$N[1] = N[x] = \cdots = N[x^{M-1}] = 0, \quad N[x^M] = 1,$$

wobei zur Abkürzung $r_0 + r_1 + \cdots + r_m = M + 1$ gesetzt ist. Durch diese Forderungen sind die Koeffizienten $A_{\tau\lambda}$ eindeutig bestimmt und es läßt sich leicht zeigen, daß im wesentlichen ihre Bestimmung auf die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$(z-a_0)^{-r_0}(z-a_1)^{-r_1} \cdots (z-a_m)^{-r_m}$$

zurückgeführt werden kann.

Nimmt man ferner an, daß die a_τ reell sind und den Ungleichungen $a_0 < a_1 < \cdots < a_m$ genügen, so kann man (eindeutig) eine in $[a_0, a_m]$ stetige Funktion $u(x)$ derart definieren, daß die Identität

$$N[f] = \int_{a_0}^{a_m} u(x) f^{(M)}(x) dx \tag{2}$$

besteht. Die Darstellungskurve der Funktion $u(x)$ ist nämlich aus m Parabelbögen höherer Ordnung zusammengesetzt, die sämtlich oberhalb der x-Achse liegen. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf (2) erhält man daher

$$N[f] = \int_{a_0}^{a_m} u(x) f^{(M)}(x)\, dx = \frac{1}{M!} f^{(M)}(\xi) \tag{3}$$

mit $a_0 < \xi < a_m$, und es entsteht die Aufgabe, was sich über den Variabilitätsbereich der Zahl ξ aussagen läßt, wenn $f(x)$ einer bestimmten Funktionsklasse

[1] Die Benennung „Newtonscher Differenzenquotient" ist m. W. von G. Kowalewski in seiner Schrift: Interpolation und genäherte Quadratur (Leipzig, 1932) eingeführt worden.

angehört. Man kann zunächst zeigen, daß einer beliebigen Zahl ξ_0 zwischen a_0 und a_m ein reelles Polynom $f(x)$ derart zugeordnet werden kann, daß (3), als eine algebraische Gleichung in ξ aufgefaßt, die einzige reelle Wurzel ξ_0 hat. Bedeutet ferner $C_{\varkappa+M}$ die Klasse der reellen Polynome in x vom Grade $\leqq \varkappa + M$, so lassen sich die allgemeinen Sätze, die der Verfasser in seiner 1934 erschienenen Arbeit[1] bewiesen hat, unmittelbar anwenden. Auf diese Weise kann man sämtliche *Minimalmengen* $E_\varkappa$ in bezug auf die Polynomklasse $C_{\varkappa+M}$ effektiv bestimmen, wobei eine Minimalmenge $E_\varkappa$ eine Menge reeller Zahlen bedeutet, die durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist: 1. einem beliebigen Polynom $f(x)$ der Klasse $C_{\varkappa+M}$ entspricht mindestens eine Zahl ξ aus $E_\varkappa$, für welche Gl. (3) besteht und 2. keiner echten Teilmenge von $E_\varkappa$ kommt die Eigenschaft 1 zu.

Die ausführlichen Beweise dieser Ergebnisse werde ich an einer anderen Stelle veröffentlichen.

SUR QUELQUES INÉGALITÉS POUR DES INTÉGRALES DOUBLES

Par A. WEINSTEIN, Paris.

Posons $H(u) = \iint u^2\,dx\,dy$, $D(u) = \iint (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$, $I(u) = \iint (\Delta u)^2\,dx\,dy$, le domaine d'intégration S étant le carré $0 \leqq x, y \leqq \pi$. Considérons le problème suivant: Déterminer les minima λ_1 et μ_1 des rapports I/H et I/D pour toutes les fonctions u qui s'annulent avec leurs dérivées normales sur la frontière de S. Ce problème généralise un problème bien connu pour les intégrales simples.[1] On trouve les inégalités

$$13{,}29 < \lambda_1 < 13{,}37; \qquad 5{,}303 < \mu_1 < 5{,}312.$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ et $\mu_1, \mu_2, \cdots$ les valeurs propres des équations d'Euler de notre problème. On aura, pour un domaine *quelconque* les inégalités

$$\lambda_n > \omega_n^2, \ \mu_n > \omega_n \qquad n = 1,\ 2, \cdots,$$

où les ω_n désignent les valeurs propres de l'équation d'Euler du problème classique: $D/H = \text{Min.}$, $u = 0$ sur la frontière du domaine. Pour la bibliographie voir A. Weinstein, Comptes rendus Paris, 202, 1936, p. 1899.

[1] J. Hadamard, Leçons sur le Calcul des Variations, No. 272; E. Picard, Traité d'Analyse, III, ch. VI; L. Tonelli, Calcolo delle Variazioni, II, No. 138; M. Janet, C. R. Congrès Int. de Zurich, 1932, II, p. 111.

THE LENGTH OF A CURVE AND THE AREA OF A CURVED SURFACE AS CONTINUOUS FUNCTIONALS

By H. P. Mulholland, Newcastle-upon-Tyne.

For any continuous curves C, C^* Fréchet's definition gives a finite distance $a(C, C^*)$; and, when a is used, it is well known that the length $L(C)$ may be characterized by its agreement with the elementary length $E(C)$ for polygons and by being the least discontinuous extension of $E(C)$ that preserves the latter's lower semi-continuity.

We discuss here the problem of defining a distance d, finite for rectifiable curves, making $L(C)$ continuous and such that $d(C, C_n)$ tends to 0 when we have "convergence in length". (This term is used by Adams and Lewy, in a recent paper dealing with the case $y=f(x)$, to imply $a(C, C_n) \to 0$ and $L(C_n) \to L(C)$.) In this case $L(C_n) \to L(C)$ if the total variation $V[f(x)-f_n(x)] \to 0$; though this is only necessary for convergence in length when f is absolutely continuous. Thus, for curves C, C^* given by vector equations $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}^*(t)$, where t runs from 0 to 1, we are led to consider

$$V_0^1[\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}^*(t)] = \int_0^1 |\, d\{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}^*(t)\}\,| .$$

This is the length of the curve $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}^*(t)$: to avoid using a length we take instead

$$T_0^1[\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}^*(t)] = \operatorname*{Max}_{|\mathbf{q}|=1} V_0^1[\mathbf{q}\{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}^*(t)\}],$$

which is the greatest "relative motion in a direction $\mathbf{q}$". The requisite invariance under change of parameter is secured if d is derived from T in the same way as a from $\operatorname{Max} |\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}^*(t)|$.

We have $a(C, C^*) \leqq |\mathbf{r}(0)-\mathbf{r}^*(0)| + d(C, C^*)$; the distance d satisfies the "triangle inequality"; and *for the curve* $C_n : \mathbf{r}=\mathbf{r}_n(t)$ *to converge to* $C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ *in such a way that* $\mathbf{r}_n(t)-\mathbf{r}(t) \to \mathbf{c}$, *a constant, for every* t, *and* $L(C_n) \to L(C)$, *it is necessary and sufficient that* $d(C, C_n)$ *should tend to* 0.

In fact, d may be replaced here by the value of T for representations of C, C_n with a parameter s proportional to their arcs. Thus our condition amounts to strong convergence with index 1 of the tangent-directions as functions of s.

We now have a characterization of $L(C)$ as the only extension of $E(C)$ preserving the latter's continuity relative to d; and also a necessary and sufficient condition for convergence in length.

This condition is related to one obtained by Tonelli, who employs convergence in measure: however, the present theory needs only quite elementary arguments, and yields a distance with a fairly simple geometrical interpretation.

A similar theory can be developed for curved surfaces, Young's definition of the area being the most suitable from this point of view: the results may, indeed, be deduced from those for curves if we use the device of mapping a square on an interval.

LA FAMILLE DES FONCTIONS $\Gamma_{p,q}(x)$

Par Rodolphe Raclis, Bucarest.

J'ai choisi le sujet de ma conférence dans la Théorie des différences pour une double raison: d'abord pour témoigner le sentiment de piété que nous devons à la mémoire de notre ancien Président Alf Guldberg, le Maître de l'ancienne Théorie des différences et ensuite pour apporter un hommage à Monsieur Niels Erik Nörlund, le Maître de la nouvelle Théorie des différences et dont je m'honore d'avoir été l'élève.

J'attache, à chaque opération linéaire Λ, une double infinité de fonctions que j'appelle les fonctions $\Gamma_{p,q}(x)$ et qui sont définies par l'équation fonctionnelle

$$\Lambda \log \Gamma_{p,q}(x) = x^p (\log x)^q,$$

où p et q sont deux nombres *réels quelconques*.

La fonction classique $\Gamma(x)$ correspond à $\Lambda = \triangle$, $p=0$, $q=1$ et la fonction gamma généralisée, étudiée par M. Bendersky, Acta Mathematica, t. 61, 1933, correspond à $\Lambda = \triangle$, p=entier positif, $q=1$.

Dans cette théorie on a besoin de l'expression des dérivées successives de la fonction $y = x^p (\log x)^q$; si l'on pose

$$\varphi_n(p) = p(p-1)\cdots(p-n+1)$$

et si l'on désigne par $\varphi_n'(p)$, $\varphi_n''(p)$, $\cdots$ les dérivées successives du polynome $\varphi_n(p)$ de la variable p, on a pour la dérivée d'ordre n de y

$$y^{(n)} = x^{p-n}\Big[\varphi_n(p)(\log x)^q + \varphi_n'(p)\frac{q}{1}(\log x)^{q-1} + \cdots + \varphi^{(n)}(p)\frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}(\log x)^{q-n}\Big].$$

On déduit $y^{(n)} \to 0$ lorsque $x \to \infty$ si $n > p$, c'est-à-dire que la fonction y satisfait à la condition d'admettre une dérivée d'un certain ordre, continue pour $x > 0$ et qui tend vers zéro lorsque $x \to \infty$.

Les opérations linéaires Λ que je considère d'abord, sont les opérations $\overset{1}{\underset{\omega}{\triangle}}$, $\overset{1}{\underset{\omega}{\nabla}}$, $\overset{n}{\underset{\omega_i}{\triangle}}$, $\overset{n}{\underset{\omega_i}{\nabla}}$ étudiées par M. Nörlund, les opérations $\overset{1}{\underset{\alpha}{\Lambda}}$, $\overset{m}{\underset{\alpha_i}{\Lambda}}$, $\overset{m,n}{\underset{\alpha_i\beta_j}{\Lambda}}$ introduites par nous même et l'opération linéaire dont j'ai donné l'expression générale au Congrès mathématique de Prague, en 1934.

Pour fixer les idées, je considère ici le cas $\Lambda = \overset{1}{\underset{\omega}{\triangle}}$ avec $\omega = 1$; je définis la fonction $\Gamma_{p,q}(x)$ comme la solution principale de l'équation

$$\log \Gamma_{p,q}(x+1) - \log \Gamma_{p,q}(x) = x^p (\log x)^q$$

et qui pour $x=1$ est égale à 1. Pour p=entier positif et $q=1$, on trouve

$$\log \Gamma_{p,1}(x+h) = C_{p,1} - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2} + \frac{B_{p+1}(x+h)}{p+1} \log x +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{k} \frac{B_\nu(h)}{\nu!} p(p-1)\cdots(p-\nu+2) x^{p-\nu+1} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \cdots + \frac{1}{p-\nu+2}\right) +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{s+1} \frac{B_{p+\nu}(h)}{(p+\nu)!} (-1)^{\nu-2} \frac{p!\,(\nu-2)!}{x^{\nu-1}} + \frac{(-1)^s p!\, s!}{(p+s+1)!} \int_0^\infty \overset{*}{B}_{p+s+1}(h-t) \frac{dt}{(t+x)^{s+1}}$$

où $x>0$, $0 \leqq h \leqq 1$; la valeur de la constante $C_{p,1}$ se détermine en posant $h=0$, $x=1$, $\log \Gamma_{p,1}(1)=0$.

Pour $p \neq$ entier positif, $q=1$, on a

$$\log \Gamma_{p,1}(x+h) = C_{p,1} - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2} + \frac{x^{p+1}}{p+1} \log x + \frac{B_1(h)}{1} x^p \log x +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{m} \frac{B_\nu(h)}{\nu!} p(p-1)\cdots(p-\nu+2) x^{p-\nu+1} \left[\log x + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \cdots + \frac{1}{p-\nu+2}\right] +$$

$$+ \frac{p(p-1)\cdots(p-m+1)}{m!} \int_0^\infty \overset{*}{B}_m(h-t)(x+t)^{p-m} \left[\log x + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \cdots + \frac{1}{p-m+1}\right] d$$

où m est un entier positif $>p$.

De ces expressions on en déduit d'autres sous forme de produits infinis ou de séries ou d'intégrales définies, etc. On a par exemple

$$\Gamma_{-1,1}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[1]{1}\,\sqrt[2]{2}\cdots\sqrt[n]{n}}{\sqrt[x]{x}\,\sqrt[x+1]{x+1}\cdots\sqrt[x+n-1]{x+n-1}} \cdot \frac{(x+n)^{\log \sqrt{x+n}}}{(1+n)^{\log \sqrt{1+n}}},$$

$$\Gamma_{\frac{1}{2},1}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+n)^{(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}n-\frac{1}{2})\sqrt{x+n}}}{(1+n)^{(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}n)\sqrt{1+n}}} \cdot \frac{1^{\sqrt{1}} \cdot 2^{\sqrt{2}} \cdots n^{\sqrt{n}}}{x^{\sqrt{x}}(x+1)^{\sqrt{x+1}}\cdots(x+n-1)^{\sqrt{x+n-1}}} \cdot \frac{e^{\frac{4}{9}(1+n)^{\frac{3}{2}}}}{e^{\frac{4}{9}(x+n)^{\frac{3}{2}}}},$$

$$\Gamma_{1,1}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+n)^{\frac{1}{2}\{(x+n)^2-(x+n)+\frac{1}{6}\}}}{(1+n)^{\frac{1}{2}\{n^2+n+\frac{1}{6}\}}} \cdot \frac{1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n}{x^x(x+1)^{x+1}\cdots(x+n-1)^{x+n-1}} e^{\frac{1}{4}(1+2n+x)(1-x)}$$

On déduit les valeurs asymptotiques, pour les grandes valeurs de n, de certaines expressions fort remarquables, par exemple

$$\sqrt[1]{1}\,\sqrt[2]{2}\cdots\sqrt[n]{n}\sim c_{-1,1}\,n^{\log\sqrt{n}},$$

$$1^{\sqrt{1}}\,2^{\sqrt{2}}\cdots n^{\sqrt{n}}\sim c_{\frac{1}{2},1}\left(\frac{n}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}n\sqrt{n}}\cdot n^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}$$

où $c_{-1,1}$, $c_{\frac{1}{2},1}$ sont des constantes liées aux constantes $C_{-1,1}$, $C_{\frac{1}{2},1}$.

En supposant toujours que p est un nombre réel quelconque, on trouve successivement les valeurs asymptotiques des expressions

$$1^{1^p}\cdot 2^{2^p}\cdot 3^{3^p}\cdots n^{n^p},$$

$$1^{n\cdot 1^p}\cdot 2^{(n-1)2^p}\cdot 3^{(n-2)3^p}\cdots n^{1\cdot n^p},$$

$$1^{(1+2+\cdots+n)1^p}\cdot 2^{(1+2+\cdots+\overline{n-1})2^p}\cdot 3^{(1+2+\cdots+\overline{n-2})3^p}\cdots n^{1\cdot n^p},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Une étude complète des transcendentes $\Gamma_{p,q}(x)$, correspondantes aux opérations linéaires mentionnées, fera l'objet d'un travail étendu.

A NON-ABSOLUTELY CONVERGENT INTEGRATION METHOD

By E. J. Mc Shane, Charlottesville, Virginia.

The Perron integral has, as is well known, a high degree of generality, and the definition and the proofs of the elementary theorems are very simple. However, without a considerable change in method it seems impossible to prove the theorem on integration by parts and the second mean value theorem. This difficulty can be removed by altering the definition slightly. In Perron's definition of major and minor functions we replace $\underline{D}$, $\overline{D}$ by D_+, D_-, D^-, D^+; thus instead of two kinds of functions associated with a given function $f(x)$ on an interval (a, b) we obtain four kinds. The function $f(x)$ is integrable if for every $\varepsilon > 0$ there is a set of four functions $\varphi^j(x)$ (one of each kind) with $|\varphi^j(b) - \varphi^k(b)| < \varepsilon$ $(j, k = 1, 2, 3, 4)$. The definition of the integral and the proofs of the elementary theorems now follow the lines already known for the Perron integral. However, it is now possible to prove the theorem on integration by parts and the second mean value theorem without introducing any concepts or methods not already used in establishing the elementary properties. The integral thus defined is easily seen to be at least as general as the Perron integral.

ON SOME PROPERTIES OF A NON-DIFFERENTIABLE FUNCTION

By A. N. Singh, Lucknow, India.

I have elsewhere defined classes of non-differentiable functions by using various types of arithmetical representations of numbers in the interval $(0,1)$[1]. The following example belongs to the same type. *It does not possess even a one-sided derivative at any point.* Simpler examples than the one given here may be constructed but the present one is considered as it provides an analytical definition to a function defined geometrically by Besicovitch[2]. The analytical form helps us to make a complete study of the derivates and to find their actual values at any given point.

Let $X_{p,\infty}$ denote a number defined by the representation

$$X_{p,\infty}=\frac{a_{p,1}}{2^{2\cdot 2}}+\frac{a_{p,2}}{2^{2\cdot 3}}+\frac{a_{p,3}}{2^{2\cdot 4}}+\cdots+\frac{a_{p,r}}{2^{2(r+1)}}+\cdots$$

where $a_{p,1}=0,\ 5,\ 8$ or 13 and $a_{p,m}=0$ or $3+2^m$, for $m\geqq 2$.

$$\text{Let } X_{p,n}=\frac{a_{p,1}}{2^{2\cdot 2}}+\frac{a_{p,2}}{2^{2\cdot 3}}+\cdots+\frac{a_{p,n-1}}{2^{2n}}+\frac{1+2^n}{2^{2(n+1)}},$$

where the a's may have the values stated above, and where $X_{p,1}$ $(p>1)$ denotes one of the two numbers $\frac{3}{2^{2\cdot 2}}$ or $\frac{11}{2^{2\cdot 2}}$.

It is easy to prove that any number x in $(0,1)$ can be represented as

$$x=X_{1,n_1}+\frac{1}{2^{2n_1+1}}\left(X_{2,n_2}+\frac{1}{2^{2n_2+1}}\left(X_{3,n_3}+\frac{1}{2^{2n_3+1}}\left(\cdots\left(\cdots\right.\right.\right.\right.$$

where the n's $\geqq 1$.

To a number x let there correspond a number y defined as below:

$$y=f(x)=Y_{1,n_1}-\frac{1}{2^{n_1}}\left(Y_{2,n_2}-\frac{1}{2^{n_2}}\left(Y_{3,n_3}-\frac{1}{2^{n_3}}\left(\cdots\left(\cdots\right.\right.\right.\right.$$

where to $X_{p,n}$ there corresponds $Y_{p,n}$ given by

$$Y_{p,n}=\frac{c_{p,1}}{2}+\frac{c_{p,2}}{2^2}+\cdots+\frac{c_{p,n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n},$$

[1] See Singh, *Annals of Mathematics*, XXVIII, pp. 471—476; XXXI, pp. 657—659; *Proc. Benares Mathematical Society*, XIII, pp. 1—17. For the literature on the subject see Singh, *The Theory and Construction of Non-differentiable Functions*, Lucknow (1935), pp. 49—52.

[2] Besicovitch, *Bull. de l'Acad. des Sciences de Russie*, XIX, 527—540.

and where the c's are defined as below:

$c_{p,1}=0$ or 1 according as $a_{p,1}$ is 0, 13 or 5, 8; and

(I) if $a_{p,1}$ is 0 or 5, $c_{p,r}=0$ or 1 according as $a_{p,r}$ is 0 or $3+2^r$,

(II) if $a_{p,1}$ is 8 or 13, $c_{p,r}=1$ or 0 according as $a_{p,r}$ is 0 or $3+2^r$,

and further for the value $X_{p,1}=\frac{3}{2^{2\cdot 2}}$ or $\frac{11}{2^{2\cdot 2}}$, $Y_{p,1}=\frac{1}{2}$.

The proofs for the continuity and the non-differentiability of the function can be given in a few lines. A further analysis gives the following result regarding the values assumed by the derivates:

(1) At a set of points S_1, D^+ is finite >0, $D_+\leqq 0$; $D^-\ddagger D_->0$.

(2) At a set of points S_2, $D^+\geqq 0$, D_+ is finite <0; $D_-\ddagger D^-<0$.

(3) At a set of points S_3, $D^+\ddagger D_+>0$; D^- is finite >0, $D_-\leqq 0$.

(4) At a set of points S_4, $D_+\ddagger D^+<0$; D_- is finite <0, $D^-\geqq 0$.

(5) At a set of points S_5 one of the extreme derivates on the right (left) is infinite in value and a median derivate is zero.

SOME COMBINATORIAL PROPERTIES OF MEASURABLE SETS

By J. Gillis, Sunderland.

Theorem I. *Given a sequence* $\{A_n\}$ *of measurable sets in* (0, 1) *such that*

$$m A_n \geqq \alpha > 0 \quad (n=1, 2, \cdots)$$

then, given a positive ε *and a natural number* k, *we can always find* k *distinct positive integers* $n_1, n_2, \cdots, n_k$ *such that*

$$m(A_{n_1}\times A_{n_2}\times\cdots\times A_{n_k})>\alpha^k-\varepsilon.$$

Proof. Let $f_n(x)$ be the characteristic function of A_n. Then for each N

$$\begin{aligned}(N\alpha)^k &\leqq \left(\sum_{n=1}^{N} m A_n\right)^k\\ &= \left[\sum_{n=1}^{N}\int_0^1 f_n(x)\,dx\right]^k\\ &= \left[\int_0^1 \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx\right]^k\\ &\leqq \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right]^k dx \text{ by Hölder's Inequality,}\\ &= \int_0^1 \left[O(N^{k-1})+(k!)\cdot\Sigma^{(k)} f_{n_1}(x) f_{n_2}(x)\cdots f_{n_k}(x)\right] dx,\end{aligned}$$

$\Sigma^{(k)}$ indicating summation over all selections of k distinct integers from the range $1, 2, \cdots, N$. Hence, by the definition of $f_n(x)$, we can deduce the theorem.

Moreover, given k, we can construct a sequence $\{A_n\}$ such that, for each n,

$$m A_n \geqq a$$

while, for each set of k distinct integers $n_1, n_2, \cdots, n_k$,

$$m(A_{n_1} \times A_{n_2} \times \cdots \times A_{n_k}) < a^k.$$

Theorem II. *Given a family* $\mathfrak{F}$ *of measurable sets in* (0, 1) *each of measure* $\geqq a$ *and such that* $\mathfrak{F}$ *has cardinal* $\mathfrak{c}$ *then, given a positive* ε, *we can find*

(I) *a sub-class* $\mathfrak{H}$ *of* $\mathfrak{F}$, *also of cardinal* $\mathfrak{c}$, *every two sets of which have a common part of measure* $> a - \varepsilon$, *and*

(II) *an infinite sub-class* $\mathfrak{K}$ *of* $\mathfrak{H}$ *such that the common part of all the members of* $\mathfrak{K}$ *has measure* $> a - \varepsilon$.

Let the *relative displacement* of two measurable sets A, B be given by

$$m(A, B) = m(A - B) + m(B - A).$$

Represent the measurable sets in (0, 1) as the elements of an abstract space, Σ, metricised by δ. All the necessary axioms are satisfied and the space is *complete* and *separable*. Hence, in this space Σ, the set $\mathfrak{F}$ has a *point of condensation* and from this Theorem II can be obtained.

It may be shown that this also is a "best possible" theorem.

Now let the linear segment defined by $x = x_0$, $0 \leqq y \leqq 1$ contain, for each x_0 in (0, 1), a measurable set E_{x_0}. Then the following can occur:

(1) E_x has measure 1 for each x of (0, 1),

(2) $\sum\limits_{0 \leqq x \leqq 1} E_x$ is a measurable plane set, while

(3) for each set Q of x of positive exterior measure $P(Q)$ has measure zero, where $P(Q)$ is the set of values of y for which $(x, y) \varepsilon E_x$ for every x of Q.

The following, however, is true:

Theorem III. *Under conditions* (1) *and* (2) *and if* $\sum\limits_{0 \leqq x \leqq 1} E_x$ *is the product of a denumerable infinity of open plane sets, then, given a positive* ε, *we can find a perfect set* Q *such that* $P(Q)$ *has measure greater than* $1 - \varepsilon$.

For any plane set B denote by $B^{(x_0)}$ the set of values of y for which $(x_0, y) \varepsilon B$. Let $\sum\limits_{0 \leqq x \leqq 1} E_x = A = \prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ where each A_n is open and contains

A_{n+1}. Then, given any set of non-overlapping intervals $(a_1, b_1), \cdots, (a_k, b_k)$, a positive integer n, and a positive ε, we can find a set of non-overlapping intervals $\delta_1, \cdots, \delta_{2k}$ such that δ_{2i-1} and δ_{2i} are both interior to (a_i, b_i) and

$$m\left[\underset{x\,\varepsilon\,\delta_1+\cdots+\delta_{2k}}{\Pi} A_n^{(x)}\right] > 1-\varepsilon\,.$$

This is immediate since A_n is open and each $A_n^{(x)}$ has measure 1. The theorem now follows by a standard argument.

POLYNOMISCHE OPERATIONEN IN ABSTRAKTEN RÄUMEN

Von S. Mazur und W. Orlicz, Lwów.

Die Untersuchungen, über welche im folgenden berichtet wird, entstanden aus dem Versuch eine allgemeine Theorie der polynomischen Operationen (kurz Polynome) zu entwickeln[1]. Man hat verschiedene Definitionen von Polynomen vorgeschlagen; so geht S. Banach von einer in bezug aut jede Variable linearen Operation $U_k(x_1, \cdots, x_k)$ aus, bildet durch Gleichsetzen der Variablen die Operation $U_k(x) = U_k(x, \cdots, x)$ und bezeichnet $U(x) = U_0(x) + \cdots + U_m(x)$ als ein Polynom höchstens m-ten Grades; zwei andere Definitionen stammen von M. Fréchet und R. Martin. Alle drei erweisen sich äquivalent, wenn z. B. die Räume der unabhängigen und abhängigen Variablen vom Typus (B) sind; dies schließt gewisse frühere Ergebnisse von M. Fréchet und T. Hildebrandt ein. Die üblichen Sätze, die sich auf Folgen von linearen Operationen beziehen, bleiben auch für Folgen von Polynomen, deren Grade beschränkt sind, bestehend z. B.: die Grenze einer konvergenten Folge von Polynomen, ist ein Polynom; ist eine Folge von Polynomen in jedem Punkte beschränkt, so sind diese Polynome in jeder Kugel gleichgradig stetig; die Menge aller Punkte, in denen eine Folge von Polynomen beschränkt bzw. konvergent ist, bildet eine Menge erster Kategorie oder ist mit dem Raume identisch — daraus ergeben sich für Folgen von Polynomen, deren Grade beschränkt sind, Sätze über Kondensation der Singularitäten. Die von uns in der elementaren Teilbarkeitstheorie der Polynome benutzten neuen Methoden erlauben nicht nur die üblichen Sätze im allgemeinen Falle zu beweisen, sondern sie ergeben auch einige sogar für gewöhnliche Polynome bisher unbekannte Resultate.

[1] S. Mazur und W. Orlicz, Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen, Studia Math. 5 (1934) p. 50—68, 179—189; S. Mazur et W. Orlicz, Sur la divisibilité des polynomes abstraits, C. R. Acad. Sci. Paris, 202 (1936), p. 621—623.

Beschränken wir uns zunächst auf Polynome $P_k(x)$, deren Werte Zahlen sind. Man sagt: $P_1(x)$ sei ein Teiler von $P_2(x)$, wenn es ein $P_0(x)$ mit $P_2(x)=P_0(x)P_1(x)$ gibt; alsdann definiert man in üblicher Weise z. B. die Begriffe der Teilerfremdheit und der Irreduzibilität.

1. *Ist das Polynom $P_1(x_0+th_0)$ der Zahlenvariablen t ein Teiler des Polynoms $P_2(x_0+th_0)$ der Zahlenvariablen t für je zwei Elemente x_0, h_0, so ist $P_1(x)$ ein Teiler von $P_2(x)$.*

2. *Sind $P_1(x)$, $P_2(x)$ teilerfremd, so gibt es zu jedem Elemente h_0 ein Element x_0, so daß die Polynome $P_1(x_0+th_0)$, $P_2(x_0+th_0)$ der Zahlenvariablen t teilerfremd sind.*

3. *Ist $P_0(x)$ irreduzibel, so gibt es Elemente $h_1, \cdots, h_n$ derart, daß das Polynom $P_0(t_1h_1+\cdots+t_nh_n)$ der Zahlenvariablen $t_1, \cdots, t_n$ irreduzibel ist.*

4. *Jedes $P_0(x)$ läßt sich auf eine und im wesentlichen nur eine Weise als ein Produkt $P_0(x)=P_1(x)\cdots P_m(x)$ von irreduziblen $P_1(x), \cdots, P_m(x)$ darstellen.*

Sind nun $P_k(x)$ beliebige Polynome, deren Werte also nicht notwendig Zahlen sind, so sagen wir, $P_1(x)$ sei ein Teiler von $P_2(x)$, wenn für jedes lineare Funktional $\Phi(y)$ das Polynom $\Phi(P_1(x))$ ein Teiler des Polynoms $\Phi(P_2(x))$ ist.

5. *Damit $P_1(x)$ ein Teiler von $P_2(x)$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß es ein $P_0(x)$ gibt, dessen Werte Zahlen sind, mit $P_2(x)=P_0(x)P_1(x)$.*

6. *Verschwindet $P_2(x)$ nicht identisch, so läßt sich $P_2(x)$ auf eine und im wesentlichen nur eine Weise als ein Produkt $P_2(x)=P_0(x)P_1(x)$ von irreduziblen $P_0(x)$, $P_1(x)$ darstellen, wobei die Werte von $P_0(x)$ Zahlen sind.*

Bei allen Betrachtungen kann man voraussetzen, daß die zugrunde gelegten Räume reell oder komplex sind; sind sie komplex und bezeichnen $P_1(x)$, $P_2(x)$ Polynome mit Zahlenwerten, so gilt der Nullstellensatz

7. *Damit aus $P_1(x)=0$ stets $P_2(x)=0$ folge, ist notwendig und hinreichend, daß $P_1(x)$ ein Teiler von $P_2^n(x)$ sei, wobei n eine geeignete natürliche Zahl bezeichnet.*

REMARKS ON THE CONVERGENCE PROBLEM OF FOURIER SERIES OF PERIODIC AND ALMOST PERIODIC FUNCTIONS, AND ON PARSEVAL'S EQUATION

By L. C. Young, Cambridge.

Convergence of Fourier series may be regarded as a problem of term by term integration. We give here a general theorem on the limits of $\int f_n dg_n$, not requiring absolute integrability. Applied to Fourier series, the theorem leads to convergence criteria included in those of Hardy and Littlewood, but roughly of the same type. The essential fact, used here, is that in $(-\pi, \pi)$, the functions

$$\int_0^t \frac{\sin (n+\frac{1}{2})u}{\sin \frac{1}{2} u} du$$

have, for every $q > 1$, their q-th order variation uniformly bounded.

The methods apply also to summability by Cesaro means of negative order, and there are similar results for the allied series, for the Fourier integral, and for almost periodic (S. a. p.) functions; in the last two cases, the relevant fact is that, in $(-\infty, \infty)$, the functions

$$\int_0^t \frac{\sin n u}{u} du \quad \text{and} \quad \int_0^t \frac{\sin n u \sin u}{u^2} du$$

have for every $q > 1$, their q-th order variations uniformly bounded. For the Fourier integral, the results thus obtained are new; for a. p. functions, restrictions on the Fourier exponent are needed.

We prove also a curious new form of Parseval's theorem for Fourier series: *let f and g, of period 2π and without common discontinuities, have bounded variations of orders p and q, respectively, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, and let their Fourier coefficients be a_n, b_n and α_n, β_n. Then the series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (a_n \beta_n - b_n \alpha_n)$$

converges and its value is $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f dg$. There is an analogous, slightly more complicated, theorem for a. p. functions.

TRANSFINITE SUPERPOSITIONS OF ABSOLUTELY CONTINUOUS FUNCTIONS

By J. Todd, Belfast.

We define, for each ordinal $\alpha (< \omega_1)$ the class $S(\alpha; X)$ of superpositions of order α of functions of an assigned class X. This class may be, for instance the class KV of continuous functions with bounded variation or the class I of absolutely continuous functions.

We put $S(1; X) = X$ and assume $S(\beta; X)$ defined for all $\beta < \alpha (< \omega_1)$. If $\alpha - 1$ exists we write $f \varepsilon S(\alpha; X)$ if, and only if $f = g\{h\}$ for some $g \varepsilon X$ and some $h \varepsilon S(\alpha - 1; X)$ *and* if $f \ni S(\beta; X)$ for any $\beta < \alpha$. On the other hand if α is a limiting number we write $f \varepsilon S(\alpha; X)$ if, and only if we have $f = \lim f_n$ for some $f_n, \Phi_n \varepsilon \sum_{\beta < \alpha} S(\beta; X)$ where $f_n = \Phi_n \{f_{n-1}\}$ for $n = 2, 3, \cdots, f_1 = \Phi_1$ *and* if $f \ni S(\beta; X)$ for any $\beta < \alpha$.

Mlle Nina Bary, who introduced the concept of transfinite superpositions in connection with the problem[1] of the representation of continuous functions by means of functions of the class KV, has shown that $S(\alpha; KV) \neq 0$ for each $\alpha < \omega_1$ and moreover that there exist continuous functions which do not belong to any of these classes.

It is natural to ask whether there are any analogues of these results when we consider instead superpositions of absolutely continuous functions. Actually a very different state of affairs must obtain for it is only those $S(\alpha; I)$ for which α or $\alpha - 1$ or $\alpha - 2$ is a limiting number which can *possibly* be not empty. This is an immediate consequence of the result[2] that any function of the form $\Phi = f[g\{h\}]$ where $f, g, h \varepsilon I$ can be represented in the form $\Phi = F[G]$ where $F, G \varepsilon I$.

The following results have been obtained in this order of ideas.

I) $S(\omega; I)$ is not empty.[3]

In fact a monotone continuous function which is not absolutely continuous necessarily belongs to $S(\omega; I)$. The proof of this depends on the remark that if we approximate to the function by a certain set $\{P_n(x)\}$ of polygonal functions then each P_{n+1} is itself a polygonal (and a fortiori an absolutely continuous) function of P_n.

II) $S(\omega + 1; I)$ is not empty.[4]

In fact the continuous function which coincides with x in $(0, \frac{1}{2})$ and which steadily decreases from $\frac{1}{2}$ to 0 in $(\frac{1}{2}, 1)$ so as to transform a set

---

[1] Nina Bary, Recueil Math., 40 (1933), 326—372.

[2] Nina Bary, Math. Annalen, 103 (1930), 185—248, 598—653.

[3] John Todd, Journal London Math. Soc., 10 (1935), 166—171.

[4] John Todd, Proc. London Math. Soc., (2), 41 (1936), 433—439.

$E \subset (0, \frac{1}{2})$, mes $E=0$ into a set $F \subset (\frac{1}{2}, 1)$, mes $F=\frac{1}{2}$ belongs to $S(\omega+1; I)$. The function just described is a polygonal function of a monotone continuous function and therefore belongs to $S(\alpha; I)$ for some $\alpha \leqq \omega+1$. It is clear that $\alpha \neq 1, 2$ so that we can justify our statement by obtaining a contradiction from the assumption that our function belongs to $S(\omega; I)$. This we accomplish using certain ideas introduced by Mlle Bary in her study of $S(\alpha; KV)$.

THE UNIQUENESS OF THE REPRESENTATION OF A FUNCTION BY A TRIGONOMETRIC INTEGRAL

By A. C. Offord, Cambridge.

The integral

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, e^{ixu}\, du \tag{1}$$

is said to be summable (C, 1) if

$$\lim_{\omega \to \infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\omega}^{\omega} \left(1 - \frac{|u|}{\omega}\right) \varphi(u)\, e^{ixu}\, du$$

exists. I select the following theorem as typical of the results discussed.

Theorem. *Suppose $\varphi(u)$ is integrable L in every finite interval and that* (1) *is summable $(C, 1)$ for all x to $\Phi(x)$. Suppose further that $\Phi(x)$ is finite for all x and such that*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x)|^r\, dx < \infty$$

for some r satisfying $1 < r < \infty$.

Then (1) *converges strongly with index r to $\Phi(x)$ and*

$$\varphi(u) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\, e^{-iux}\, dx \quad (C, 1)$$

almost everywhere.

There are wide generalizations of this result. I prove the theorem and also its extensions in a paper forthcoming in the Proceedings of the London Mathematical Society.[1] A simple proof of a very special case has already been published.[2]

---

[1] 42 (1937) 422—480.

[2] *Journal London Math. Soc.*, 11 (1936) 171—174.

SUR LES SÉRIES DES POLYNOMES HOMOGÈNES DE DEUX VARIABLES

Par F. LEJA, Kraków.

1. Désignons par $P_n(x,y)$ un polynome homogène du degré $n=0,1,2,\cdots$ de deux variables complexes x et y et considérons une série de la forme

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x,y), \quad \text{où} \quad P_n(x,y)=a_{n\,0}x^n+a_{n-1,1}x^{n-1}y+\cdots+a_{0\,n}y^n.$$

Le domaine de convergence de telles séries (auxquelles se réduisent les séries de Taylor des fonctions de deux variables) semble être encore peu étudié. L'objet de ma communication concernera l'existence de ce domaine et, en particulier, les deux questions suivantes:

Désignons par R_2 l'espace de deux variables complexes et supposons que la série (1) soit convergente dans un ensemble E de points de cet espace. Il se pose d'abord le problème: (A) *Quel doit être l'ensemble E pour que la série (1) possède un domaine de convergence?* D'autre part, si l'ensemble E est tel que le domaine en question existe, demandons: (B) *Quel est le plus grand domaine D en lequel chaque série* (1) *converge si elle converge dans l'ensemble E?*

2. Observons d'abord que la série (1) peut n'avoir aucun domaine de convergence même si elle était convergente dans un ensemble E partout dense dans l'espace entier R_2.[1] Au contraire, si l'ensemble E contient un continu arbitrairement petit ne passant pas par l'origine des coordonnées et non situé entièrement sur un même plan de la forme $ax+by=0$, la série (1), convergente dans E, possède un domaine de convergence.[2] On

[1] Voici l'exemple d'une telle série: Soient

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),\cdots$$
$$(a_1,b_1),\ (a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n),\cdots$$

deux suites de points de l'espace R_2 partout denses dans cet espace et telles qu'on ait $x_i b_k - y_i a_k \neq 0$ pour i et $k=1,2,\cdots$. Supposons en outre que chacun des points $(a_k b_k)$ est repeté une infinité de fois dans la seconde de ces suites. La série

$$\sum_0^{\infty} P_n(x,y) \quad \text{où} \quad P_n(x,y) = \frac{(y_1x-x_1y)(y_2x-x_2y)\cdots(y_nx-x_ny)}{(y_1a_n-x_1b_n)(y_2a_n-x_2b_n)\cdots(y_na_n-x_nb_n)}$$

converge en chaque point (x_k,y_k) et par suite en chaque point d'un ensemble partout dense dans l'espace R_2. D'autre part, elle diverge en chaque point (a_k,b_k) et par suite elle ne possède aucun domaine de convergence.

[2] F. Leja: Rend. di Palermo, t. 56 (1932), p. 1–27.

peut donner un résultat encore plus précis, concernant le problème (A), en se servant de la notion de *l'écart transfini* d'un ensemble, dont voici la définition:

Soit E un ensemble borné de points de R_2 et

$$p_0, p_1, \cdots, p_n \tag{2}$$

$n+1$ points quelconques appartenant à E. Pour abréger le langage nous nous servirons de la notation suivante: Étant donnés deux points p et q quelconques de l'espace R_2 ayant respectivement les cordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) nous désignérons par pq l'expression suivante:

$$pq = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2) \tag{3}$$

et par $|pq|$ sa valeur absolue. Cela posé, formons les $n+1$ produits que voici:

$$\theta_n^{(i)}(p) = |p_i p_0| \cdots |p_i p_{i-1}| \cdot |p_i p_{i+1}| \cdots |p_i p_n|, \qquad i = 0, 1, \cdots, n.$$

Le plus petit d'eux varie avec les points (2) parcourant E et atteint une borne supérieure qui sera désignée comme il suit:

$$\theta_n = \underset{(p_i \varepsilon E)}{\text{borne sup}} \{\underset{(i)}{\min}\, \theta_n^{(i)}(p)\}.$$

J'ai démontré ailleurs[1] que la suite $\{\sqrt[n]{\theta_n}\}$ tend vers une limite évidemment nonnégative qui sera dite *l'écart transfini* de E et désignée par $\theta(E)$. En se servant de cette constante on peut énoncer le résultat suivant:[1]

I. *Si une série de la forme* (1) *est uniformément bornée dans un ensemble borné E elle possède toujours un domaine de convergence uniforme à condition que l'écart transfini $\theta(E)$ soit positif.*

3. Passons maintenant au problème (B) et supposons que la série (1) soit uniformément bornée dans un ensemble borné E tel qu'on ait $\theta(E) > 0$. Il s'agit de définir le plus grand domaine D dans lequel la série (1) doit toujours être convergente.

Pour ce but considérons $n+1$ points quelconques (2) appartenant à l'ensemble E et soit u un point des coordonnées (x, y) variable dans l'espace R_2. Formons les $n+1$ produits

$$T_n^{(i)}(u; p) = \frac{u p_0}{p_i p_0} \cdots \frac{u p_{i-1}}{p_i p_{i-1}} \cdot \frac{u p_{i+1}}{p_i p_{i+1}} \cdots \frac{u p_n}{p_i p_n}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n. \tag{4}$$

et désignons par

---

[1] Bullet. de l'Acad. Polon. (Sciences mathém.), 1933, p. 453—461.

$$(5) \qquad \max_{(i)} \left| T_n^{(i)}(u;p) \right|$$

le plus grand des modules de ces produits en un point u fixe de l'espace R_2 et par

$$(6) \qquad T_n(u) = \underset{(p_i \varepsilon E)}{\text{borne inf}} \left\{ \max_{(i)} \left| T_n^{(i)}(u;p) \right| \right\}$$

la borne inférieure du maximum (5) lorsque les points (2) parcourent arbitrairemant l'ensemble E. En faisant varier n on obtient une suite de fonctions: $T_1(u)$, $T_2(u)$, $\cdots$, $T_n(u)$, $\cdots$ intimément liées à l'ensemble E et définies dans l'espace entier R_2. On peut démontrer que les fonctions $T_n(u)$ jouissent de la propriété suivante:

II. *La suite* $\left\{ \sqrt[n]{T_n(u)} \right\}$ *converge en chaque point* u *de l'espace* R_2 *vers une limite finie que nous désignerons par*

$$(7) \qquad t(x,y) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{T_n(u)}.$$

La fonction limite $t(x;y)$ *est homogène du degré* 1, *c'est-à-dire elle remplit pour chaque nombre* λ *la condition*

$$t(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot t(x,y).$$

La fonction $t(x,y)$ dépend manifestement de l'ensemble E ce que nous marquerons en posant

$$t(x,y) = t(x,y;E).$$

Notre problème (B) reste dans une intime liaison avec cette dernière fonction. On peut notamment établir le théorème suivant:

III. *Si une série de la forme* (1) *est uniformément bornée dans un ensemble* E *elle converge toujours dans le domaine défini par l'inégalité*

$$t(x,y;E) < 1.$$

Ce domaine ne peut pas être augmenté.

Les démonstrations des théorèmes II et III seront insérées ailleurs.

SUR UNE CLASSE DE POLYNOMES

Par Nikola Obrechkoff, Sofia.

Soit $f(x)$ une fonction arbitraire. On désigne par $\underset{\omega}{\varDelta} f(x)$ d'apres M. Nörlund le quotient

$$\underset{\omega}{\varDelta} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}.$$

Si $f(x)$ admet une dérivé $f'(x)$ nous poserons $\underset{0}{\varDelta} f(x) = f'(x)$.

Soient maintenant $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, des nombres arbitraires différents de zéro. Nous étudierons les polynomes $P_n^{(\omega)}(x)$ de degré n, qui satisfont à la condition

$$\underset{\omega}{\varDelta} P_n^{(\omega)}(x) = \lambda_n P_{n-1}^{(\omega)}(x), \qquad n \geqq 1. \tag{1}$$

Les polynomes d'Appell (Annales de l'École normale supérieure, t. IX, 1880, pp. 119—144) sont des cas particuliers pour $\lambda_n = n$, $\omega = 0$. Les polynomes $\theta_n(x) = \dfrac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} P_n^{(\omega)}(x)$ satisfont à l'équation $\underset{\omega}{\varDelta} \theta_n(x) = \theta_{n-1}(x)$. Donc on peut se borner au cas $\lambda_n = 1$, que nous supposons dans la suite.

Nous avons démontré les théorèmes suivants:

I. Les polynomes $P_n^{(\omega)}(x)$ ont la forme

$$P_n^{(\omega)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\frac{x}{\omega}}{\nu} \omega^\nu c_{n-\nu}, \tag{2}$$

où les c_ν sont des nombres arbitraires.

II. Si l'on pose $\varphi(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} c_\nu z^\nu$, on a

$$(1 + \omega z)^{\frac{x}{\omega}} \varphi(z) = \sum_{0}^{\infty} z^n P_n^{(\omega)}(x). \tag{3}$$

Dans la statistique mathématique on considère les polynomes $p_n(x, a)$ de Charlier, définis par

$$\psi_0(x, a) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}, \ \psi_1(x, a) = \psi_0(x-1, a) - \psi_0(x, c), \ \psi_2(x, a) = \psi_1(x-1, a) - \psi_1(x, a), \cdots, \ \psi_n(x, a) = \psi_0(x, a) p_n(x, a),$$

$$p_n(x, a) = \sum_{\nu=\infty}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \nu! \ a^{-\nu} \binom{x}{\nu}. \tag{4}$$

On voit facilement que les polynomes $\frac{a^n}{n!} p_n(x, a)$ appartiennent à la classe considérée avec $\lambda_n = 1$, $\omega = 1$, $c_\nu = \frac{(-1)^\nu a^\nu}{\nu!}$. Alors de II on obtient le théorème:

III. Pour les polynomes $p_n(x, a)$ on a

$$(1+z)^x e^{-az} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n z^n}{n!} p_n(x, a). \tag{5}$$

D'ici il vient

IV. Les polynomes $p_n(x, a)$ satisfont à la rélation

$$a p_{n+1}(x, a) = (x - a - n) p_n(x, a) - n p_{n-1}(x, a). \tag{6}$$

V. Pour $a > 0$ les zéros du polynome $p_n(x, a)$ sont réels et positifs. Les zéros du $p_{n-1}(x, a)$ séparent les zéros du $p_n(x, a)$.

De la formule (5) on peut obtenir des formules asymptotiques pour les polynomes $p_n(x, a)$ qui seront utiles dans l'étude de la convergence de la série de Charlier.

Les polynomes $p_n(x, a)$ sont orthogonaux et cette propriété permettra d'étudier la question de la convergence de la série de Charlier dans la statistique mathématique.

L'équation (5) a été donné par M. Doetsh (Mathematische Annalen, 109, 1933, p. 257—266).

ÜBER ALLGEMEINE UMKEHRSÄTZE DER LIMITIERUNGSVERFAHREN

Von J. Karamata, Beograd.

Es wird eine Methode vorgeführt die erlaubt die Umkehrungen der Limitierungsverfahren von der allgemeinen Form

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \varphi(x, t)\, d\{s(t)\} \text{ bzw. } \Psi(x) = \int_0^\infty \psi(x, t)\, s(t)\, dt, \quad (x \to \infty)$$

zu erhalten, d. h. aus

$$\Phi(x) \to s \text{ bzw. } \Psi(x) \to s, \quad x \to \infty,$$

auf

$$s(t) \to s, \quad t \to \infty,$$

zu schließen, falls $s(t)$ eine Konvergenzbedingung von der Form

$$\lim_{t=\infty} \sup \max_{t \leq t' \leq T} |s(t') - s(t)| \leqq w(\lambda) \to 0, \quad \lambda \to 1,$$

genügt, wo T durch $A(T)=\lambda A(t)$, $\lambda>1$, bestimmt ist und $A(t)$ eine, vom Verfahren Φ bzw. Ψ abhängige, monoton gegen Unendlich wachsende Funktion ist.

Dies wird ausführlich dargelegt in meinen, unter demselben Titel, in Hamburger Abhandlungen *12*, 46—61 (1937) veröffentlichten Vorträgen.

ON THE ORTHOGONAL SERIES

By S. Kaczmarz, Lwów.

Let $\{\varphi_n(t)\}$ denote an orthonormal system in the interval $(0,1)$. The system is complete in the space X, if the relations

$$\int_0^1 f(t)\,\varphi_n(t)\,dt=0 \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

and $f(t)\,\varepsilon\,X$ imply $f(t)=0$. The completeness in a space, L^p for instance, does not imply the completeness in the space L^q, $q<p$. On the other side, if a system is not complete in a space X it is allways possible to complete the system with functions from the space X.

The following problem was posed by prof. Banach: The orthonormal functions are uniformly bounded and the system $\{\varphi_n(t)\}$ incomplete in the space M of bounded functions. Is it possible to complete the system, with uniformly bounded functions, in the space L^p?

The answer is negative. Let $\{\varphi_n(t)\}$ be the trigonometrical system and $f(t)$ a function belonging to L^p but $f(t)$ *non* ε M. Put

$$a_n=\int_0^1 f(t)\,\varphi_n(t)\,dt$$

and consider the functions

$$g_n(t)=a_n\,\varphi_1(t)-a_1\,\varphi_n(t).$$

It is known that the system $\{g_n(t)\}$ is complete in M and incomplete in L^p, but it is not orthonormal. The orthogonalisation of $\{g_n\}$ by the method of Schmidt leads to

$$h_n(t)=\lambda_n[\mu_{1n}\,g_1(t)+\cdots\cdots+\mu_{nn}\,g_n(t)],\quad n=1,2,\cdots\cdots$$

where

$$\mu_{kn} = a_k \cdot a_n, \quad k = 1, 2 \cdots n-1,$$

$$-\mu_{nn} = a_1^2 + \sum_1^{n-1} a_j^2.$$

The system $\{h_n\}$ is orthonormal, uniformly bounded, complete in M and incomplete in L^p. The function $f(t)$ completes the system, but it is not bounded.

This result can be extended.

ÜBER DIE AUFLÖSUNG VON GLEICHUNGEN MIT UNENDLICHVIELEN UNBEKANNTEN IN LINEAREN TOPOLOGISCHEN RÄUMEN

Von Gottfried Köthe, Münster (Westfalen).

λ sei ein vollkommener linearer Koordinatenraum (vgl. G. Köthe und O. Toeplitz, Journal f. d. reine u. angew. Math. 171 (1934), S. 193—226). Es wird untersucht, wann das folgende Lösbarkeitskriterium gilt:

(L). $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ sei eine unendliche Matrix, die λ in sich überführt, $\mathfrak{c} = (c_1, c_2, \cdots)$ ein gegebenes, $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \cdots)$ ein beliebiges Element aus λ. Das unendliche Gleichungssystem

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c} \quad d.\ h. \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i, \quad i = 1, 2, \cdots$$

ist dann und nur dann lösbar, wenn für jede Folge $\mathfrak{u}^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \cdots)$ aus dem dualen Raum λ^* aus der schwachen Konvergenz von

$$\mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{A} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^{(n)} a_{i1}, \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{(n)} a_{i2}, \cdots\right) \text{ gegen } (0, 0, \cdots)$$

stets

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{u}^{(n)} \mathfrak{c} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{(n)} c_i = 0 \text{ folgt.}$$

(Für starke statt schwache Konvergenz ist (L) im Hilbertschen Raum von E. Schmidt aufgestellt worden und von F. Riesz und St. Banach auf lineare Funktionale von beliebigen metrischen Räumen verallgemeinert worden.)

Es gilt nun folgendes: Ist λ metrisch bezüglich der starken Konvergenz, so gilt (L) dann und nur dann, wenn jede beschränkte unendliche Menge von Elementen aus λ eine schwach konvergente Teilfolge enthält. (L) gilt also z. B. im Hilbertschen Raum, dagegen nicht im Raum aller $\mathfrak{x}$ mit konvergenter $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

(L) gilt auch in gewissen nichtmetrischen vollkommenen Koordinatenräumen, so in φ, ω, $\varphi+\omega$, aber nicht in $\omega\varphi$, dem Raum aller Elemente

$$\mathfrak{x}=(x_{11}, x_{12}, \cdots | \cdots | x_{i1}, x_{i2}, \cdots | \cdots),$$

die in jeder der unendlich vielen Abteilungen nur je endlich viele von Null verschiedene Koordinaten besitzen.

Für *die* Gleichungssysteme in $\omega\varphi$, deren Matrizen $\mathfrak{A}$ der Bedingung (L) genügen, läßt sich eine volle Auflösungstheorie nach dem Muster der Theorie im halbfiniten Raum $\varphi+\omega$ (vgl. G. Köthe u. O. Toeplitz, Journal f. d. reine u. angew. Math. 165 (1931), S. 116—127) durchführen.

AN INEQUALITY OF THE HÖLDER TYPE CONNECTED WITH STIELTJES INTEGRATION

By L. C. Young, Cambridge.

In the elementary Stieltjes integral $\int f dg$ — and *a fortiori* its Lebesgue extension — there is little symmetry between the conditions required of f and g.

We obtain a symmetrical theory, by supposing that f and g satisfy conditions of bounded variation of order >1. We say that $f \lessdot W_p$, if $\Sigma |\Delta f|^p$ is bounded for non-overlapping Δ.

When $f \lessdot W_p$ and $g \lessdot W_q$, the curve $f(t)$, $g(t)$ may fill an area, if $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leqq 1$; we cannot then, in general, define the integral.

But if $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$ and $p \leqq q$ say, the curve's greatest Carathéodory-dimension is $2-p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)$. In this case, the existence of the integral follows from a new elementary inequality:

Let $x_1, \cdots, x_m$ and $y_1, \cdots, y_m$ be derived from the fixed sequences $a=a_1, \cdots, a_N$ and $b=b_1, \cdots, b_N$ by replacing in each $(N-m)$ of the "," by "+", and let the maxima of the corresponding values of $(\Sigma |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ and $(\Sigma |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ be $S_p(a)$, $S_q(b)$. Then

$$\left|\sum_{0<i\leqq j\leqq N}\sum a_i b_j\right| \leqq \zeta_N\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) S_p(a)\, S_q(b)$$

where $\zeta_N(s)=\sum_1^N n^{-s}$.

SOME REMARKS ON NON-SEPARABLE BANACH SPACES

By M. H. Stone, Cambridge, Mass.

It is the object of these remarks to announce generalizations of some well-known properties of separable Banach spaces. Detailed proofs will be given elsewhere. If we introduce in the class of all continuous functions on a bicompact Hausdorff space the usual norm, maximum of the absolute value, we obtain a Banach space, which we shall refer to here as a space of continuous functions. Our first result is that an arbitrary Banach space is isomorphic (algebraically and metrically) to a closed linear manifold in a suitably chosen space of continuous functions. The proof is similar to that of Banach for the separable case, where the space of continuous functions may be taken once for all as that defined over the unit interval. Our second result is that two spaces of continuous functions are isomorphic if and only if their underlying domain-spaces are topologically equivalent. Banach's proof for the separable case involves properties of *sequences* of difference-quotients and is therefore replaced with advantage by a similarly-motivated but technically quite different proof. This result is incorporated in a paper on general topology which has already been offered for publication to the Transactions of the American Mathematical Society.

SUR UN PROBLÈME CONCERNANT LES FONCTIONS SEMI-CONTINUES

Par Waclaw Sierpiński, Varsovie.

Disons qu'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ jouit de la propriété P, si tout ensemble linéaire indénombrable contient un sous-ensemble indénombrable sur lequel la fonction $f(x)$ est continue.

Il est aisé de voir qu'il existe des fonctions d'une variable réelle, même non mesurables, jouissant de la propriété P. Telles sont p. e. toutes les fonctions d'une variable réelle dont l'ensemble de valeurs est au plus dénombrable, en particulier les fonctions caractéristiques des ensembles linéaires non mesurables.

Beaucoup plus difficile est le problème d'existence de fonctions d'une variable réelle dépourvues de la propriété P. En effet, dans l'état actuel de la science nous ne savons démontrer l'existence de telles fonctions qu'en admettant l'hypothèse du continu.

C'est en utilisant cette hypothèse, que M. A. ZYGMUND et moi nous avons démontré en 1923[1] qu'il existe une fonction d'une variable réelle qui est discontinue sur tout ensemble indénombrable.

Or, on pourrait croire que si nous ne savons pas démontrer l'existence de fonctions d'une nature donnée qu'en admettant l'hypothèse du continu, ces fonctions sont fort compliquées et ne peuvent pas appartenir aux classes simples et connues de fonctions, p. e. aux classes de Baire.

Nous verrons cependant que déjà parmi les fonctions semi-continues on trouve des fonctions qui ne jouissent pas de la propriété P, et même qu'on sait définir effectivement (nommer) de telles fonctions, seulement la démonstration qu'elles ne jouissent pas de la propriété P utilise l'hypothèse du continu.

La méthode de la construction d'une fonction semi-continue supérieurement, dont nous prouverons ensuite en admettant l'hypothèse du continu qu'elle ne jouit pas de la propriété P, sera basée sur une modification d'un raisonnement de M. N. LUSIN qui servait d'ailleurs à un autre but.[2]

Tout d'abord on construit un système d'ensembles parfaits $\{P_{n_1, n_2, \cdots, n_k}\}$ situés dans l'intervalle $(0,1)$ et assujettis aux conditions: les ensembles P_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ sont disjoints deux à deux, non denses et tels que leur somme est dense dans $(0,1)$, et, quels que soient les nombres naturels $k, n_1, n_2, \cdots, n_k$, les ensembles $P_{n_1, n_2, \cdots, n_k, n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ sont de diamètre $<\frac{1}{k}$, disjoints deux à deux, situés dans $P_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ et tels que l'ensemble $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{n_1, n_2, \cdots, n_k, n}$ est dense dans $P_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ tandis que chacun des ensembles $P_{n_1, n_2, \cdots, n_k, n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ y est non dense.

Posons, pour $k=1, 2, 3, \cdots$

$$S_k = \sum_{n_1, n_2, \cdots, n_k} P_{n_1, n_2, \cdots, n_k},$$

ou la summation s'étend à tous les systèmes de k nombres naturels $n_1, n_2, \cdots, n_k$, et

$$T = S_1 S_2 S_3 \cdots\cdots$$

Soit y un nombre réel >0 et $\leqq 1$ et

$$y = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2+n_3}} + \cdots\cdots$$

son développement en fraction dyadique contenant une infinité de chiffres non nuls. On déduit de la définition des ensembles $P_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ que

$$Z(y) = P_{n_1} P_{n_1, n_2} P_{n_1, n_2, n_3} \cdots\cdots$$

[1] *Fundamenta Mathematicae* t IV, p. 318.

[2] N. LUSIN, *Fund. Math.* t. XXI, p. 119–122; cf. aussi mon livre *Hypothèse du continu* (Monografje Matematyczne t. IV) Warszawa 1934, p. 65–67.

est un point bien déterminé de l'ensemble T. La fonction $Z(y)$ établit, comme on voit sans peine, une correspondance biunivoque entre les nombres réels y, tels que $0 < y \leqq 1$ et les points de l'ensemble T, et on voit sans peine que la fonction $Z(y)$ est continue dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0,1)$.

Or, on démontre que la fonction $f(x)$ définie dans l'ensemble T comme fonction inverse à la fonction $Z(y)$ (définie pour $0 < y \leqq 1$) est dans T semi-continue supérieurement. Or, en tant que bornée dans T, elle peut être étendue à une fonction bornée $f(x)$ d'une variable réelle semi-continue supérieurement.

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Comme l'a démontré M. Lusin,[1] il existe alors un ensemble linéaire indénombrable L qui ne contient aucun sous-ensemble indénombrable non dense, et nous pouvons supposer que $L \subset N$.

Tout à fait comme l'a fait M. Lusin dans sa note du t. 21 des *Fund. Math.* on démontre que l'ensemble $E = Z(L)$ est toujours de 1^{re} catégorie.

Soit maintenant H un sous-ensemble indénombrable de E et supposons que la fonction $f(x)$ est continue sur H. Comme $E = Z(L)$, on a $L = f(E)$, donc, d'après l'inclusion $H \subset E$, on a $f(H) \subset f(E) = L$. L'ensemble $f(H)$ est donc indénombrable et (en tant que contenu dans L) ne contient aucun sous-ensemble indénombrable non dense. Un tel ensemble ne jouit pas, comme on sait, de la propriété de Baire. Or, la fonction f étant, d'après l'hypothèse, continue sur H et la fonction $Z(y)$ étant continue sur N, donc, à plus forte raison, sur $f(H) \subset L \subset N$, la fonction $f(x)$ établit une homéomorphie entre les ensembles H et $f(H)$. L'ensemble H étant toujours de 1^{re} catégorie (comme $H \subset E$), il en est donc de même de l'ensemble $f(H)$, ce qui est impossible, l'ensemble $f(H)$ ne jouissant pas de la propriété de Baire.

La fonction $f(x)$ est donc discontinue sur tout sous-ensemble indénombrable H de l'ensemble E. Par conséquent, la fonction $f(x)$ ne jouit pas de la propriété P, c. q. f. d.

Pour plus de détails je renvoie le lecteur à mon travail qui paraîtra dans le t. 28 des *Fundamenta Mathematicae*, p. 1.

Il est à remarquer qu'on peut aussi démontrer la proposition suivante:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une fonction* $f(x)$ *d'une variable réelle de première classe de Baire et un ensemble indénombrable* E, *tel que la fonction* $f(x)$ *n'est pas semi-continue supérieurement sur aucun sous-ensemble indénombrable de* E.[2]

[1] C. R. Paris t. 158, p. 1259; v. aussi *Fund. Math.* t. VI, p. 155.

[2] Voir ma note « Sur un problème concernant les fonctions de première classe ». Fund. Math. t. 26.

SECTION III

Géométrie et topologie

ÜBER LOKALE ZERSCHNEIDUNG DES RAUMES

Von K. Zarankiewicz, Warszawa.

Es wurden einige vom Verfasser gefundene Resultate über lokale Zerschneidung der euklidischen Räume durch Kontinua dargestellt.

Teilweise sind diese Resultate schon publiziert worden, die übrigen werden in Fundamenta Mathematicae veröffentlicht.

LA DIMENSION ET LA MESURE

Par Edward Szpilrajn, Warszawa.

Le but de cette communication est de lier la notion de mesure et celle de dimension au sens de Brouwer-Menger-Urysohn.[1]

Un ensemble arbitraire E situé dans un espace métrique est *de mesure p-dimensionnelle nulle* (au sens de Carathéodory-Hausdorff[2]), lorsqu'il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ une décomposition $E = E_1 + E_2 + \cdots$ telle que $\sum_{j=1}^{\infty} [\delta(E_j)]^p < \varepsilon$ (où p est un nombre réel > 0).[3]

En renforçant un théorème de M. Nöbeling[4], j'obtiens le

Théorème 1. *Chaque ensemble (situé dans un espace métrique) de mesure $(n+1)$-dimensionnelle nulle $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ est de dimension $\leqq n$.*

En modifiant et généralisant un résultat de MM. Pontrjagin et Schnirelmann,[5] j'obtiens le

Théorème 2. *Chaque ensemble de dimension $\leqq n$ (situé dans un espace métrique séparable; $n = 0, 1, 2, \cdots$) est homéomorphe à un ensemble (situé dans le cube $(2n+1)$-dimensionnel) de mesure p-dimensionnelle nulle pour tous les nombres réels $p > n$.*

Les théorèmes 1 et 2 entraînent le

Corollaire 3. *Pour qu'un ensemble (situé dans un espace métrique séparable) soit de dimension $\leqq n$ (où $n = 0, 1, 2, \cdots$) il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un ensemble (situé dans le cube $(2n+1)$ dimensionnel) de mesure $(n+1)$-dimensionnelle nulle.*

---

[1] Les énonces plus précis et les démonstrations seront publiés dans les Fundamenta Mathematicae 28 (1937).

[2] Voir Hausdorff, Math. Ann. 79 (1919), p. 163 et Saks, Theory of integral, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów (à paraître), pp. 53 et 54.

[3] δ (Z) désigne le diamètre de l'ensemble Z.

[4] Erg. Wien. Kolloquiums 3 (1932), p. 24.

[5] Annals of Mathematics 23 (1932), p. 161.

SUR LA THÉORIE DU GROUPE FONDAMENTAL

Par F. MARTY, Marseille.

1. Il a été donné un certain nombre de méthodes combinatoires pour définir les « chemins » dont la combinaison fournit les éléments du groupe fondamental. J'ai dans un mémoire récent[1] indiqué comment on peut procéder en envisageant seulement des simplexes ou des cellules des dimensions n et $n-1$. (n dimension de la variété envisagée.)

Cette définition n'était valable que pour des variétés non étranglées, c'est à dire telles que étant donné deux simplexes de dimension n il existe toujours allant de l'un à l'autre une chaîne de simplexes de dimension n ayant avec le précédent et le suivant tous les sommets en commun sauf un, et cette propriété subsistant à l'intérieur de toute sousvariété connexe contenant les deux simplexes donnés en la complétant le cas échéant par des simplexes incidents à un simplexe d'elle même.

Le résultat que je voulais signaler est le suivant:

Etant donné une variété présentant des étranglements, il existe toujours une variété nonétranglée possédant le même groupe fondamental, obtenue en complétant la variété initiale par des points voisins des points d'étranglement.

2. Etant donné un complexe de recouvrement non ramifié d'un complexe donné, le groupe fondamental du recouvrement est un sous-groupe de celui du support. Si le recouvrement est ramifié il existe un groupe auxiliaire tel que le groupe du support en soit groupe facteur tandis que le groupe du recouvrement en est sousgroupe. (Le groupe auxiliaire étant lui groupe fondamental d'une perforation de K.)

3. On sait que les groupes d'homologie si lisent facilement quand on connaît les matrices d'incidence du simplexe. Il est intéressant de remarquer ainsi que je l'ai montré dans le mémoire précité que le groupe fondamental est mis en évidence lorsque l'on envisage non plus les matrices d'incidence mais la matrice des contacts, produit de la matrice des incidences par sa matrice transposée.

---

[1] Annales de l'Ecole Normale Supérieure (3), LIII, 1936, p. 100.

ON EQUIVALENT SETS OF ELEMENTS IN A FREE GROUP

By J. H. C. WHITEHEAD, Oxford.

Two kinds of equivalence are considered, the first of which has already been elucidated by J. Nielsen. This is the equivalence of sets of elements $(a_1, \cdots, a_m)$ under transformations of the form $a_\lambda \rightarrow a_\lambda a_\mu^{\pm 1}$ or $a_\mu^{\pm 1} a_\lambda$ and $a_\lambda \rightarrow a_\lambda^{-1}$. A graphical form is given to certain arguments used by Nielsen and a theorem is added which simplifies the test for equivalence. In the second part of the paper two sets of elements $(W_1, \cdots, W_m)$ and $(W_1^*, \cdots, W_m^*)$ in a free group G, are called equivalent if there is an automorphism of G which carries W_λ into W_λ^* for each value of λ. Using topological methods, a finite process is given which will exhibit the equivalence of equivalent sets. Here the words W_λ and W_*^λ may be 'true' or cyclic words and the equivalence test applies to sets of classes of elements as well as to sets of elements.

ON THE GROUP OF A CERTAIN LINKAGE

By M. H. A. NEWMAN, Cambridge, and J. H. C. WHITEHEAD, Oxford.

In a recent paper[1] of Whitehead's it was shown that the residual set, in Cartesian 3-space, R^3, of a certain closed set T_∞ is a space whose fundamental group is unity, and in which every finite 2-cycle bounds a finite 3-chain; but that $R^3 - T_\infty$ is not the semi-linear homoeomorph of R^3 itself. The set T_∞ was defined as the inner limiting set of a sequence of 'tubes', (solid rings), T_n. That $R^3 - T_\infty$ and R^3 are not homoeomorphic was deduced from the fact that there is a simple closed curve, C, in $R^3 - T_\infty$ which cannot be 'disentangled' from T_∞, i. e. is such that there is no semi-linear 3-cell containing C, but not meeting T_∞; and this in its turn follows from the same property of T_n.

In the paper summarised in this communication a new proof of this last fact is given, by calculating the group of the linkage formed by C and the 'core' of T_n. It is shown that the group is not the free group with two generators, and from this it follows that T_n and C cannot be disentangled, in the more general sense that there is no closed 3-cell (topological image of $x^2+y^2+z^2 \leq 1$) in R^3 containing C but not meeting T_n. This leads to the full result, that $R^3 - T_\infty$ is not the homoeomorph, in the general sense, of R^3.

---

[1] J. H. C. Whitehead. A certain open manifold whose group is unity, Quartely Journal of Math. 1935 (6) 208.

TOPOLOGIE DES TRANSFORMATIONS

Par B. DE KEREKJÁRTÓ, Szeged.

Le problème d'homéomorphie de deux transformations est le suivant: Si V et V' sont deux variétés homéomorphes, ensuite si T et T' sont des transformations topologiques de ces variétés en elles-mêmes, sous quelles conditions concernant ces transformations existe-t-il une transformation topologique τ de V en V' telle que T' soit la transformée de T par τ: $T' = \tau^{-1} T \tau$. La transformation T sera appelée régulière au point P de V, si les puissances de T forment une suite uniformément continue au point P; les points de V pour lesquels cette condition n'est pas vérifiée sont les points singuliers de T. L'ensemble des points singuliers d'une transformation T forme un invariant topologique de T en ce sens que les points singuliers de deux transformations T et T', homéomorphes entre elles, se correspondent par la transformation τ qui établit l'homéomorphie de T et de T'. — En cas que V' est une surface analytique close et T' est une représentation conforme de V' en elle-même, T' n'admet aucun point singulier, si le genre de V' est $p \geqq 1$, et elle admet deux points singuliers, au plus, pour $p=0$. Ce fait nous donne une condition nécessaire pour qu'une transformation topologique d'une surface en elle-même soit homéomorphe à une représentation conforme; j'ai démontré que cette condition est aussi suffisante pour l'homéomorphie de la transformation à une représentation conforme. — La notion de point régulier ou singulier d'une transformation s'applique aussi aux groupes. J'ai démontré que les transformations d'un groupe continu appliquées dans l'espace du groupe sont régulières en tout point de cet espace. Les groupes des géométries euclidienne et non-euclidiennes ne contiennent que des transformations régulières; cette circonstance facilite la caractérisation topologique de ces groupes. Aussi le groupe homographique peut être caractérisé d'une façon simple à l'aide de ces notions. — Dans les problèmes dynamiques, la notion de stabilité permanente est en rapport direct avec la notion de régularité d'une transformation. Pour en citer un exemple, j'ai démontré qu'une transformation topologique d'une surface close de genre $p > 1$ en elle-même admettant un point régulier ne peut pas satisfaire à la condition de transitivité métrique; cela revient à dire que pour un système dynamique à deux degrés de liberté qui admet une surface de section de genre $p > 1$, l'existence d'une solution qui possède la stabilité permanente exclut l'ergodicité du système. — Les détails de la conférence seront publiés dans un mémoire qui paraîtra dans l'Enseignement Mathématique.

ÜBER ADDITION DER ABBILDUNGSKLASSEN

Von KAROL BORSUK, Warszawa.

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen separablen Raumes M und N ein lokal zusammenziehbares Kompaktum. Die Gesamtheit $N^M(A,p)$ aller stetigen Abbildungen φ von M in N, die in A einen festen Wert $p \varepsilon N$ annehmen, zerfällt in Abbildungsklassen (Homotopietypen) der zu einander in $N^M(A,p)$ homotopen Abbildungen. Sind φ_1 und φ_{-1} zwei Elemente von $N^M(A,p)$, und gibt es eine Zerlegung von M in zwei abgeschlossene Teilmengen M_1 und M_{-1} von der Art, daß es eine zur selben Abbildungsklasse wie φ_i gehörende Abbildung φ'_i gibt, für die $\varphi'_i(x) = p$ für jedes x gilt, so setzen wir $\varphi'(x) = \varphi'_{-i}(x)$ für jedes $x \varepsilon M_i$. Wir bezeichnen ferner mit $\alpha(\varphi_1, \varphi_{-1})$ die Gesamtheit aller Abbildungen, die in $N^M(A,p)$ zu einer derartigen Funktion φ' homotop sind.

Die auf diese Art definierte Operation α gibt in ihrem Definitionsbereiche einen Anlaß zu einer Homologie- bzw. Homotopietypenaddition; das ermöglicht in gewissen Fällen verschiedene Abbildungsklassengruppen zu definieren. Hierunter fallen insbesondere die sog. n-dimensionalen *Homotopiegruppen* von HUREWICZ, die dem Fall, wo M eine n-dimensionale euklidische Sphäre S_n ist und A aus einem einzigen Punkt besteht, entsprechen, ferner die Gruppen, welche neulich FREUDENTHAL eingeführt hat (sog. HOPF*sche Gruppen*), die dem Fall $N = S_n$ entsprechen, wobei die von FREUDENTHAL gemachte Voraussetzungen durch wesentlich schwächere ersetzt werden. Die Operation α führt auch zu gewissen Gruppen im Falle, wo N eine Gruppe ist, ferner auch dann, wenn es sich nicht um die Homotopie-, sondern um die Homologietypen handelt.

ÜBER DIE KLASSIFIKATION DER HALBLINEAREN TRANSFORMATIONEN

Von J. HAANTJES, Delft.

Es sei K ein kommutativer Körper von einer Charakteristik Null und I ein Automorphismus dieses Körpers. Dieses Automorphismus sei von der Ordnung h, d. h. h-malige Anwendung des Automorphismus ergibt den identischen Automorphismus. Wir nennen das Element α^I, das man durch Anwendung des Automorphismus I aus dem Element α bekommt, das konjugierte Element von α in bezug auf I. In einem n-dimensionalen Vektorraum über dem Körper K (Bezeichnung $E_n(K)$) nennt man eine Punkt-transformation halblinear, wenn die Bestimmungszahlen des neuen Punktes linear homogene Funktionen der konjugierten (in bezug auf I) der Bestimmungszahlen des alten Punktes sind.

Es sei P eine halblineare Transformation. h-malige Anwendung von P ergibt eine lineare Transformation $Q=P^h$. Die $E_n(K)$ zerfällt eindeutig in bei Q invarianten Teilräume und zu jedem Teilraum gehört ein Primpolynom $\Pi(x)$, Teiler des charakteristischen Polynoms $\Psi(x)$ von Q. Man kann nun, indem man die Invarianz dieser Teilräume bei der Transformation P studiert, Normalformen für die halblinearen Transformationen angeben. Es stellt sich heraus:

Ist x nicht Teiler des charakteristischen Polynoms $\Psi(x)$ von Q, so ist die Normalform von P von der Normalform von Q bestimmt.

Ist dagegen x Teiler von $\Psi(x)$ (es existiert also mindestens ein Vektor $v \neq 0$, für den $Qv=0$ ist), *so können zu einer Normalform von Q mehrere Normalformen von P gehören.*

ÜBER DEN GEMISCHTEN INHALT ZWEIER BEREICHE

Von Harald Geppert, Gießen.

Die Verschärfungen des Brunn-Minkowskischen Satzes über ebene Eibereiche bemühen sich um die Feststellung, unter welchen Bedingungen der Flächeninhalt $F(\lambda)$ der Bereiche einer Linearschar (und nicht nur, wie jener Satz besagt, die Quadratwurzel aus diesem) konkave Funktion des Scharparameters λ ist. Zur allgemeinen Beantwortung dieser Frage ist es zweckmäßig, nicht nur Eibereiche, sondern überhaupt stützbare Bereiche zu betrachten, d. h. solche, die durch eine Stützfunktion $h(\varphi)$ beschrieben werden können; letzteres ist immer dann der Fall, wenn die Randkurve geschlossen ist und zu jeder Richtung genau zwei senkrechte Tangenten besitzt. Für jeden stützbaren Bereich ist

$$F=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(h^2-h'^2)\,d\varphi$$

der Flächeninhalt, wenn dem zu wachsendem φ gehörigen Umlaufssinn der Randkurve Rechnung getragen wird. Erklärt man die Addition stützbarer Bereiche durch die Addition ihrer Stützfunktionen, so ist der gemischte Flächeninhalt der beiden, zu den Stützfunktionen $h_1(\varphi)$ und $h_2(\varphi)$ gehörigen Bereiche B_1 und B_2 durch

$$F_{12} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h_1 h_2 - h'_1 h'_2) \, d\varphi$$

gegeben. Es gilt dann der folgende Satz:

Notwendig und hinreichend dafür, daß der Flächeninhalt $F(\lambda)$ in der von B_1 und B_2 bestimmten Linearschar im Bereiche positiver Werte konkave Funktion von λ sei, ist das Vorhandensein eines stützbaren, nicht punktförmigen Bereiches B_3 mit nichtnegativem Flächeninhalt, für den

$$F_{13} = F_{23}$$

gilt.

In diesem Ergebnis sind alle bisher bekannten Konkavitätsbedingungen als Spezialfälle enthalten, indem B_3 gleich einem Kreis, einer Strecke oder einem Dreieck ist. Der in einer Abhandlung in der Math. Zeitschrift wiedergegebene Beweis stützt sich auf die Fourierentwicklung der Stützfunktion. Aus obigem Satze folgt sofort für beliebige stützbare Bereiche die für Eibereiche von Frobenius herrührende Ungleichung

$$\frac{F_{11}}{F_{13}^2} - 2\frac{F_{12}}{F_{13} F_{23}} + \frac{F_{22}}{F_{23}^2} \leqq 0,$$

in der die Brunn-Minkowskische Ungleichung $F_{12}^2 \geqq F_{11} F_{22}$ enthalten ist.

Ganz entsprechende Sätze lassen sich über die Oberflächen geschlossener stützbarer Flächen im Raume gewinnen und mittels der Entwicklung der Stützfunktion nach Kugelfunktionen beweisen.

GÉNÉRALISATION D'UNE RÉDUCTION D'ERRERA DANS LE PROBLÈME DES QUATRE COULEURS

Par I. Ratib et C. E. Winn, Le Caire.

Errera[1] a montré la réductibilité d'un anneau R composé (a) d'un polygone quelconque x et d'un nombre pair de pentagones (b) de deux polygones quelconques y et z et d'un nombre pair de pentagones à condition qu'un isthme ne soit pas formé dans la figure réduite.

On établit ces réductions sans aucune restriction en démontrant que si un isthme se trouve dans la réduction il existe aussi un anneau plus petit du type (a) ou (b) c'est-à-dire composé d'un nombre inférieur de polygones. Si encore dans la réduction de celui-ci on admet un isthme,

[1] Bulletin de la Société Mathématique de France t. LIII; p. 42—55.

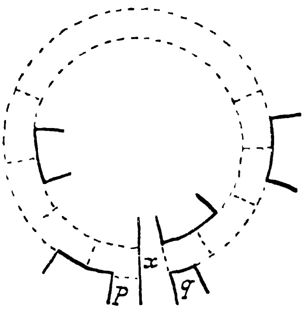


Fig. 1

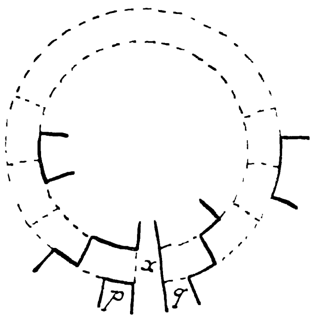


Fig. 2

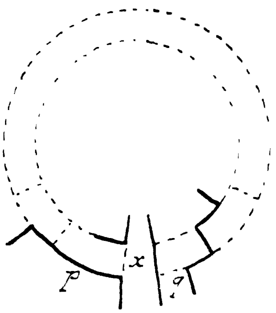


Fig. 3

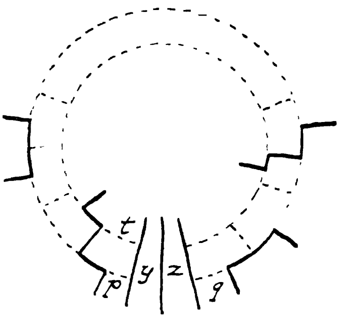


Fig. 4

on en dérive un plus petit. Ainsi on arrive à un anneau dont la réduction ne contient pas d'isthme ou à un anneau composé de 3 ou 4 polygones, ce qui est réductible d'après Birkhoff.[1]

On en déduit que les ensembles de pentagones dans un réseau irréductible sont simplement connexes, ce qui simplifie un travail de Reynolds.[2]

La réduction se fait en suprimant les lignes pointillées des fig. 1, 2, 3 pour type (a) et 4 pour (b).

Un isthme dans la carte réduite peut:

1°) traverser R

2°) longer en partie sans traverser R

3°) ne pas rencontrer R.

Dans les deux premiers cas, la présence d'un isthme implique au moins un polygone ayant deux contacts séparés avec R. Ce polygone complète avec une partie des pentagones de R un anneau S du type (a) ou (b) suivant que le nombre de ces pentagones est pair ou impair. S est

[1] The reducibility of Maps. American Journal of Mathematics XXXV (2), 1913, p. 115—128.

[2] On the problem of coloring Maps in four colors. Annuals of Mathematics XXVIII, 1927, p. 477—492.

plus petit que R à moins qu'un seul pays ait deux contacts et soit en p et q seulement dans fig. 1. Mais dans ce cas la réduction de fig. 2 ne donne pas d'isthme. Dans fig. 3 on a S toujours plus petit que R.

En traitant le cas 3° on peut supposer l'absence d'un polygone ayant des contacts distincts avec R, si non on aurait un plus petit anneau de type (a). On note d'abord que les deux polygones séparés par l'isthme ont chacun un contact séparé avec R qui sont reliés, d'après la réduction même, par un nombre pair de pentagones. On dérive ainsi un anneau de type (b) ayant un nombre inférieur de polygones, à moins que les contacts soient *seulement* avec les pentagones extrêmes. Et ce cas ne se produit que si toutes les deux paires extrêmes ont leurs sommets libres du même côté de R. Sinon, il est clair de fig. 4 que la rencontre de p et q ne forme plus d'isthme, parce que selon notre supposition, t n'a pas de second contact avec R. Enfin quand les sommets libres des paires extrêmes sont tous du même côté de R, on voit que les sommets correspondants de l'anneau dérivé sont des côtés opposés. La réduction suivante nous fournira donc un plus petit anneau.

CONTRIBUTIONS A LA THÉORIE DES GRAPHES

Par TH. MOTZKIN, Jérusalem.

L'introduction de la notion du groupe d'automorphismes dans la théorie des graphes donne lieu à des théorèmes dont voici deux exemples.

Un graphe G est dit *homogène*[1] si tous ses éléments sont conjugués, c-à-d. transformables l'un dans l'autre par un automorphisme de G. Chaque paire de G donne naissance à deux paires ordonnées; si toutes ces paires sont conjuguées, G est *isotrope*. Un graphe qui n'est pas isotrope est *hémiisotrope* si toutes ses paires non ordonnées sont conjuguées.

Toutes les paires de G conjuguées à une paire donnée constituent une *classe* de paires. A chaque classe de paires ordonnées correspond la classe *inverse* des mêmes paires, inversement ordonnées, et ces deux classes — qui peuvent d'ailleurs coïncider — correspondent à une seule classe de paires non ordonnées. Soient o et p les nombres de classes de paires conjuguées ordonnées respectivement non ordonnées. Alors les graphes hémiisotropes (isotropes) sont caractérisés par $o=2$, $p=1$ ($o=p=1$).

Appelons *valence* (degré) d'une classe le nombre de paires de cette classe qui contiennent (pour les paires ordonnées: qui commencent avec)

[1] Ce terme a été employé par URYSOHN dans un sens analogue.

un élément arbitraire, donné d'avance. Pour un graphe homogène fini, la valence d'une classe est égale à celle de son inverse. Comme ces deux classes sont toujours différentes si $o=2p$, et que la valence totale du graphe est égale à la somme des valences des différentes classes de paires ordonnées, on reconnaît la vérité du

Théorème I. La valence d'un graphe homogène fini avec $o=2p$ est paire. — *Corollaire.* Il n'existe pas de graphe homogène hémiisotrope fini de valence impaire.

L'extension, pour la valence 3, de ce résultat aux graphes infinis est donnée par le

Théorème II[1]. Il n'existe pas de graphe homogène hémiisotrope de valence 3.

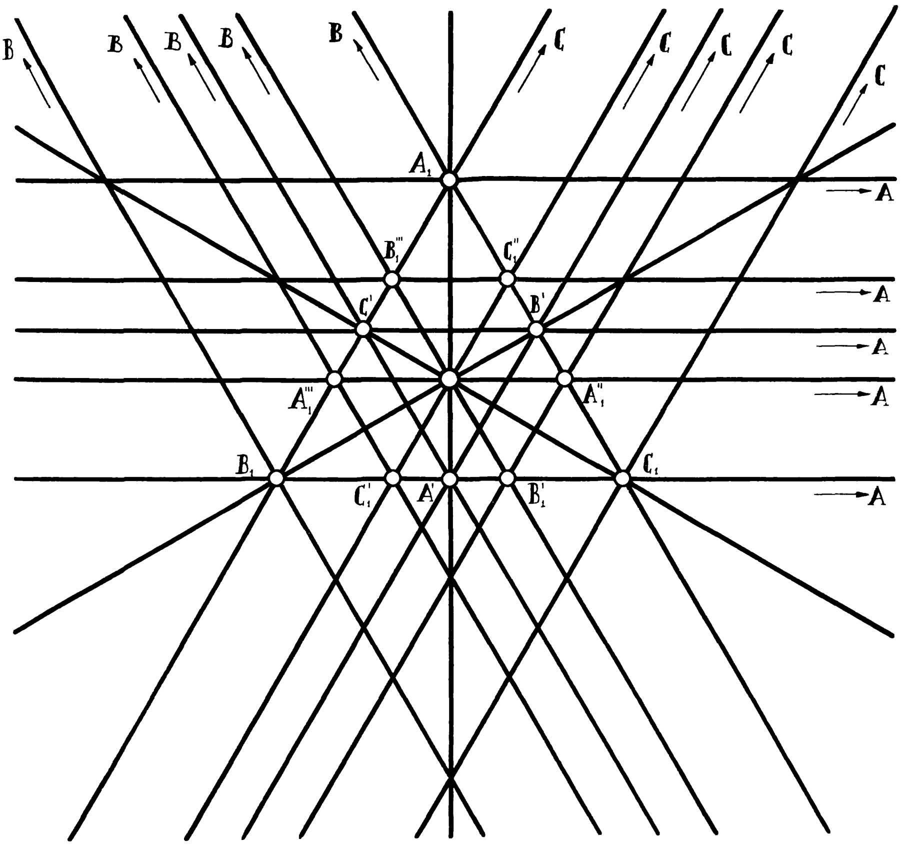
Car soit G un tel graphe. Des deux classes de paires ordonnées de G, l'une H a la valence 1, tandis que l'autre, l'inverse de H, a la valence 2. Comme l'arbre infinie de valence 3 est isotrope, G doit contenir un anneau I. Deux paires de H ne commençant jamais avec le même élément, les paires de I sont ordonnées par H de façon cyclique. H consiste de paires conjuguées dont chacune, par conséquence, doit appartenir à un tel cycle. Prenons une paire de H qui aboutit à I; le cycle qui la contiendrait, s'y joindrait à I, mais ne pourrait nulle part s'en séparer. C'est cette contradiction qui démontre le théorème.

A SYNTHETIC PROPERTY OF THE NINE INFLEXION POINTS OF AN ORDINARY PLANE CUBIC

By H. Rafael, Liège.

The so-called *Hesse configuration* of the nine inflexion points of an ordinary plane cubic may be obtained synthetically as follows: Let $A_1 B_1 C_1$ be any triangle (which in the theory of cubics will be called *syzygetic*) and O any point of its plane, out of the three lines $A_1 B_1$, $C_1 A_1$, $B_1 C_1$. Let us join OA_1 and call A' the intersection of OA_1 and $B_1 C_1$; in the same way, let B' be the intersection of OB_1 and $C_1 A_1$ and C' be the intersection of OC_1 and $A_1 B_1$; let us construct the three harmonic pencils $O(B_1 C_1 A' A)$, $O(C_1 A_1 B' B)$ and $O(A_1 B_1 C' C)$. The six couples of rays $OAA''_1 A'''_1$ and $OA' A_1$, $OBB'_1 B'''_1$ and $OB' B_1$, $OCC'_1 C''_1$ and $OC' C_1$ are six rays of an involutory set, for $(A' C_1 B'_1 B_1) = (A' B_1 C'_1 C_1)$ because

[1] Certains procédés permettent à trouver des exemples de graphes homogènes hémiisotropes infinis de chaque valence $v>3$.



both are harmonic sets; therefore, A' being a double point and C_1 and B_1 being in double correspondence, the set $A'A'$, $B_1 C_1$, $B'_1 C'_1$ is an involutory set. A' is a double point of this involution; the second double point is A for $AA'B_1C_1$ is a harmonic set, and, henceforth, $AA'B'_1C'_1$ is also a harmonic set. If $(AA'B_1C_1)=(A'AB'_1C'_1)$ for both are harmonic sets, the three couples AA', $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ form an involutory set and joining O to these six points we obtain the proposition.

The involution is elliptic, i. e. the two double rays are imaginary, O being their common real point. The six imaginary points DEF and GHI of intersection of these two double lines with the three sides B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, together with A, B, and C form a *Hesse-configuration*. For if D and G are the two double points of the involutory set $(AA' \; B_1B'_1 \; C_1C'_1)$, E and H the double points of the involutory set $(BB' \; A_1A''_1 \; C_1C''_1)$, F and I the double points of the involutory set $(CC' \; A_1A'''_1 \; B_1B'''_1)$, we see that the three lines $ADG=B_1C_1$, $BEH=A_1C_1$, $CFI=A_1B_1$ form a syzygetic triangle. Another syzygetic triangle is ABC, $O\cdot DEF$, $O\cdot GHI$. Besides the two involutory sets $(A_1 A_1''' \; B_1 B_1''' \; CC')$ and $(A_1 A''_1 \; C_1 C''_1 \; BB')$ are perspective, A_1 being their common point and A their perspective centre; therefore EI and FH, the two lines joining their double points, pass through A. In the same way FG and DI pass through B and DH and EG pass through C; therefore we obtain the other two syzygetic triangles AEI, BFG, CDH and AFH, BDI, CEG.

From this synthetic construction, which is absolutely independent from the theory of plane cubics, although analogous to a metric construction given by Clebsch, it follows a very elementary synthetic property, not mentioned in previous works as far as I could get information, i. e.

The four rays ABC, ADG, AEI, AFH passing through a determined inflexion point A of a plane cubic, form a pencil, so that their anharmonic ratio is

$$A(BC\ DG\ EI\ FH) = A(BC\ EI\ FH\ DG) = A(BC\ FH\ DG\ EI) = \varepsilon_1$$
$$A(BC\ DG\ FH\ EI) = A(BC\ EI\ DG\ FH) = A(BC\ FH\ EI\ DG) = \varepsilon_2$$

ε_1 and ε_2 being the roots of the equation $u^2 - u + 1 = 0$.

For the three sets

$$ABC\ DEF\ GHI, \quad ABC\ EFD\ IGH, \quad ABC\ FDE\ HIG$$

are homological, the line ABC being the axis of homology, as the set of points on it ABC is double, and O being the centre of homology, as it is the common point of the lines DEF and GHI joining couples of corresponding points. The proposition follows immediately from this triple homology.

As with four distinct elements of a series or pencil, six anharmonic ratios, i. e.

$$r_1 = u \quad r_2 = 1/u \quad r_3 = 1 - u \quad r_4 = 1/1 - u \quad r_5 = u/u - 1 \quad r_6 = u - 1/u$$

may be derived from any value u, (the values 0, ∞, 1 excepted), the number is reduced to three, i. e. -1, 2, $\frac{1}{2}$ if the series is a harmonic series, but if $u = \varepsilon_1$, as it is in our case, then

$$r_1 = r_4 = r_6 = \varepsilon_1 \text{ and } r_2 = r_3 = r_5 = \varepsilon_2.$$

SUR LE PRODUIT DES ESPACES MÉTRIQUES

Par TH. MOTZKIN, Jérusalem.

On connaît la définition du 'produit direct ou cartésien $E = AB$ de deux ensembles A et B: c'est l'ensemble des paires $\eta = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha \prec A$, $\beta \prec B$. α et β sont les projections de η sur A resp. B.

Si A et B ont la propriété d'être des classes L de FRÉCHET ou d'être des groupes, la même propriété s'extend d'une façon naturelle, uniquement déterminée sur E. Il en est autrement de la propriété d'être un espace métrique; ici il y a différentes possibilités d'extension sur le produit.

Tâchant à restreindre l'ensemble de ces possibilités, on peut imposer à la métrisation de E les conditions suivantes, d'ailleurs très naturelles.

1. *Homogénéité.* La distance $\overline{\eta_1 \eta_2}$ de deux points η_1 et η_2 de E doit être une fonction qui dépend *seulement* de $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$ et $\overline{\beta_1 \beta_2}$ c-à-d.: $\overline{\eta_1 \eta_2} = f(\overline{\alpha_1 \alpha_2}, \overline{\beta_1 \beta_2})$. 2. *Permanence.* $f(a, 0) = a$. 3. *Loi commutative.* $f(a, b) = f(b, a)$. 4. *Loi associative.* $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$. 5. *Monotonie.* $f(a, b) \geqq f(a, c)$ si $b \geqq c$. 6. *Validité de l'inégalité du triangle.*

Les conditions (1) à (5) entraînent l'existence d'une fonction monotone $\varphi(x)$ telle que l'on ait

$$f(a, b) = \psi(\varphi(a) + \varphi(b)),$$

où ψ désigne la fonction inverse de φ. La condition (6) s'exprime maintenant par l'inégalité suivante pour la fonction $\varphi(x)$:

$$(i) \qquad \psi(\varphi(a+c) + \varphi(b+d)) \leqq \psi(\varphi(a) + \varphi(b)) + \psi(\varphi(c) + \varphi(d)).$$

On peut montrer que des systèmes de conditions différentielles comme p. e.

$$\varphi' \geqq 0, \ \varphi'' \geqq 0, \ \varphi' \varphi''' - 2\varphi''^2 \geqq 0$$

suffisent pour que la fonction $\varphi(x)$ obéïsse à (i), et, d'autre part, qu'il est impossible de trouver des inégalités différentielles analogues qui seraient *nécessaires* pour la validité de (i).

En chaque point de E, les deux couches respectivement parallèles aux espaces facteurs A et B peuvent, en général, être reconnues par leurs propriétés métriques. Pour que, au contraire, la décomposition en facteurs ne soit pas donnée par l'espace métrique E, il suffit p. e. qu'il y ait une transformation non triviale T à point fixe qui n'affecte pas la métrisation de E.

Pour donner un exemple (qui peut sans doute être généralisé), soient A et B l'espace formé par les nombres réels, métrisé comme d'habitude, et soit le T, mentionné ci-dessus, une transformation linéaire. Si alors la fonction φ de (i) est analytique dans un intervalle assez étendu de l'axe réel, on peut montrer que l'on a nécessairement $\varphi(x) = x^2$, et la métrisation de $E = A^2$ est toujours l'euclidienne (pythagorienne).

Comme des suppositions analogues aux précédentes peuvent toujours être faites pour les petits domaines dans la physique du continu, nous avons obtenu une justification de la restriction que l'on fait avec RIEMANN, en prenant comme élément linéaire de l'espace la racine carrée d'une expression différentielle quadratique.

TEILWEISE GEORDNETE LINEARE RÄUME

Von HANS FREUDENTHAL, Amsterdam.

Betrachtet werden Modulen (in bezug auf den Körper der reellen Zahlen), die derart teilweise geordnet sind, daß zu je zwei Elementen a, b ein kleinstes größeres, $a \vee b$, und ein größtes kleineres, $a \wedge b$ existiert, und daß gilt:

$$\text{ist } a > 0, \text{ so ist } 0 > -a,$$
$$\text{ist } a > b, \text{ so ist } a + c > b + c,$$
$$\text{ist } a > 0, \alpha > 0, \text{ so ist } \alpha a > 0.$$

In solchen Modulen gelten von selbst die distributiven Gesetze für $\vee$ und $\wedge$.

Unter den weiteren Voraussetzungen, daß ein Element e existiert mit $a \wedge e > 0$ für jedes $a > 0$, und daß jede nach oben beschränkte Folge eine obere Grenze hat, wird eine Spektraldarstellung für die Elemente des Moduls abgeleitet.

Schließlich werden alle teilweisen Ordnungen des Hilbertschen Raumes (unter geeigneten Voraussetzungen) hergeleitet.

Ausführlich dargestellt in: Proceedings Akad. Amsterdam *39* (1936), 641—651.

ON THE CONNECTIVITY OF SPACES OF POSITIVE CURVATURE

By J. L. SYNGE, Toronto.

The space under discussion is a complete analytic Riemannian space V_N, with positive-definite line-element and positive curvature. A curve C is said to be *positively closed* if the orientation of a set of N orthogonal vectors is unchanged by continuous transformation round C, so that every closed curve taken twice over is positively closed and every closed curve is positively closed in an orientable V_N. It is proved that *if N is even,* *every positively closed curve can be continuously contracted to a point: hence every closed curve taken twice over can be contracted to a point, and, further, if V_N is orientable, then V_N is simply connected.*

The proof is based on a formula for the second variation of the length-integral developed by the author (Proc. London Math. Soc., 25 (1925), 247—264). Assuming that a positively closed curve C cannot be contracted to a point, the lower bound L of the lengths of all positively closed curves into which C can be deformed will be attained by a positively closed geodesic G. Parallel propagation around G of a set of $(N-1)$ vectors, orthogonal to G and to one another, gives an orthogonal transformation of the $(N-1)$-space orthogonal to G, and this will have an invariant vector μ^i, if N is even (so that $N-1$ is odd). Geodesics g drawn from G in the directions given by the parallel propagation of μ^i round G define a V_2. By displacing G equal distances along g, we deform G into a closed curve whose length is less than L (contrary to hypothesis), since the first variation is zero and the second variation has the sign of $-\int K ds$ taken round G, where K is the Riemannian curvature $(K>0)$.

No topological results are proved for the case where N is odd, but the possibility of reducing the length of a closed geodesic G by an infinitesimal deformation is discussed. Parallel propagation round G will not now in general have any invariant vector. The *twist* α of G is defined as the lower bound of the angular deviation produced by parallel propagation round G, and it is shown that if $\alpha < LK_0^{\frac{1}{2}}$ (where L is the length of G and K_0 a positive lower bound for the curvature), then the length of G can be reduced.

TANGENT LINES AND PLANES IN TOPOLOGICAL SPACES

By CHARLES C. TORRANCE, Cleveland.

The object of this paper is to extend to topological spaces some of the concepts and theorems of direct infinitesimal geometry. Let S be a space satisfying the first four parts of R. L. Moore's Axiom 1′, and let G and H be two collections of subsets of S. We first define the concept "G is H-continuous". By means of this concept we define certain sets in S which play the role of lines, planes, and hyperplanes in Euclidean space; we call these sets topological lines, planes, etc. We then determine the topological properties of topological lines and planes from the point topology in S. We define the terms "tangent line" and "tangent plane". Our principal results may be stated as follows: if K is a point continuum in S and if P is a point of K, then the set of all lines tangent to K at P is a line continuum and the set of all planes tangent to K at P is a plane continuum.

SUR LES TRANSFORMATIONS DES SPHÈRES EN SPHÈRES

Par L. S. Pontrjagin, Moscou.

L'auteur étudie les classes de transformations univoques d'une S_{n+k} en une S_n et obtient ce théorème définitif pour $k=1, 2$.

Théorème. Soit $P(n, k)$ le nombre de classes de transformations univoques de S_{n+k} en S_n. On a alors

$$P(n, 1)=\begin{cases} 1 & \text{pour } n=1 \\ \infty & \text{pour } n=2 \\ 2 & \text{pour } n>2 \,. \end{cases}$$

$$P(n, 2)=\begin{cases} 1 & \text{pour } n\neq 2 \\ 2 & \text{pour } n=2 \,. \end{cases}$$

ON HOMOLOGIES IN GENERAL SPACES

By B. Kaufmann, Cambridge.

Let F be an arbitrary r-dimensional set in R^n, and let $Z^p \sim 0$ be an arbitrary homology in F. We assume $Z^p = z_1^p, z_2^p, \cdots, z_k^p, \cdots$ to be a true cycle in F with a variable modulus m_k.[1] By B we denote an arbitrary carrier of Z^p, i. e. a closed subset of F containing all vertices of the cycles z_k^p for all $k=1, 2, \cdots$.

We say a subset A of F *destroys* the homology $Z^p \sim 0$ in F if Z^p is totally[1] $\not\sim 0$ in any compact subset of $F-A$. We can assume A to be a closed subset of F outside a carrier B of Z^p such that Z^p is totally $\not\sim 0$ in B. Then we can obtain the following theorems, which were conjectured by P. Alexandroff[1] (dimensionstheoretischer Verschlingungssatz):

Theorem H_1. There exists always an at most $(r-h-1)$-dimensional subset $F^{(r-h-1)}$ of $F(0\leqq h\leqq r-1)$ which destroys the homology $Z^h \sim 0$ in F, i. e. Z^h is totally $\not\sim 0$ in $F-F^{(r-h-1)}$.

[1] See P. Alexandroff, "Dimensionstheorie", Math. Annalen, 106 (1932), 161—238.

Theorem H_2. There exists a sequence of homologies $\{Z^p \sim 0\}$ $p=0, 1, \cdots, r-1$ in F such that for each p any set T destroying all homologies $Z^p \sim 0$ in F is at least $(r-p-1)$-dimensional.

The proof of Theorem H_1 depends on a general result on intersections of a p-dimensional complex and a q-dimensional set in R^n, p and q being quite arbitrary positive integers. The homologies $Z^p \sim 0$ in Theorem H_2 can be assumed to form an inductive system[1] of the generalized Phragmen-Brouwer theorem. Theorem H_2 is contained in the following more general result[2]:

Theorem H_2^*. Let $\{Z^{r-j}\}_{j=0, 1, \cdots, r}$ be an inductive system of cycles satisfying the conditions of the inductive Phragmen-Brouwer theorem, and let $\{B^{r-j}\}_{j=0, 1, \cdots, r}$ be the system of their carriers. Let T_{0, ϱ_0} be an arbitrary set destroying *all* homologies $Z^0 \sim 0$ in F and lying outside a ϱ_0 neighbourhood B^0. Then there exists a sufficiently small number Δ, $\varrho_0 > \Delta > 0$, such that the sets

$$T_{p, \Delta} = T_{0, \varrho_0} - V(B^p, \Delta),^{(3)} \quad \dim T_{p, \Delta} \geqq r-p-1$$

for each $p=0, 1, \cdots, r-1$ destroy all homologies $Z^p \sim 0$ in F. In addition the sets satisfy the condition $T_{0, \varrho_0} \supset T_{1, \Delta} \cdots \supset T_{p, \Delta} \cdots \supset T_{r-1, \Delta}$.

SUR LES ESPACES MULTICOHÉRENTS

Par S. EILENBERG, Varsovie.

Paru dans Fund. Math. 27 (1936) p. 153—190.

[1] See Theorem (the inductive Phragmen-Brouwer theorem) in my paper "On the extension of the Pflastersatz" in Proc. Camb. Phil. Soc. XXXII, 1936.

[2] All results announced here are contained in my paper "On homologies in general spaces", to appear in Proc. London Math. Soc.

(3) By $V(B^p, \Delta)$ we denote a Δ-neighbourhood of B^p.

NOUVELLE SPHÈRE ASSOCIÉE AU TÉTRAÈDRE

Par V. THÉBAULT, Le Mans, France.

1. Avec les notations habituelles, dans un tétraèdre *quelconque* $T \equiv ABCD$, la sphère (S) considérée, qui a pour centre S le symétrique du point M de MONGE, par rapport au centre O de la sphère circonscrite, est orthogonale aux sphères

$$\left[A, \left(\frac{a^2+b'^2+c'^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \left[B, \left(\frac{a'^2+b^2+c'^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\left[C, \left(\frac{a'^2+b'^2+c^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \left[D, \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

et le carré de son rayon est:

$$r^2 = 9R^2 - \tfrac{3}{4}(a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2).$$

2. La sphère (O) circonscrite, la sphère (O_1) circonscrite au tétraèdre anticomplémentaire $A_1B_1C_1D_1$, la sphère décrite sur le segment rectiligne joignant le centre G de gravité au point $M_1 \equiv S$ de MONGE du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ comme diamètre, la sphère (G) de MONGE de l'ellipsoïde de STEINER circonscrit au tétraèdre $ABCD$ et la sphère (S) appartiennent à un même faisceau.

3. Le plan radical (P), commun aux cinq sphères, est le plan polaire de G par rapport à la sphère (S).

4. La sphère (G) est orthogonale à la sphère (S) et (P) est le plan polaire de S, par rapport à la sphere (G).

5. Soient $T' \equiv A'B'C'D'$ le tétraèdre polaire du tétraèdre T pour la sphere

$$(S_1) \equiv \left[M, \left(\frac{\overline{MO}^2 - R^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

et Q un point quelconque sur la sphère (O). Les parallèles à AQ, BQ, CQ, DQ, par M percent les faces de T' en quatre points du plan polaire du point Q', diamétralement opposé à Q sur (O), par rapport à la sphère analogue de (S) pour le tétraèdre complémentaire $G_aG_bG_cG_d$, et ce plan partage QM dans le rapport $2:1$.

6. A_2, B_2, C_2, D_2 étant les symétriques de A, B, C, D par rapport à G, les sphères (A_2, A_2A), (B_2, B_2B), (C_2, C_2C), (D_2, D_2D) sont orthogonales à la sphère (S).

7. Dans un tétraèdre *orthocentrique*: la sphère (S) est conjuguée au tétraèdre anticomplémentaire (N. COURT); le théorème *2* généralise celui de WOLSTENHOLME, (*Educational Times*, 1871).

ÜBER DAS PROBLEM VON PLATEAU

Von R. COURANT, New York.

Der Vortrag entwickelte eine Methode zur Lösung des Problems von Plateau, dessen von Douglas formulierten Verallgemeinerungen sowie auch des entsprechenden Problems bei freien oder teilweise freien Rändern und anderer Probleme verwandter Art. Die Methode unterscheidet sich von der Douglas'schen zunächst insofern, als nicht das Douglas'sche Randfunktional sondern das klassische Dirichlet'sche Variationsproblem zugrunde gelegt wird. Hierbei ergibt sich eine einfache Lösung des Variationsproblems auf Grund von Hilfsmitteln, wie sie schon früher von dem Verfasser bei der Behandlung des Dirichletschen Problems und der konformen Abbildung entwickelt wurden. Vor allem aber wird die Identifizierung der Lösung als Minimalfläche mit den gegebenen Randbedingungen auch in den allgemeinsten betrachteten Fällen durch die gewonnene Freiheit bei der Variation verhältnismäßig leicht. Es wurde ferner darauf hingewiesen, daß eine weitere wesentliche Vereinfachung und neue Beleuchtung des Plateau'schen Problems gewonnen werden kann durch einen neuen Satz über konforme Abbildung stückweise Riemann'scher Mannigfaltigkeiten.

Eine kurze Skizze erschien in Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 22, No. 6, pp. 367—375. Eine ausführliche Publikation wird in den Annals of Mathematics folgen.

SUR LA DÉFINITION DES SURFACES DE RIEMANN

Par S. STOILOW, Cernauti, Roumanie.

La première définition rigoureuse de la notion de surface de Riemann est, comme on sait, dûe à M. H. Weyl.[1] Simplifiée par M. Tibor Rado,[2] cette définition revient à dire qu'une surface de Riemann est une variété topologique connexe à deux dimensions pour laquelle au voisinage de chacun de ses points est définie une représentation conforme locale sur une aire plane. Deux surfaces de Riemann représentables conformément l'une sur l'autre devant être considérées identiques, il ne peut être question, dans cette définition, de feuillets et de points de ramification. Pour conserver ces notions si utiles dans la description d'une surface ou d'une classe de surfaces de Riemann, il faut revenir au concept primitif de surface de recouvrement.

---

[1] *Die Idee der Riemannschen Fläche*; Leipzig—Berlin 1913.

[2] *Acta Szeged* t. II (1925) p. 101.

Une représentation continue d'une variété topologique V sur une partie de la sphère S forme, avec V, un *recouvrement de* S (partiel ou total). La question se pose alors de caractériser la transformation continue $f(V) \subset S$ pour que le recouvrement soit riemannien, c'est-à-dire pour que $[V, f(V)]$ puisse être considéré comme une surface de Riemann étalée sur S.

La notion de *transformation intérieure* que j'ai définie et étudiée dans plusieurs travaux antérieurs[1] permet de répondre complètement à cette question:

$[V, f(V)]$ *est une surface de Riemann si — et seulement si —* $f(V) \subset S$ *est une transformation intérieure de* V *à* S; savoir si:

1° Tout ensemble ouvert de V se transforme en un ensemble ouvert de S.

2° Aucun continu de V ne se transforme en un point unique de S.

On montre, en effet, dans ce cas que:

1° V est triangulable et orientable.

2° L'inversion locale de la transformation est, ou biunivoque, ou se fait à la manière de $Z = z^n$ autour de l'origine.

Les propriétés topologiques de la surface de Riemann sont alors celles de V; les autres propriétés résultent de $f(V)$ et de la métrique qui, de S, est transportée sur V par la transformation.

Il est clair que S peut être remplacée par une variété topologique quelconque V'. Si V' est orientable toute V qui définit un recouvrement riemannien de V' est orientable.

Cette définition du recouvrement riemannien est évidemment susceptible de généralisations diverses.

PLANAR POSITIONS

By Frank Morley, Baltimore, U. S. A.

The Mechanical Engineering deals mostly with bodies assumed to be rigid. The motions involved are mostly planar. Consider then the relative motions of two superposed planes.

But a motion being a continuous succession of positions, it is proper to begin with positions.

A point of a plane is a number x. Take two superposed planes, the x-plane and the y-plane.

[1] Sourtout: *Annales de l'Ecole Normale* t. 45 (1928) p. 347 et suiv. et *Annales de l'Institut Poincaré* t. II (1932) p. 233 et suiv.

Initially let superposed points be given by $y=x$. Call a part of the y-plane an object.

Give it a displacement. Then for superposed points

$$y=Tx-a, \qquad |T|=1.$$

This is the equation of a position of the object. Let y be a fixed point of the object for two positions $y=T_1x_1-a_1$, $y=T_2x_2-a_2$.

Then when $x_1=x_2=x_{12}$ say

$$x_{12}=a_1/(T_1-T_2)+a_2/(T_2-T_1)=\overset{2}{\Sigma}a_1/(T_1-T_2).$$

This is a covariant point of the two positions, their fixed point or *centric*.

For 3 positions the 3 centrics x_{12}, x_{23}, x_{31} are on the circle

$$x=\overset{3}{\Sigma}a_1(T_1-T)/(T_1-T_2)(T_1-T_3)$$

with the center

$$x_{123}=\overset{3}{\Sigma}a_1T_1/(T_1-T_2)(T_1-T_3).$$

Call this the centric of the 3 positions.

We can repeat this argument indefinitely.

Thus for n positions we have a covariant point — the centric, and a covariant circle. The centrics of $n-1$ out of n positions are on the circle. And it may be shown that the circles for $n-1$ out of n positions are on a point — the node of the n positions.

It we make a an analytic function of T we have an analytic motion, $y=Tx-f(T)$.

For n positions there are proper motions, on these positions. Thus for

$$n=2, \qquad y-xT=0$$

$$n=3, \qquad y-xT+T^2=0$$

$$\text{and} \quad 1-yT+xT^2=0.$$

These are da Vinci motions

$$n=4, \qquad y-xT+a_2T^2-a_3T^3=0$$

$$a_0-yT+xT^2-a_3T^3=0$$

$$a_0-a_1T+yT^2-xT^3=0.$$

The middle one is the best; it is shown by a model.

And so in general.

We may regard the positions of an object as equal maps. The problem just mentioned is that of the proper way to collect the maps.

In maps — say of Norway — there are corresponding lines, say from Oslo to Bergen. These are directed lines.

These have an incenter. The incenters for 3/4 are on a circle, whose center we may call the incenter of the 4 lines.

The incenters for 4/5 lines are on a circle and so on. Thus n corresponding lines have an incenter. A little algebra shows that for the corresponding lines of n maps, the incenters lie on a circle, and that this is the covariant circle of the n maps.

References.

For the inductive method used, F. and F. V. Morley, Inversive Geometry (G. Bell & sons) ch. XII and ch. XXI.

For analytic motions ib. ch. XIV.

For the theory of directed lines, F. H. Loud, Trans. Am. Math. Soc. V. I.

DÉCOMPOSITION D'UNE TRANSFORMATION QUADRATIQUE INVOLUTIVE DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS

Par B. Bydžovský, Prague.

Une telle transformation possède une variété quadratique à $(n-2)$ dimensions dont tout point est principal en ce sens que tous les points d'une droite lui correspondent. Elle possède, de plus, un point principal, qu'on peut appeler isolé, et auquel correspondent les points d'un hyperplan. Les points unis d'une telle transformation forment deux variétés quadratiques, dont l'une à h dimensions, l'autre à $(n-h-2)$ dimensions. Ici, h peut prendre toutes les valeurs entières entre -1 et $(n-1)$, la valeur -1 correspondant au cas où la variété en question ne contient aucun point, c.-à-d. où il n'existe qu'une seule variété quadratique de points unis, qui est, en ce cas, une hyperquadrique. C'est le cas de l'inversion, correspondance bien connue, dans laquelle se correspondent des points collinéaires avec un point fixe, centre de l'inversion, et qui sont, en même temps, conjugués polaires par rapport à l'hyperquadrique qui vient d'être mentionnée. J'ai trouvé, au sujet de ces transformations, le théorème suivant:

Toute transformation quadratique involutive dans un espace à n dimensions peut être décomposée en $(h+2)$ et aussi en $(n-h)$ inversions, commutatives deux à deux, où h est le nombre de dimensions d'une des deux variétés quadratiques de points unis.

Pour démontrer ce théorème, on peut suivre une voie purement algébrique, mais assez pénible. On vient à bout plus facilement par une voie plus géométrique consistant en ceci: on plonge l'espace considéré dans un espace à $(n+1)$ dimensions et l'on projette l'espace considéré sur une hyperquadrique de cet espace à $(n+1)$ dimensions, convenablement choisie, le centre de projection se trouvant sur cette hyperquadrique. On obtient sur cette hyperquadrique une correspondance qu'on trouve appartenir à une homographie involutive de l'espace à $(n+1)$ dimensions. Or, on démontre facilement qu'une telle homographie involutive est décomposable en $(h+2)$ et aussi en $(n-h)$ homologies involutives, mutuellement commutatives. En projetant, dans le sens inverse, l'hyperquadrique choisie sur notre espace à n dimensions, on trouve que les couples de points, engendrés sur cette hypersurface par l'une des homologies commutatives, sont projetés suivant des paires de points qui se correspondent dans une inversion de l'éspace primitif. Les $(h+2)$ et les $(n-h)$ inversions obtenues de cette manière sont celles du théoreme, qui se trouve ainsi démontré.

J'ajoute deux remarques. La première: dans la plupart des cas il existe une décomposition plus simple, à savoir, une décomposition en une inversion et en une homographie involutive. Mais il y a un cas où cette décomposition plus simple n'est pas possible. Donc, on voit que la décomposition que je viens de signaler est préférable, puisqu'elle est tout à fait générale. Une deuxième remarque: Les inversions du théorème, au nombre total de $(n+2)$, donnent comme produit l'identité. En composant ces inversions deux à deux, trois à trois etc., on obtient un groupe commutatif de transformations quadratiques involutives. J'ai des raisons à croire que pour n impair c'est le groupe commutatif le plus général de telles transformations. Pour n pair, il en existe encore d'autres types.

SUR LES COURBES AYANT LE MÊME AXE ANHARMONIQUE

Par C. P. Papaioannou, Athènes.

I. C'est G. Koenigs qui a défini les courbes ayant ce qu'on appelle un axe anharmonique, c'est-à-dire telles qu'il existe une droite D jouissant de la propriété suivante: Les points m_1, m_2, m_3, m_4, où cette droite est rencontrée par les quatres plans osculateurs à la courbe considerée K en quatre points quelconques M_1, M_2, M_3, M_4, ont le même rapport anharmonique que les plans P_1, P_2, P_3, P_4, menés par cette droite et ces quatre mêmes points M_1, M_2, M_3, M_4. Proposons nous d'abord de trouver toutes les courbes K ayant le même axe anharmonique D.

2. Rien ne limitera l'étude générale si on suppose que D soit l'axe Ox du système fixe. Or la droite D est représentée par les équations

$$x=t, \; y=0, \; z=0.$$

De plus, soient

$$x=f(u), \; y=g(u), \; z=h(u)$$

les équations d'une courbe K faisant partie des courbes cherchées. Le point m_i ou D est rencontrée par le plan osculateur à la courbe en M_i est défini par la valeur de t

$$t_i=\frac{A_i x_i+B_i y_i+C_i z_i}{A_i}.$$

Pour simplifier l'écriture posons

$$A_i x_i+B_i y_i+C_i z_i=\Pi_i.$$

Le rapport anharmonique $\lambda=(m_1, m_2, m_3, m_4)$ s'écrit alors

$$\lambda=\frac{(A_1\Pi_2-A_2\Pi_1)\,(A_3\Pi_4-A_4\Pi_3)}{(A_3\Pi_2-A_2\Pi_3)\,(A_1\Pi_4-A_4\Pi_1)}.$$

D'autre part

$$z_i Y-y_i Z=0$$

étant l'équation du plan $P_i(D, M_i)$ on a

$$\sin(P_i, P_j)=\frac{z_i y_j-y_i z_j}{\sqrt{z_i^2+y_i^2}\,\sqrt{z_j^2+y_j^2}}$$

d'où

$$\lambda'=(P_1, P_2, P_3, P_4)=\frac{(z_1 y_2-y_1 z_2)\,(z_3 y_4-y_3 z_4)}{(z_3 y_2-y_3 z_2)\,(z_1 y_4-y_1 z_4)}.$$

Or les fonctions f, g, h, devront satisfaire à une identité

$$\lambda=\lambda'.$$

On voit que cette indentité sera verifié, si on pose

$$A=az, \quad \Pi=by$$

a, b, désignant deux constantes. Et alors les fonctions f, g, h, doivent satisfaire aux équations différentielles

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{array}{l} y'z'-z'y''-az=0 \\ (y'z''-z'y'')x+(z'x''-x'z'')y+(x'y''-y'x'')z-by=0. \end{array}\right.$$

3. Or, les équations des courbes ayant D comme axe anharmonique seront de la forme

$$\begin{aligned} x&=f(u, a, b, c_1, c_2, c_3, c_4) \\ y&=g(u, a, b) \\ z&=h(u, a, b, c_1, c_2, c_3, c_4) \end{aligned}$$

où a, b, c_1, c_2, c_3, c_4 sont de constantes, g une fonction arbitraire et $x=f$, $z=h$ l'intégrale générale de (I).

Si on pose trois relations entre les constantes

$$\varphi_i(a,\ b,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)=0, \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

on déterminera une famille de courbes dépendant de trois paramètres, c'est à dire un complexe de courbes.

Soit

$$\text{(II)} \qquad x=f(u,\ a,\ b,\ c),\ y=g(u,\ a,\ b),\ z=h(u,\ a,\ b,\ c)$$

un tel complexe. On peut chercher de fonctions $b=\sigma_1(a)$, $c=\sigma_2(a)$ telles que la surface correspondant Σ ait une serie des lignes asymptotiques, dont l'ensemble soit constitué par de courbes du complexe. On en conclut de ce qui précède qu'on peut associer les courbes K de façon a obtenir de familles des surfaces Σ.

4. On sait le problème traité par Sophus Lie, sur les surfaces dont les lignes asymptotiques d'une série appartiennent, par leurs tangentes, à un complexe linéaire.

De plus Koenigs a démontré le théorème suivant: Lorsque une courbe K admet un axe anharmonique D ses tangentes font partie d'un complexe linéaire; D est une droite de ce complexe.

Or, tous les complexes linéaires, dont font partie les tangentes aux courbes K ont une droite commune qui sera l'axe anharmonique commun à toutes ces courbes. Cet axe est unique. Mais on peut associer de familles de ∞^1 courbes K ayant en commun, sauf D, un axe de plus, ou même une infinité d'autres axes formant un hyperboloide. Cette question se rattache aux résultats de Koenigs sur les surfaces dont les lignes asymptotiques peuvent avoir un ou même plusieurs axes anharmoniques.

5. Par un choix convenable j'obtiens un complex (II).

$$x=u^2+cu,\ y=-\frac{1}{6}au^3,\ z=\frac{1}{2}bu\,.$$

Toutes les courbes de ce complexe ont le même axe anharmonique $D(Ox)$.

C'est un problème facile à résoudre de chercher les fonctions σ_1, σ_2 qui definissent les surfaces Σ de ce complexe. Ainsi les équations d'une de cettes surfaces sont

$$x=u^2+\frac{u}{\sqrt[3]{a}},\ y=-\frac{1}{6}au^3,\ z=\frac{u}{2\sqrt[3]{a}}\,.$$

ON A SYSTEM OF INVOLUTORIAL CREMONA TRANSFORMATIONS DEFINED BY A PENCIL OF QUADRIC SURFACES

By Virgil Snyder, Ithaca, N. Y.

The involutorial Cremona transformations defined by a linear congruence (de Paolis)[1] or by an involution of generators on a fixed quadric surface (Montesano)[2] can be generalized to include a large number of other known types, and also whole systems of new ones.

Given a pencil $H_1(x)-\mu H_2(x)=0$ of quadric surfaces in three way projective space S and a variable line $\Sigma a_i x_i=0$, $\Sigma b_i x_i=0$ or $(ax)=0$, $(bx)=0$, in which each coefficient a_i is a polynomial of degree m_1 in λ and each coefficient b_i a polynomial of degree m_2 in λ.

Between λ, μ exists the relation

$$\frac{\varphi_1(\mu)}{\varphi_2(\mu)}=\frac{\psi_1(\lambda)}{\psi_2(\lambda)} \tag{1}$$

in which each $\varphi_i(\mu)$ is a polynomial of degree k in μ with constant coefficients, and each $\psi_i(\lambda)$ is a quadratic polynomial in λ with constant coefficients.

A point y determines the quadric of the pencil on which it lies hence $\mu=\frac{H_1(y)}{H_2(y)}$. This, by (1) fixes two values λ, λ' and hence two directrix lines $(ax)=0$, $(bx)=0$, $(a'x)=0$, $(b'x)=0$. The transversal of these two lines through y meets the quadric containing it in y'. The involution I is defined by the pairs of points y, y'.

When $m_1=m_2=1$, the lines yy' belong to a linear complex, each line of which contains k pairs of conjugate points (Snyder).[3] In every other case the complex is non-linear.

The equations of I can now be determired. Every quadric of the pencil is transformed into itself. The line $(ax)=0$, $(bx)=0$ generates a rational ruled surface R of order m_1+m_2 and on it (1) determines a quadratic involution of generators.

The complex of lines yy' contains an infinite number of linear congruences, and a congruence of double lines, each containing $2k$ pairs of conjugate points.

---

[1] Rome Acc. L. Mem (4),1 (1885), pp. 576—608.

[2] Rome Acc. L. Rend. (4),4 (1888), pp. 207—215; 277—285.

[3] Atti del Mat. Congress, Bologna, 1928, v. 4, pp. 13—20.

The fundamental elements are the base curve C_4 of the pencil of quadrics, the curve γ, locus of the pairs of points in which a line of R meets is associated quadric, the sets of k conics in the plane of a pair of intersecting directrix lines, and a set of multiple secant lines of γ. The conics and the lines are fundamental of the second kind.

If in (1) the polynomials ψ_i are of degree $n-1$, and the equations $(ax)=0$, $(bx)=0$ have $n+1$ terms in $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ then I is defined in S_n of n dimensions. For each higher value of n, new types of fundamental elements appear.

SUR LES INVOLUTIONS CYCLIQUES APPARTENANT A UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE

Par LUCIEN GODEAUX, Liège.

Soit V une variété algébrique à trois dimensions, d'irrégularité superficielle nulle, possédant une surface canonique d'ordre zéro. Tout système linéaire de surfaces tracées sur V est son propre adjoint. Supposons que la variété V contienne une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, dépourvue de points unis. Soit Ω une variété image de cette involution.

Construisons sur V un système linéaire complet $|F|$ contenant p systèmes linéaires partiels $|F_1|, |F_2|, \cdots, |F_p|$ composés au moyen de I_p. A ces systèmes correspondent sur Ω des systèmes linéaires $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \cdots, |\Phi_p|$ de dimensions $r_1, r_2, \cdots, r_p$. On a

$$|p\Phi_1| = |p\Phi_2| = \cdots = |p\Phi_p|.$$

Sur une surface F_1, $|F|$ découpe le système canonique complet, comprenant p systèmes linéaires $|(F_1, F_1)|, |(F_1, F_2)|, \cdots, |(F_1, F_p)|$ composés au moyen de I_p. Celui de ces systèmes qui a la dimension minimum correspond au système canonique de la surface Φ_1 homologue de la surface F_1 considérée (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1932, pp. 672—679). On peut supposer, sauf un changement de notation, les nombres $r_1, r_2, \cdots, r_p$ rangés en ordre non décroissant. Dans ces conditions, le système $|\Phi_1|$ est son propre adjoint et Ω possède une surface canonique d'ordre zéro. Il en résulte que chacun des systèmes $|\Phi_2|, \cdots, |\Phi_p|$ est son propre adjoint. Par suite, on a $r_1 = r_2 = \cdots = r_p = \pi_a$, π_a étant le genre arithmétique des surfaces Φ_i. Le genre arithmétique des surfaces F est $p_a = p(\pi_a + 1) - 1$.

Si V et Ω sont des variétés normales, leurs sections hyperplanes sont des surfaces canoniques. Supposons par exemple que V soit, dans un S_7, l'intersection de quatre hyperquadriques et que l'on ait $p=2$. Alors, Ω se construit de la manière suivante: On considère deux espaces S_9, S'_9 indépendants dans un S_{19} et dans chacun de ces espaces des variétés W_3^8, $W_3'^8$ dont les sections hyperplanes représentent les quadriques d'un S_8. Les projections de W à partir de S'_9 et de W' à partir de S_9, ont en commun une variété W_7^{64} de S_{19}. La variété Ω est la section de cette variété par un S_{15}.

GENERALIZED CONVERGENCE

By Garrett Birkhoff, Cambridge, Mass.

By a "directed set" is meant a partially ordered set, every two of whose elements have a common successor. A directed set $\{x_\alpha\}$ of points of a topological space Σ is said to converge to the limit point x if and only if to every neighborhood U_x of x corresponds a point x_α of $\{x_\alpha\}$ all of whose successors lie in U_x.

Ordinary and transfinite sequences are directed sets.

Also, the finite subsets S_α of any aggregate Γ are a directed set under the convention that the successors of any S_α are the finite subsets containing it. While if Γ is any (ordered or unordered) aggregate of elements x_α of a topological linear space X, and one defines $\sum_\alpha x_\alpha = x$ to mean that the finite partial sums $s_\alpha = \sum_{\beta \varepsilon S_\alpha} x_\beta$ converge to x, one obtains a generalization of the usual notion of unconditional summability.

Again the Riemann partitions of a line segment are a directed set under the convention that the successors of any partition π are its subpartitions. While if $F(p)$ is any function with domain $[0,1]$ and range lying in a topological linear space X, one can define the Riemann integral of $F(p)$ as the limit with respect to the π of the finite sums $\Sigma m(\Delta_i) F(p_i)$.

Furthermore, if the domain of $F(p)$ is any space with a σ-ring of measurable sets, then its partitions into countable measurable subsets form a directed set, and one can define the Lebesgue integral of $F(p)$ as the limit of the unconditional sums $\sum_{p_i \varepsilon S_i} m(S_i) F(p_i)$.

The neighborhoods U_x of any point x of an abstract topological space Σ are a directed set under the convention that the successors of any U_x are the neighborhoods contained in it. It follows that the closure of any subset S of U_x is the set $\bar{S}$ of the limits of the convergent directed sets of points of S. This permits one to correlate in a consistent fashion, general topological ideas flowing out of the intuitive notion of *convergence*, with those flowing out of the dual notions of *closure* and *neighborhood* (closed and open sets). This is not otherwise possible in general function-spaces.

Similarly, it makes it possible to "complete" (in the sense of van Dantzig) topological algebras without assuming countability axioms. The generalized operation of completing also includes Prufer's construction for completing algebraic systems. And finally, any completed topological linear space has the property that its closed totally bounded sets are compact — although the converse is false. This justifies von Neumann's definition of such a topological linear space as "complete", and correlates it with van Dantzig's.

ÜBER DAS ANHOLONOMITÄTSOBJEKT VON SCHOUTEN UND VAN DANTZIG

Von St. Golab, Cracovie.

Wenn in einem analytischen n-dimensionalen Raume X_n in jedem Punkte ein System von n kontravarianten, linear unabhängigen, Vektoren gegeben ist, so entsteht das, was Feld von lokalen Bezugssystemen oder kurz „lokales Bezugssystem" genannt werden kann. Ein lokales Bezugssystem kann entweder *holonom* sein, falls ein Koordinatensystem existiert von der Art, daß in jedem Punkte die Vektoren des n-Beines die entsprechenden Maßvektoren, d. i. tangential zu Koordinatenlinien Einheitsvektoren sind, oder *nichtholonom*, falls kein Koordinatensystem von der erwähnten Eigenschaft existiert.

Wenn x^λ die Koordinaten der Punkte in einem beliebigen Koordinatensystem bezeichnen, so ist das lokale Bezugssystem analytisch gegeben durch Angabe von n^2 Funktionen $A^k_\lambda(x^1, \cdots, x^n)$ mit nicht verschwindender Determinante

(1) $$\Delta = \left| A^k_\lambda \right| \neq 0 .$$

Die Holonomitätsbedingung lautet:

(2) $$\frac{\partial A^k_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^k_\mu}{\partial x^\lambda} = 0 .$$

Wir bezeichnen mit A^λ_k das sogenannte reziproke zu A^k_λ System, d. h. A^λ_k bestimmen sich eindeutig aus den Gleichungen:

(3) $$\sum_\nu A^k_\nu A^\nu_i = \delta^k_i = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq i \\ 1 & \text{für } k = i . \end{cases}$$

Die Herren SCHOUTEN und VAN DANTZIG hatten den Begriff des *Anholonomitätsobjektes* eingeführt:[1]

$$\Omega^k_{ij} = \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} A^\lambda_i \cdot A^\mu_j \left\{ \frac{\partial A^k_\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial A^k_\lambda}{\partial x^\mu} \right\}. \tag{4}$$

Die Komponenten Ω^k_{ij} dieses Objektes hängen erstens von der Wahl des Koordinatensystems (x^λ) nicht ab, zweitens verschwinden sie (alle) identisch dann und nur dann, wenn das lokale Bezugssystem holonom ist. Ist das System (k) nichtholonom, so besitzt das Anholonomitätsobjekt im allgemeinen $n \binom{n}{2}$ verschiedene Komponenten.

Es entsteht nun die folgende Frage: Es seien Ω^k_{ij} vom vornherein als Funktionen der Veränderlichen x^λ gegeben und es wird gefragt nach der Existenz eines solchen (im allgemeinen natürlich nichtholonomen) Bezugssystems, für welches die Ω^k_{ij} die Komponenten des Anholonomitätsobjektes seien.

Damit die Antwort auf die gestellte Frage positiv sein könnte, müssen die Ω^k_{ij} schiefsymmetrisch in bezug auf die unteren Indizes sein:

$$\Omega^k_{ji} = -\Omega^k_{ij}. \tag{5}$$

Setzen wir voraus, daß diese Bedingung erfüllt ist.

Für $n=2$ fällt die Antwort immer im positiven Sinne aus.

Für $n \geqq 4$ ist die Antwort im allgemeinen verneinend, da es sich um ein Differentialgleichungssystem handelt, im welchem die Anzahl der Gleichungen $n\binom{n}{2}$ die Anzahl der unbekannten Funktionen n^2 übertrifft.

Der interessanteste ist der Fall $n=3$, wo wir mit 9 Gleichungen und zugleich mit 9 unbekannten Funktionen zu tun haben.

Wie steht die Sache mit der Existenz der Lösungen in diesem Falle? Es zeigt sich, daß *nicht immer* solche existieren. Als einfachstes Beispiel kann folgendes dienen. Wir setzen:

$$\Omega^k_{23} \equiv \Omega^k_{13} \equiv 0 \qquad \text{für } k=1, 2, 3. \tag{6}$$

Dagegen:

$$\Omega^k_{12} = \varphi^k(x^1, x^2, x^3) \qquad (k=1, 2, 3), \tag{7}$$

[1] J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG, Generelle Feldtheorie I: Zum Unifizierungsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35 (1932), 642—656.

wo die φ^k nur der folgenden Einschränkung genügen sollen:

$$J = \left| \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^\lambda} \right| \neq 0. \tag{8}$$

Man überzeugt sich leicht, daß es für diese Ω_{ij}^k keine Lösungen unseres Differentialgleichungssystems gibt, und daß also unseres Problem eine negative Antwort zuläßt.

Durch das sukzessive Differenzieren der Gleichungen (2) und durch die Elimination der Ableitungen der gesuchten Funktionen A_λ^k gelangt man für $n \geqq 3$ zu einem endlichen System von *rein algebraischen Relationen* für die gesuchten Funktionen. Die Anzahl dieser Relationen ist

$$p = n \left[2^n - \binom{n+1}{2} - 1 \right]. \tag{9}$$

Sie sind homogen und enthalten die gegebenen Funktionen Ω_{ij}^k und ihre ersten partiellen Ableitungen in natürlichen Potenzen. Im einfachsten Falle $n=3$ haben die oben erwähnten Relationen folgende Gestalt:

$$A^i_{[\lambda} A^j_\mu \partial_{\nu]} \Omega^k_{ij} - 2\, \Omega^k_{ij} \Omega^j_{rs} A^i_{[\lambda} A^r_\mu A^s_{\nu]} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Ob das erhaltene System von Relationen auch hinreichende Bedingung für die Existenz der Lösungen von (4) darstellt, kann ich vorläufig nicht entscheiden.

ZUR THEORIE DES GEOMETRISCHEN OBJEKTES

Von J. A. Schouten und J. Haantjes,[1] Delft.

1. Das geometrische Objekt steht augenblicklich im Mittelpunkte des geometrischen Interesses. Es fehlt aber bisher eine exakte Definition. Es seien hier Objekte betrachtet in einem endlich dimensionalen Raum mit einer endlichen Anzahl von Bestimmungszahlen.

[1] Die Arbeit ist entstanden unter dem Einflusse einer Korrespondenz mit Herrn A. Wundheiler in Warschau, dessen Bemerkungen sehr viel zu dem Zustandekommen beigetragen haben. Eine ausführliche Veröffentlichung findet man in den Proc. London Math. Soc. 1937, S. 356—376.

Symbolik:

Koordinatensysteme: $B,\ \overset{0}{B},\ \overset{1}{B},\ \dots$, allgemein $\overset{K}{B}$

Punkte : $\Xi,\ \underset{0}{\Xi},\ \underset{1}{\Xi},\ \dots$, allgemein $\underset{\Delta}{\Xi}$

Totalität der Koordinaten von $\underset{\Delta}{\Xi}$ i. b. auf $\overset{K}{B}$: $\overset{K}{\underset{\Delta}{\Xi}}$

Koordinatentransformation:

$$\overset{2}{\Xi} = \overset{2,1}{t}\left(\overset{1}{\Xi}\right);\quad \overset{2}{B} = \overset{2,1}{T}\,\overset{1}{B}. \tag{1}$$

2. *Objekte.* Jedem $\overset{K}{B}$ und jedem $\underset{\Delta}{\Xi}$ sei eine endliche Anzahl von Zahlen zugeordnet, deren Totalität durch $\Omega^{K}_{B,\underset{\Delta}{\Xi}}$ symbolisiert werde. Als Funktionen der $\underset{\Delta}{\Xi}$ schreiben wir die $\Omega^{K}_{B,\underset{\Delta}{\Xi}}$:

$$\Omega^{K}_{B,\underset{\Delta}{\Xi}} = \Omega^{K}_{B}\left(\underset{\Delta}{\Xi}\right). \tag{2}$$

Die $\Omega^{K}_{B,\underset{\Delta}{\Xi}}$ heißen Bestimmungszahlen des Objektes. Die $\Omega^{1}_{B,\Xi}$ können für jede Wahl von $\overset{1}{B}$ als Funktionale der Funktionen $\overset{1,0}{t}$ und der Koordinaten $\overset{0}{\Xi}$ geschrieben werden:

Komponental geschrieben: (3) I a) $\Omega^{1}_{B,\Xi} = F^{(0)}\left(\overset{1,0}{t},\ \overset{0}{\Xi}\right)$

Funktional geschrieben : (4) I b) $\Omega^{1}_{B} = \mathbf{F}^{(0)}\left(\overset{1,0}{t}\right)$,

I
Objekt

wo die Form der Funktionale $F^{(0)}$ und $\mathbf{F}^{(0)}$ nur von $\overset{0}{B}$ (also nicht von $\overset{1}{B}$) abhängig ist.

3. *Makrogeometrische Objekte.*

Ein Objekt heißt *makrogeometrisch*, wenn:

Komponental geschrieben: (5) II a) $\Omega^{2}_{B,\Xi} = \overset{\Omega}{T}\left(\Omega^{1}_{B},\ \overset{2,1}{t},\ \overset{1}{\Xi}\right)$

Funktional geschrieben : (6) II b) $\Omega^{2}_{B} = \overset{\Omega}{\mathbf{T}}\left(\Omega^{1}_{B},\ \overset{2,1}{t}\right)$,

II
Makro-
geom.
Objekt

wo die Form der Funktionale $\overset{\Omega}{T}$ und $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$ nicht von $\overset{1}{B}$ und $\overset{2}{B}$ abhängt.

4. *Mikrogeometrische oder geometrische Objekte.*

Ein Objekt heißt *mikrogeometrisch* oder *geometrisch*, wenn

(7) III $$\Omega^{2}_{B,\Xi} = \overset{\Omega}{T}\left(\Omega^{1}_{B,\Xi}, \overset{2,1}{t}, \overset{1}{\Xi}\right)$$ III Mikrogeom. Objekt

ist und die Form von $\overset{\Omega}{T}$ nicht von $\overset{1}{B}, \overset{2}{B}$ und Ξ abhängt. Vektoren, Affinoren, Dichten, Projektoren sind alle mikrogeometrische Objekte.

Jedes mikrogeometrische Objekt ist makrogeometrisch, es gibt aber makrogeometrische Objekte, die nicht mikrogeometrisch sind.

5. *Spezielle Objekte.*[1]

Ein Objekt heißt *speziell*, wenn es möglich ist in (I a) die Funktion $\overset{1,0}{t}$ zu ersetzen durch eine endliche Anzahl von Parametern $\tau^{1}_{B,\overset{0}{B},\Xi}$:

(8) IV $$\Omega^{1}_{B,\Xi} = G^{(0)}\left(\tau^{1}_{B,\overset{0}{B},\Xi}, \overset{1}{\Xi}, \overset{0}{\Xi}\right),$$ IV Spezielles Objekt

wo die $\tau^{1}_{B,\overset{1}{B},\Xi}$ folgenden Bedingungen genügen:

a. die $\tau^{1}_{B,\overset{0}{B},\Xi}$ sind Funktionale der $\overset{1,0}{t}$ und Funktionen der $\overset{0}{\Xi}$;

b. für jede Wahl von $\overset{0}{B}, \overset{1}{B}, \overset{2}{B}$ und Ξ gilt

(9) $$\tau^{2}_{B,\overset{0}{B},\Xi} = f\left(\tau^{2}_{B,\overset{1}{B},\Xi}, \tau^{1}_{B,\overset{0}{B},\Xi}\right),$$

wo die Form von f nicht von der Wahl der $\overset{0}{B}, \overset{1}{B}, \overset{2}{B}$ und Ξ abhängt.

c. für jede Wahl von $\overset{1}{B}$ und $\overset{2}{B}$ und für jeden Punkt $\underset{A}{\Xi}$ ist es möglich $\overset{1}{B}$ (und ebenso $\overset{2}{B}$) so infinitesimal abzuändern, daß die $\underset{A}{\overset{1}{\Xi}}$ $\left(\text{bzw. } \underset{A}{\overset{2}{\Xi}}\right)$ und die $\tau^{2}_{B,\overset{1}{B},\Xi}$ jede gewünschte infinitesimale Änderung erleiden.

6. *Objekte der Klasse v.*

Sind die $\tau^{1}_{B,\overset{0}{B},\Xi}$ in (8) die Ableitungen der Funktionen $\overset{1,0}{t}$ bis zur Ordnung v im Punkte Ξ (symbolisiert durch $\omega^{1}_{B,\overset{0}{B},\Xi}$),

[1] Dieser Begriff ist bis auf die verschärfende Bedingung c von Herrn A. Wundheiler.

(10) V $$\Omega_{\overset{1}{B},\,\Xi} = G^{(0)}\left(\omega_{\overset{1}{B},\,\overset{0}{B},\,\Xi},\ \overset{0}{\Xi},\ \overset{1}{\Xi}\right),$$ V Objekt der Klasse v

so heißt Ω ein *Objekt der Klasse v.*

7. *Spezielle geometrische Objekte.*

Ein spezielles Objekt ist (mikro)geometrisch, wenn

(11) VI $$\Omega_{\overset{2}{B},\,\Xi} = \overset{\Omega}{T}\left(\Omega_{\overset{1}{B},\,\Xi},\ \tau_{\overset{2}{B},\,\overset{1}{B},\,\Xi},\ \overset{2}{\Xi},\ \overset{1}{\Xi}\right)$$ VI Spezielles geom. Objekt

ist, für jede Wahl von $\overset{2}{B}, \overset{1}{B}$ und Ξ.

8. *Geometrische Objekte der Klasse v.*

Ein Objekt ist ein geometrisches Objekt der Klasse v, wenn gilt:

(12) VII $$\Omega_{\overset{2}{B},\,\Xi} = \overset{\Omega}{T}\left(\Omega_{\overset{1}{B},\,\Xi},\ \omega_{\overset{2}{B},\,\overset{1}{B},\,\Xi},\ \overset{2}{\Xi},\ \overset{1}{\Xi}\right).$$ VII Geom. Objekt der Klasse v

9. *Fundamentaltheorem.*

Für spezielle Objekte folgt aus (IV)

(13) $$\Omega_{\overset{2}{B},\,\Xi} = G^{(0)}\left(\tau_{\overset{2}{B},\,\overset{0}{B},\,\Xi},\ \overset{2}{\Xi},\ \overset{0}{\Xi}\right)$$

also infolge (9)

(14) $$\Omega_{\overset{2}{B},\,\Xi} = H^{(0)}\left(\tau_{\overset{2}{B},\,\overset{1}{B},\,\Xi},\ \tau_{\overset{1}{B},\,\overset{0}{B},\,\Xi},\ \overset{2}{\Xi},\ \overset{0}{\Xi}\right).$$

Gelingt es aus (8) und (14) die $\tau_{\overset{1}{B},\,\overset{0}{B},\,\Xi}$ und $\overset{0}{\Xi}$ zu eliminieren, so ist Ω mikrogeometrisch.

Im allgemeinen läßt sich nur ein Teil dieser Parameter eliminieren, und es entsteht eine Gleichung von der Form

(15) $$\Omega_{\overset{2}{B},\,\Xi} = K^{(0)}\left(\Omega_{\overset{1}{B},\,\Xi},\ \tau_{\overset{2}{B},\,\overset{1}{B},\,\Xi},\ \varphi_1, \cdots, \varphi_m,\ \overset{1}{\Xi},\ \overset{2}{\Xi}\right),$$

wo $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ die ***m*** übriggebliebenen Parameter darstellen. Von diesen sind nun wieder nur eine bestimmte Anzahl *r* *wesentlich* im Sinne von Lie.

r ist eine für jedes spezielle Objekt charakteristische eindeutig bestimmte Zahl.

Symbolisieren wir die Totaliät der wesentlichen Parameter durch $\Pi_{\overset{1}{B},\,\overset{0}{B},\,\Xi}$, so gilt das Fundamentaltheorem:

Ist Ω ein spezielles Objekt mit M Bestimmungszahlen und der charakteristischen Zahl r, das nicht mikrogeometrisch ist, so bilden die $\Omega_{B,\,\Xi}$ und $\Pi_{B,\,\overset{0}{B},\,\Xi}$ zusammen ein spezielles geometrisches Objekt, und es gibt kein spezielles geometrisches Objekt, das Ω enthält und weniger als $M+r$ Bestimmungszahlen hat.

Es folgt:

Jedes spezielle makrogeometrische Objekt, das nicht mikrogeometrisch ist, ist ein Teil eines mikrogeometrischen Objektes.

Literatur.

1908. F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, S. 59.

1926. O. Veblen und J. M. Thomas, Projective invariants of affine geometry of paths, Ann. of Math. 27 (1926), 278—296.

1927. O. Veblen, Invariants of quadratic differential forms, Cambr. Tracts No. 24.

1930. J. A. Schouten und E. R. van Kampen, Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde, Math. Ann. 103 (1930), 752—783.

1932. O. Veblen und J. H. C. Whitehead, The foundation of differential geometry, Cambr. Tracts No. 29.

1936. J. A. Schouten und D. van Dantzig, Was ist Geometrie? Mitt. des Seminars für Vektor- und Tensoranalysis der Moskauer Universität, Bd. II—III (1935), 15—48.

.... A. Wundheiler, Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien, Congr. for tensorial differential geometry, Moskau 1934 (noch nicht erschienen).

AUS DER INTEGRALGEOMETRIE

Von WILHELM BLASCHKE, Hamburg.

Von J. STEINER (1840) stammt die Formel

$$F_h = F_0 + h\,U_0 + \tfrac{1}{2} h^2 K_0, \tag{1}$$

worin F_h den Flächeninhalt eines Eibereichs bezeichnet, der zu einem gegebenen Eibereich im Abstand h parallel ist. Darin bedeuten U_0 den Umfang und $K_0 = 2\pi$ die Gesamtkrümmung des gegebenen Bereichs.

L. A. SANTALÓ hat 1935 eine Verallgemeinerung von (1) gegeben, die ich dann neuerdings erweitert habe. Meine „kinematische Hauptformel" lautet so:

$$\int K(G_0 G_1)\,dG_1 = 2\pi\{K_0 F_1 + U_0 U_1 + F_0 K_1\}. \tag{2}$$

Darin sind G_0, G_1 zwei Gebiete in der Euklidischen Ebene, G_0 fest, während G_1 allen Bewegungen unterworfen wird. dG_1 ist das Raumelement im Parameterraum der Bewegungsgruppe. $G_0 G_1$ bedeutet den Durchschnitt von G_0 und G_1; F_i, U_i, K_i Flächeninhalt, Umfang und Gesamtkrümmung von G_i und $K(G_0 G_1)$ die Gesamtkrümmung des Durchschnitts.

Aus (2) folgt zum Beispiel für einfach zusammenhängende G_i

$$\int (n-m)\, d G_1 = U_0 U_1 - 2\pi (F_0 + F_1). \tag{3}$$

Hierin bedeutet n die Anzahl der Randbogen von G_1 in G_0 und m die Anzahl der zusammenhängenden Bestandteile des Durchschnitts $G_0 G_1$. In (3) ist die *isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises enthalten.*

Vgl. über diesen Gegenstand mein Büchlein: Vorlesungen über Integralgeometrie, Erstes Heft, Leipzig und Berlin bei B. G. Teubner, 1936.

ÜBER DEN TENSORIAL-KALKÜL

Von D. van Dantzig, Delft.

In der üblichen Behandlungsweise der Algebra und der Differentialgeometrie in Funktionenräumen, wird die Überschiebung (skalares Produkt) einer kovarianten und einer kontravarianten Funktion f_x bzw. g^x, (beide erklärt in einem gewissen Raume R) definiert durch $\int f_x g^x dx$, wo dx das Volumelement in R ist. Es wird dabei also vorausgesetzt, daß in R eine Volummessung (Lebesgue'sches Maß) erklärt ist. Dasselbe ist der Fall bei der Definition der Ableitung eines Funktionals $\Phi[f]$, die nach Volterra durch

$$\Phi'[f](x) = \lim_{\delta,\, \varepsilon \to 0} \frac{\Phi[f+\varepsilon h] - \Phi[f]}{\varepsilon \int h(y)\, dy}$$

erklärt wird, wo $0 \leqq h(y) \leqq 1$, $h(x) = 1$ und $h(y) = 0$ für $\varrho(x,y) \geqq \delta$ ist.

Demgegenüber wird hier eine Behandlungsweise skizziert, die gegenüber beliebigen topologischen (und noch allgemeineren) Abbildungen von R invariant ist. Der Hauptgedanke besteht darin, daß neben den gewöhnlichen, mit f_x zu bezeichnenden, und als beschränkt und meßbar im Borelschen Sinne vorausgesetzten Funktionen, den „*Funktionen erster Art*", auch absolut-additive Mengenfunktionen oder *Funktionen zweiter Art* betrachtet werden, die mit F^X bezeichnet werden. Dabei durchlaufen $X, Y, Z, \cdots$ die Borel'schen Mengen (oder eine andere geschlossene Familie von Mengen) in R. Die Überschiebung von f_x und F^X, die mit Ff oder $\int F^{dx} f_x$ bezeichnet wird, ist durch

(1)
$$\int F^{dx} f_x = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum F^{X_\iota} f_{x_\iota}$$

erklärt, wobei die X_i eine Zerlegung von R in endlich viele disjunkte Teilmengen bilden, derart daß die Variation von f_x auf jedem $X_\iota \leqq \varepsilon$ ist, während x_i ein beliebiger Punkt in X_ι ist. Die Überschiebung (1) ist invariant bei (u. a.) topologischen Transformationen von R.

Dasselbe gilt von der Ableitung eines *Funktionals erster Art* $\Phi[f]$, die erklärt ist durch

(2)
$$\partial^X \Phi[f] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi[f + \varepsilon E^X] - \Phi[f]}{\varepsilon}$$

und (falls sie existiert und stetig ist) bei festem f eine Funktion zweiter Art ist, sowie von der Ableitung eines *Funktionals zweiter Art* $\varphi[F]$, die erklärt ist durch

(3)
$$\partial_x \varphi[F] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi[F + \varepsilon E_x] - \varphi[F]}{\varepsilon},$$

und (falls sie existiert, beschränkt und meßbar ist) bei festem F eine Funktion erster Art ist. Dabei ist E^X die charakteristische Funktion (erster Art) von X, die im Punkte x den Wert E_x^X annimmt, gegeben durch

(4)
$$E_x^X = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ in } X \text{ liegt} \\ 0, & \text{falls } x \text{ nicht in } X \text{ liegt,} \end{cases}$$

während E_x die „charakteristische Funktion zweiter Art von x" ist, die auf der Menge X den gleichfalls durch (4) gegebenen Wert E_x^X annimmt.

Man kann auf dieser Grundlage einen vollständigen „Tensorial-Kalkül" durchführen, sowohl in Bezug auf lineare als auf beliebige Funktionaltransformationen erster oder zweiter Art. Der Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Ricci-Kalkül (der andererseits auch eine Spezialisierung ist) wird dadurch hergestellt, daß z. B. ein kovarianter p-Vektor $w_{i_1 \cdots i_p}$ eine Klasse von alternierenden $(p+1)$-Punktsfunktionen $w_{x_0 \cdots x_p}$ entspricht; der äußeren Ableitung $(p+1)!\,\partial_{[i}\, w_{i_1 \cdots i_p]}$ von $w_{i_1 \cdots i_p}$ entspricht $(p+2)!\; 1_{[x}\, w_{x_0 \cdots x_p]}$, wo 1_x in jedem Punkte den Wert 1 annimmt. Die übliche Form des Tensorialkalküls erscheint als metrische Spezialisierung der hier skizzierten *affinen* Theorie, weil durch die Angabe eines Volumelementes

dx, d. h. einer Funktion zweiter Art $m^X = \int\limits_X dx$, ein positiv semidefinites „Fundamentaltensorial" $g^{X,Y} = m^{XY}$ bestimmt ist.

Für eine ausführlichere Darstellung vgl. D. van Dantzig, Riccicalculus and functional-analysis, Proc. Kon. Ak. Amsterdam *39* (1936) S. 785—794.[1]

INVARIANTS CONFORMES, GÉOMÉTRIE DE M. WEYL ET CELLE DE M. KÖNIG

Par V. HLAVATÝ, Praha.

Dans cette communication l'auteur n'a traité qu'une seule application du problème mentionné en haut: Étant donnée — dans l'espace projectif courbe à n dimensions — une hypersurface X_{n-1} à $n-1$ dimensions, on a à trouver une normale projective de X_{n-1} d'ordre 4 et, de plus, la connexion projective, induite dans X_{n-1} par cette normale en jeu. Les normales trouvées (explicitement) forment un faisceau dont les éléments ne dépendent que d'une constante numérique (cfr. le cas d'une surface dans l'espace projectif plan à 3 dimensions!). On en peut construire explicitement une seule normale projective d'ordre 4, privilégiée par le fait qu'elle soit indépendante de la constante mentionnée. Cette normale induit dans X_{n-1} une connexion projective. Si' l'on a affaire à une hypersurface non holonome, une méthode analogue à celle-ci nous donne une normale projective qui est d'ordre 3.

---

[1] Mehr oder weniger verwandte Betrachtungen über Funktionale zweiter Art, wenn auch nicht affiner, sondern metrischer Natur, findet man in einer (in der obigen Arbeit noch nicht berücksichtigten) Reihe von 12 Arbeiten von Fumitomo Maeda, in Jn. of Sc. Hiroshima Univ. A. Vol. *1*, *2*, *3*, *4*, *6* (1930—1936).

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER KONVEXEN KÖRPER

Von Werner Fenchel, Kopenhagen.

Es seien $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n$ konvexe Körper des n-dimensionalen Raumes. Das Volumen $V(\mathfrak{C})$ ihrer Linearkombination $\mathfrak{C} = \lambda_1 \mathfrak{C}_1 + \lambda_2 \mathfrak{C}_2 + \cdots + \lambda_n \mathfrak{C}_n$ mit nicht negativen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ist eine Form n-ten Grades

$$V(\mathfrak{C}) = \sum_{\varrho_1=1}^{n} \sum_{\varrho_2=1}^{n} \cdots \sum_{\varrho_n=1}^{n} \lambda_{\varrho_1} \lambda_{\varrho_2} \cdots \lambda_{\varrho_n} V(\mathfrak{C}_{\varrho_1}, \mathfrak{C}_{\varrho_2}, \cdots, \mathfrak{C}_{\varrho_n}), \tag{1}$$

wo die Koeffizienten $V(\mathfrak{C}_{\varrho_1}, \mathfrak{C}_{\varrho_2}, \cdots, \mathfrak{C}_{\varrho_n})$ so geschrieben seien, daß sie bei Vertauschungen von $\mathfrak{C}_{\varrho_1}, \mathfrak{C}_{\varrho_2}, \cdots, \mathfrak{C}_{\varrho_n}$ ungeändert bleiben. $V(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n)$ wird dann als das gemischte Volumen der Körper $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n$ bezeichnet.

Nach Minkowski bestehen zwischen solchen gemischten Volumina mehrere Ungleichungen, die sich aus dem fundamentalen Satz von Brunn, nach welchem die n-te Wurzel der Form (1) eine konkave Funktion der nicht negativen Parameter λ_ν ist, sehr einfach gewinnen lassen.

Auf ganz andere Weise, nämlich durch direkte Behandlung des zugehörigen Minimumproblems, ist es nun gelungen für beliebige konvexe Körper $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_{n-2}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ die seit mehreren Jahren vermutete Ungleichung

$$[V(\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_{n-2}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L})]^2 \geqq V(\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_{n-2}, \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \cdot V(\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_{n-2}, \mathfrak{L}, \mathfrak{L}) \tag{2}$$

zu beweisen, aus der unter anderem alle bisher bekannten Ungleichungen dieser Art und auch der Brunnsche Satz leicht gefolgert werden können. Das erwähnte Minimumproblem besteht darin, die linke Seite von (2) bei variablem Körper $\mathfrak{L}$ zum Minimum zu machen, wenn die Körper $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_{n-2}$ und $\mathfrak{K}$ sowie der Wert von $V(\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_{n-2}, \mathfrak{L}, \mathfrak{L})$ vorgeschrieben sind. Aus Stetigkeitsgründen können sämtliche Körper als Polyeder, sogar mit gemeinsamen Normalenrichtungen der Seitenflächen, angenommen werden. Man hat es dann mit einem Minimumproblem für eine Funktion von endlich vielen Variablen (nämlich den Abständen der Seitenflächen des Polyeders $\mathfrak{L}$ vom Nullpunkt) zu tun, das mit sehr einfachen Mitteln behandelt werden kann.

Wählt man in (2) für $\mathfrak{L}$ und einige der $\mathfrak{C}$ speziell die Einheitskugel und setzt die übrigen $\mathfrak{C}$ gleich $\mathfrak{K}$, so erhält man Ungleichungen zwischen den Krümmungs- oder Quermaßintegralen von $\mathfrak{K}$.

Wann in (2) das Gleichheitszeichen steht ist bisher nicht gelungen zu entscheiden.

ON CIRCLES CONNECTED WITH THREE AND FOUR LINES

By J. R. Musselman, Cleveland, Ohio.

The following theorems are proved.

1. For every point on the Euler line of a triangle $A_1 A_2 A_3$ if we determine its reflections B_1, B_2, B_3, in the sides $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$, the circles $B_1 B_2 A_3$, $B_2 B_3 A_1$, $B_3 B_1 A_2$ meet the circumcircle $A_1 A_2 A_3$ in a fixed point M. Whence also the circles $A_1 A_2 B_3$, $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$ meet the circumcircle $B_1 B_2 B_3$ at a fixed point N. The points M and N are symmetric as to the center of the common nine-point circle of $A_1 A_2 A_3$ and $B_1 B_2 B_3$.

2. If P be any point in the plane and H the orthocenter of the triangle $A_1 A_2 A_3$, for every point on the line HP if we determine its reflections $B_1 B_2 B_3$ in the sides $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$, the four circles $B_1 B_2 A_3$, $B_2 B_3 A_1$, $B_3 B_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$ meet at a fixed point M. Whence also the circles $A_1 A_2 B_3$, $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$, $B_1 B_2 B_3$ meet at a fixed point N.

Application of the latter theorem leads to

3. If we reflect any point P of a rectangular hyperbola in a chord $A_1 A_2$ obtaining the point B_3, the circle $A_1 A_2 B_3$ is on N, the diametrically opposite point of P.

4. If A_1, A_2 A_3, P, Q are five points on a rectangular hyperbola with P and Q at ends of a diameter, and P_1, P_2, P_3 are the images of P in the sides of the triangle $A_1 A_2 A_3$ then the four circles $P_1 A_2 A_3$, $P_2 A_3 A_1$, $P_3 A_1 A_2$, and $P_1 P_2 P_3$ are all on Q. Similarly if Q_1, Q_2, Q_3 are the images of Q in the sides of the triangle $A_1 A_2 A_3$, the four circles $Q_1 A_2 A_3$, $Q_2 A_3 A_1$, $Q_3 A_1 A_2$ and $Q_1 Q_2 Q_3$ are all on P.

If F be the focus of the parabola touching any four lines we have the theorems

5. If we reflect F in the four lines and construct the points N_1, N_2, N_3, N_4 one for each three out of the four lines as indicated in theorem 2, the four points N_i lie on the directrix of the parabola, and the four points M_i lie on a circle. For any five lines of the parabola, we will have five such circles and the inverse points of the focus as to each circle lie also on a circle.

6. If we reflect any point on the directrix of the parabola in the four lines and construct the four points M_i as indicated in theorem 2, the points M_i all coincide with F, the focus, and hence all sixteen circles are on this point.

7. If the lines l_i and l_j of the parabola meet at the point x_{ij}, the perpendiculars at x_{12} to the line $x_{12}F$, at x_{23} to $x_{23}F$, at x_{31} to $x_{31}F$ meet at a point L_4 such that the circumcenter of $x_{12}\,x_{23}\,x_{31}$ is the midpoint of L_4F. For four lines of the parabola we can determine four points as L_4 which points all lie on a circle through F.

Consider now four points A_1, A_2, A_3, A_4 on a circle. If we reflect the circumcenter of $A_1\,A_2\,A_3$ in the sides of the triangle $A_1\,A_2\,A_3$, obtaining the points $B_1\,B_2\,B_3$ then the circles $A_2\,A_3\,B_1$, $A_3\,A_1\,B_2$, $A_1\,A_2\,B_3$ and $B_1\,B_2\,B_3$ intersect at the point N_4. By using the circumcenters of $A_1\,A_2\,A_4$, $A_1\,A_3\,A_4$, and $A_2\,A_3\,A_4$ we obtain points N_3, N_2, and N_1.

8. The points N_i lie on a circle and the pairs of points A_iN_i are pairs of an involution.

DIE VON EINER QUANTIK INDUZIERTE RIEMANNSCHE METRIK

Von D. BARBILIAN, Bukarest.

Es sei Ω eine algebraische Form (eine Quantik) von der Ordnung $n \neq 0,1$ in den ternären Variabeln x. Setzt man

$$\Omega\,dx = \frac{1}{n}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}\,dx_i,\quad \Omega\,dx\,dx = \frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dx_i\,dx_j, \tag{1}$$

so ist durch

$$ds^2 = k^2\left(\frac{\Omega\,dx\,dx}{\Omega} - \left\{\frac{\Omega\,dx}{\Omega}\right\}^2\right) \tag{2}$$

— unter k eine Konstante verstanden — *der zu Ω gehörige Quantikraum* erklärt.

Man beweist der Reihe nach die Sätze:

1) Die Maßbestimmung (2) ist projektivinvariant und weist $\Omega=0$ als einzige Diskontinuitätslinie auf. Für $n=2$ fällt sie mit der CAYLEYschen Maßbestimmung zusammen.

2) Das Vorkommen einer geradlinigen Schar $x_2 : x_3 = K^{te}$ von geodätischen Linien fordert entweder

$$(3)\quad \Omega \equiv \omega_n + \omega_{n-1}\,x_1 \qquad \text{oder} \qquad (4)\quad \Omega \equiv (\omega_{n-m} + x_1^{n-m})\,x_1^m\,,$$

je nachdem das Zentrum $(1,0,0)$ der betreffenden Schar auf $\Omega = 0$ liegen soll oder nicht. Hierbei stellt ω_i eine Binärform von der Ordnung i dar.

3) Der einzige Quantikraum mit einer kontinuierlichen ∞^2 Schar geodätischer Linien ist der CAYLEYsche Raum.

4) Die zu Ω und ihrer 3-ten Polarform

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} y_i y_j y_k, \quad n \geqq 3 \tag{5}$$

gehörigen Quantikräume haben an der Stelle x dieselbe GAUSSsche Krümmung.

5) Es gilt für die GAUSSsche Krümmung:

$$K = \frac{4}{9k^2}\left(1 + \frac{g_2 \Omega^2}{H^2}\right), \tag{6}$$

wobei H die HESSEsche Form von Ω, g_2 aber jene Kovariante ist, deren Nullsetzung mit dem Eintreten des äquianharmonischen Falles für die Polarkubik (5) gleichbedeutend ist. Die numerischen, normierenden Faktoren von g_2 und H sind sofort anzugeben.

6) Der Dreiecksraum

$$\Omega \equiv (a_1 x) \cdot (a_2 x) \cdot (a_3 x), \quad |a| \neq 0, \tag{7}$$

ist unter allen Quantikräumen durch seine nullte GAUSSsche Krümmung vollständig gekennzeichnet. Die geodätischen Linien dieses Raumes fallen mit den dem Dreieck $\Omega = 0$ zugehörigen KLEIN-LIEschen Kurven zusammen.

7) Die übrigen Quantikräume mit konstanter, von Null abweichender Krümmung sind diejenigen, deren Quantik vermöge linearer Transformationen auf eine dieser beiden Gestalten zurückzuführen ist:

$$\Omega \equiv x_1^n + x_2^n + x_3^n, \qquad \Omega \equiv \omega_n + x_1 x_2^{n-1}. \tag{8}$$

— Die Ergebnisse 1), 2), 3), 4), 6) sind auf Quantikräume von mehreren Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_p$ zu erstrecken, mit dem Unterschiede, daß man in 6) statt Krümmung und Dreiecksraum: Krümmungstensor bezw. Simplexraum zu lesen hat.

Übrigens kann der Begriff des Quantikraumes noch weiter ausgedehnt werden, indem man die fundamentale Quantik durch eine allgemeine, analytische, eindeutige Funktion Ω ersetzt, die in den Variabeln x homogen von der Ordnung $n \neq 0, 1$ sein muß.

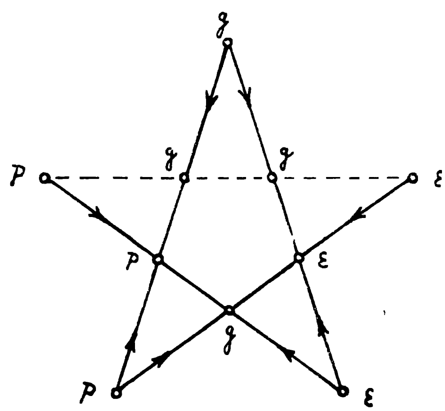
STRUKTUR DER AXIOME DER PROJEKTIVEN GEOMETRIE

Von L. LOCHER, Winterthur.

Die Verknüpfungsaxiome der dreidimensionalen projektiven Geometrie kann man so wählen (vgl. Bieberbach: Einleit. in die höh. Geom.) und formulieren, daß sie sich in ein merkwürdiges Schema bringen lassen. Für die Worte Punkt, Gerade, Ebene seien die Buchstaben P, g, ε gesetzt:

1. Liegt ein P in einer g, diese in einer ε, so liegt auch der P in der ε.
2. Es gibt eine g und zu jeder g gibt es drei unter einander windschiefe g, welche mit ihr je einen P und je eine ε gemeinsam haben.
3. Zwei P lassen sich durch eine g verbinden. ($PP-g$). | Zwei ε lassen sich in einer g schneiden. ($\varepsilon\varepsilon-g$).
4. Zwei g haben entweder sowohl einen P und auch eine ε oder weder einen P und noch eine ε gemeinsam. $\left(gg<^{P}_{\varepsilon}\right.$ oder $\left.gg\not<^{P}_{\varepsilon}\right)$.
5. Liegen zwei verschiedene P beide in den Geraden a und b, so sind diese identisch. ($PP-g=g$). | Gehen zwei verschiedene ε beide durch die Geraden a und b, so sind diese identisch. ($\varepsilon\varepsilon-g=g$)
6. Liegen ein P und eine nicht durch sie gehende g beide in den Ebenen α und β, so sind diese identisch. ($Pg-\varepsilon=\varepsilon$). | Gehen eine ε und eine nicht in ihr liegende g beide durch die Punkte A und B, so sind diese identisch. ($\varepsilon g-P=P$).

2.—4. sind Existenz-, 5. und 6. Eindeutigkeitssätze. 1. und 3.—6. lassen sich an der aus $4g$, $3P$ und 3ε bestehenden nach 2. existierenden Grundfigur darlegen. Das Schema ist nun folgendes:



Die weiteren hier auftretenden Sätze sind Folgen von 1.—6.; z. B. $Pg-\varepsilon$ und $\varepsilon g-P$, $gg-P=P$ und $gg-\varepsilon=\varepsilon$, $\varepsilon\varepsilon-g=P$ und $PP-g=\varepsilon$ ($g=P$, $g=\varepsilon$ deutet hier Incidenz an).

Auf Grund von 1.—6. kann man nun bekanntlich einer solchen Verknüpfungsgeometrie einen Schiefkörper zuordnen. Der Wedderburn'sche Satz, daß jeder endliche Schiefkörper ein Körper ist, muß sich also auch geometrisch beweisen lassen; etwa in der Form: Die Aussage „Eine ebene Kollineation ist durch 4 Punkte, von denen keine drei kollinear sind, eindeutig bestimmt" ist in Geometrien mit endlich viel Elementen eine Folge der Verknüpfungsaxiome. Die Existenz ist leicht ersichtlich; die Eindeutigkeit läßt sich nun durch eine einfache Betrachtung so nachweisen, daß man auf Grund von 1.—6. zeigt: Ausgehend von den gegebenen 4 Punkten werden durch die Moebius'sche Netzbildung überhaupt alle Punkte der Ebene erfaßt.

SUR LES FORMES DES ÉQUATIONS A 3 VARIABLES REPRÉSENTABLES PAR DES ABAQUES CONIQUES A SIMPLE ALIGNEMENT

Par Boulad Bey, le Caire.

J'établis les formes nomographiquement rationnelles ci-dessous les plus générales des équations à 3 variables représentables par les 3 types d'abaques ou nomogrammes coniques à points alignés ci-après, avec les conditions algébriques de représentabilité que j'ai indiquées tout récemment (*C. R. de l'Acad. des Sciences de Paris, 29 Juin 1936*). Ces conditions résultent des celles déjà déterminées en appliquant à l'équation d'ordre 6, la plus générale, ma méthode pour effectuer la disjonction des variables des équations d'ordre nomographique supérieur par les valeurs critiques de M. Ocagne. (*C. R. de l'Acad. des Sciences de Paris, 14 Février 1910 et Bull. de la Soc. Math. de France T. 39ᵉ 1911*). Chacun de ces 3 types comporte deux échelles coniques quelconques à supports distincts. La 3ᵉ échelle étant curviligne dans le 1ʳ type, conique dans le 2ᵉ et rectiligne dans le 3ᵉ.

En outre, je donne les formes canoniques des équations représentables par ces types de nomogrammes, vu qu'on rencontre dans la technique des formules qui se présentent sous ces formes. Ces dernières sont comprises dans les formes canoniques générales des équations d'ordre 6 et 5, représentables par de nouveaux types de nomogrammes à echelles symétriques par rapport à un centre ou un axe, types exposés dans ma communication (*C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris du 15 Juillet 1936*).

Voici la forme la plus générale d'ordre 6 représentable par le 1r type de nomogramme moyennant les conditions d'anamorphose précitées.

$$f_3(f_2^2 A_1+f_2 L_1+P_1)+g_3(f_2^2 A_2+f_2 L_2+P_2)+(f_2^2 A_3+f_2 L_3+P_3)=0$$

avec $\quad A_i=a_i f_1^2+b_i f_1+c_i \quad L_i=l_i f_1^2+m_i f_1+n_i \quad P_i=p_i f_1^2+q_i f_1+r_i$

(pour $i=1, 2, 3$). Pour avoir la forme représentable par le 2e type, il suffit d'y remplacer f_3 et g_3 par f_3^2 et f_3. Et pour la forme d'ordre 5 correspondante du 3e type, il suffit d'annuller g_3 ou bien f_1^2 dans la 2e forme.

SUR LA SYMÉTRIE NOMOGRAPHIQUE ET LES FORMES CANONIQUES DES ÉQUATIONS A 4 VARIABLES REPRÉSENTABLES PAR DES ABAQUES A DOUBLE ALIGNEMENT

Par Boulad Bey, le Caire.

J'explique géométriquement et algébriquement la symétrie nomographique des nomogrammes à échelles superposées à double alignement avec ou sans charnière, au moyen de la notion des valeurs critiques de M. d'Ocagne par la considération de deux variables indéterminées à la fois que j'ai adoptée dans mes précédentes communications « sur les équations à 4 variables d'ordre nomographique supérieur ». (*Bull. de la Soc. Math. de France, Tome XL 1912 et C. R. du Congrès Inter. des Math. de Cambridge 1912*).

En outre, je présente les formes canoniques des équations à 4 variables mises sous la forme du groupement $F_{12}=G_{34}$, représentables par les deux types suivants de nomogrammes à double alignement dans chacun desquels les deux échelles (z_2) et (z_4) étant curvilignes quelconques.

Le 1r type à charnière conique portant les deux autres échelles (z_1) et (z_3).

Le 2e type à charnière rectiligne a ses deux autres échelles (z_1) et (z_3) confondues.

Je considère séparément pour le support commun des deux échelles (z_1) et (z_3) dans chacun de ces deux types: une droite, un cercle, une parabole et une hyperbole à équation de la forme la plus simple.

Je donne également les équations des échelles de ces deux types de nomogrammes, étant donné qu'un grand nombre des formules fournies par la technique se présentent sous les formes canoniques ci-dessus.

SUR LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Par B. DE KERÉKJÁRTÓ, Szeged.

Dans le modèle de la géométrie hyperbolique plane dû à Poincaré, le plan hyperbolique est représenté par le demi-plan supérieur $y>0$ (x, y désignent des coordonnées cartésiennes); les droites hyperboliques sont les demi-circonférences $(x-a)^2+y^2=r^2$ et les demi-droites $x=$ const ($y>0$). Les demi-droites $y=cx+d$ ($y>0$) sont les lignes équidistantes des droites hyperboliques $x=d$, et les lignes $y=$ const (>0) sont des horocycles orthogonaux sur le faisceau $x=$ const. — A partir de la géométrie hyperbolique plane, on peut construire un modèle de la géométrie euclidienne plane par le procédé suivant. Prenons dans le plan hyperbolique un faisceau (a) de droites parallèles dans une direction, epuis le faisceau (h) des horocycles orthogonaux sur (a), et les lignes équidistantes (e) des droites (a). Considérons deux copies du plan hyperbolique, et désignons par les indices 1 ou 2 les éléments appartenant à l'une ou à l'autre copie. Nous ajoutons au plan hyperbolique les points à l'infini, excepté celui du faisceau (a), et nous réunissons les deux copies suivant les points à l'infini. Nous définissons une pseudo-géométrie dont les droites sont les suivants: une droite $\bar{a}$ est formée par la réunion de deux droites a_1 et a_2 et de leur point commun à l'infini; une droite $\bar{e}$ est formée par les lignes équidistantes e_1 et e_2 de a_1 et de a_2, telles que les distances (a_1, e_1) et (a_2, e_2) sont égales et de signes contraires; une droite $\bar{h}$ est un horocycle h_1 ou h_2. Par le moyen de la congruence hyperbolique, nous définissons une pseudo-congruence pour les segments des droites $\bar{a}$, $\bar{e}$, $\bar{h}$. Nous démontrons alors que pour les droites $\bar{a}$, $\bar{e}$, $\bar{h}$, les axiomes de la géométrie euclidienne se trouvent vérifiés. La géométrie hyperbolique donnée n'est donc autre chose que le modèle de Poincaré dans la pseudo-géométrie euclidienne que nous venons de construire.

Les détails de la conférence seront publiés ailleurs.

A NAPIER'S THEOREM FOR QUADRANTAL TRIANGLES

By ROBERT E. MORITZ, Seattle, U. S. A.

It has been repeatedly pointed out that the two rules, known as Napier's Rules of the Circular Parts, which yield in an easily remembered form the ten formulas for the solution of right spherical triangles, constitute one of the most beautiful theorems of solid geometry. The proof of this theorem depends upon the relation of corresponding parts of the five triangles which form the mystic pentagram. Now it is a wellknown fact that many important problems in spherical astronomy depend upon the solution of quadrantal rather than right triangles. Such solutions are usually effected by the use of the polar triangle, a procedure which requires two conversions, first from the quadrantal triangle to the polar, and then from the polar back to the original triangle. The present paper establishes a theorem which is in every respect the analogue of Napier's Theorem. The proof employs five cyclically related quadrantal triangles having the same circular parts, where the circular parts now are the $A, \frac{\pi}{2} - b, -\left(\frac{\pi}{2} - C\right), \frac{\pi}{2} - a, B,$ the actual parts of the triangle (not counting the quadrantal side) being A, b, C, a, B. Napier's rules, when applied to these circular parts yield the ten formulas for the solution of quadrantal triangles.

NEW WAYS IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

By Karl MENGER, Wien.

The classic differential geometry considers the arithmetic models which analytic geometry makes correspond to geometric entities: the systems of numbers (coordinates) representing points, the equations or systems of equations defining curves and surfaces etc. It consists of the application of the calculus to these models. In this paper some concepts and results of two new methods are considered: the *direct differential geometry* of BOULIGAND and his school in Poitiers, France, dealing particularly with tangential manifolds, and the applications to local geometric properties of the *metric geometry* or *geometry of distances* by myself and some collaborators, particularly WALD, in Vienna, Austria, which led to a general theory of curvature and of geodesics. Both methods have in common the fact that they neither consider nor need analytic representation of the curves or surfaces which they treat.

If p is a point of the subset S of the n-dimensional euclidean space E_n, BOULIGAND calls[1] *contingent* of S in p the set of all directions ϑ for which there exists a sequence $p_1, p_2, \cdots$ of points of S different from p and convergent towards p such that the directions $\vartheta_i (i=1, 2, \cdots)$ from p to p_i converge towards ϑ. He calls *paratingent* of S in p the set of the directions of all straight lines η for which there exists a sequence of pairs of points $p_1, p'_1; p_2, p'_2; \cdots (p_i \neq p'_i)$ converging towards p such that the

[1] Introduction à la géometrie infinitésimale directe, Paris Vuibert, 1932.

straight lines $\eta_i (i = 1, 2, \cdots)$ joining p_i and p'_i converge towards η. Contingent and paratingent of a subset of E_n in a point may thus be interpreted as subsets of the $(n-1)$-dimensional sphere and the $(n-1)$-dimensional projective space, respectively.[1]

Geometry of distances starts from a metric space in the sense of FRÉCHET, i. e., a set such that with each pair of points p, q a real number $pq = qp$ is given, > 0 if $p \neq q$, while $pp = 0$, and such that always $pq + qr \geqq pr$, or, what is equivalent, such that each triple of points p, q, r is congruent with three points p', q', r' of the euclidean plane. With each triple p, q, r of a metric space we may thus associate the radius $\varrho(p, q, r)$ of the circle circumscribed to p', q', r' in the plane. We say that the subset S of the space has the *one-dimensional curvature* $\varkappa_1(p_0)$ in the point p_0 if for each triple of points p, q, r of S the number $1/\varrho(p, q, r)$ differs arbitrarily little from $\varkappa_1(p_0)$ provided that p, q, r are sufficiently near to p_0. ALT has still weakened this definition by merely postulating that $1/\varrho(p_0, q, r)$ differs arbitrarily little from $\varkappa_1(p_0)$ if q and r are sufficiently near to p_0. If applied to a curve of differential geometry, these concepts are nearly related with the classic curvature.[2]

The theory of two-dimensional curvature is based on another chapter of metric geometry, viz. on the theory of convexity.[3] We call *convex* a metric space such that for each two distinct points p and r there exists at least one point q between them, i. e., such that $p \neq q \neq r$ and $pq + qr = pr$. An example of a convex space is Σ_k, i. e. the sphere of curvature k — with geodesic distances if $k > 0$, and the euclidean or the hyperbolic plane of curvature k if $k \leqq 0$. If S is a metric space such that for each two distinct points p and q the geodesic distance (i. e. the lower bound $\gamma(p, q)$ of the lengths of all arcs joining p and q) is finite, > 0 and arbitrarily little if the distance between p and q in S is sufficiently small, then the metric space S_γ whose points are those of S and in which $\gamma(p, q)$ is the distance between p and q, is convex. For two arcs C and C' with the same finite length, C_γ and C'_γ are identical. The interest of this *geodesic metric* begins with surfaces.

For each Gauss surface S the metric space S_γ is compact and convex and has, according to a theorem of WALD, in each point p_0 a *two-dimensional curvature* $\varkappa_2(p_0)$ in the following sense: Each quadruple of points of a

[1] Quite recently PAUC has shown that these concepts may be defined and studied for subsets of much more general spaces. viz. of what I call *space with directions*, i. e., a set with a mapping of the pairs of distinct points on another set.

[2] See my paper Mathem. Annalen 103, ALT's Vienna thesis 1932 and Ergebn. e. math. Kolloquiums 3, p. 5 and 4, p. 4 and PAUC, C. R. Paris 203, p. 153.

[3] See my paper Mathem. Annalen 100, p. 75.

sufficiently small neighborhood of p_0 is congruent with four points of a Σ_k where k differs arbitrarily little from $\varkappa_2(p_0)$, while no neighborhood of p_0 is congruent with a line segment. $\varkappa_2(p_0)$ is, for each point p_0, identical with the classic Gauss curvature of the surface S in p_0 for which, by the metric consideration of quadruples, we get thus an extremely simple and natural definition. But besides it was shown by WALD that also the converse of the last theorem holds, which leads to the following fundamental theorem: *In order that a metric space be congruent with a Gauss surface it is necessary and sufficient that it be compact, convex and have in each point a two-dimensional curvature in the sense of Wald.*[1]

The metric theory of *geodesics* is a chapter of calculus of variations.[2]

NEUE EIGENSCHAFTEN DER LINEAREN STRAHLENKONGRUENZ

Von G. HAENZEL, Karlsruhe.

Betreibt man die Geometrie der linearen Kongruenz als Geometrie auf der Fläche zweiter Ordnung, so entsprechen den Kongruenzstrahlen und den einscharig in der Kongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung die Punkte und Kegelschnitte der Fläche zweiter Ordnung. Durch Anfügen einer geeigneten stereographischen Projektion gehen die Strahlen der hyperbolischen Kongruenz in die Punkte einer Bildebene mit zwei reellen Fundamentalpunkten über, die Strahlen der elliptischen in die Punkte einer Bildebene mit zwei konjugiert imaginären Fundamentalpunkten. Hierbei zeigt sich zum ersten Male die grundlegende Tatsache, daß die automorphen Kollineationen der linearen Kongruenz in der Bildebene durch die quadratischen Cremonatransformationen wiedergegeben werden. Gleichzeitig tritt die Geometrie der linearen Kongruenz in mannigfacher Verbindung mit der pseudoeuklidischen und der euklidischen Geometrie der Ebene. Es ergibt sich eine organische analytische Darstellung der von Herrn Jolles auf synthetischem Wege entdeckten Theorie der Involutionen und der Polarentheorie der Kongruenz und eine Verbindung zur Gerade-Kugeltransformation.

Vor allem aber läßt sich die Theorie der in der Kongruenz enthaltenen (transzendenten und algebraischen) Regelscharen in erheblichem Umfange auf die Theorie der ebenen Kurven aufbauen, wobei zahlreiche Theoreme gewonnen werden. Die Singularitäten dieser Regelscharen und ihre bisher

[1] See WALD's paper in Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums 7, p. 24, Wien 1936. For a survey of the results C. R. Paris. 18. XI, 1935.

[2] See my paper on calculus of variation in the Proceedings of this Congress.

kaum behandelten Hüllflächen lassen sich einfach ableiten. Die Heranziehung der Differentialgleichung erster Ordnung und der Differentialgleichung Clairauts führt auf einfachem Wege zu zahlreichen neuen Ergebnissen.

Die weiteren Abschnitte bringen eine kurze Theorie der Regelscharen dritter und vierter Ordnung in der Kongruenz. Sodann werden die sogenannten Ringsysteme und Ketten von Regelscharen zweiter Ordnung mit merkwürdigen neuen Sätzen behandelt, sowie ein neues Theorem über die Regelfläche vierten Grades erster Art. Im letzten Abschnitte erscheinen die neuen Begriffe der konjugierten Richtungen und der Polarinvarianz in der Umgebung eines Kongruenzstrahles. Ihre Einführung ermöglicht es, bestimmte Methoden und Ergebnisse der Theorie analytischer Funktionen für die Erforschung der Geometrie der linearen Kongruenz dienstbar zu machen.

Eine ausführliche Darstellung erscheint im Journal f. d. reine und angewandte Mathematik.

SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DE L'ÉQUATION DE LAPLACE

Par G. Tzitzéica, Bucarest, Roumanie.

1. Une equation de Laplace de la forme

$$x_{uv}+a\,x_u+b\,x_v+c\,x=0, \tag{1}$$

où

$$x_u=\frac{\partial x}{\partial u},\quad x_v=\frac{\partial x}{\partial v},\quad x_{uv}=\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$$

et a, b, c des fonctions données de u et v, peut servir de base pour deux géométries différentielles, une projective, l'autre centro-affine. La première est classique, c'est la théorie des réseaux. La seconde, étroitement liée à la première, n'a pas encore été formulée. Je me propose de montrer qu'elle peut conduire à des résultats intéressants.

2. Considérons n solutions x_1, x_2, $\cdots$, x_n de (1) et supposons qu'elles soient, dans un espace à n dimensions, les coordonnées non homogènes d'un point x, qui décrit une surface lorsque u et v varient.

Il s'agit de trouver les propriétés géométriques caractéristiques pour les courbes $u=\text{const.}$ et $v=\text{const.}$ tracées sur cette surface et qui résultent de l'équation (1).

Dans le cas $c=0$, ces propriétés sont évidentes, car les deux familles de courbes forment un réseau. Nous supposerons donc, dans ce qui suit, $c\neq 0$.

Remarquons encore que pour $n=3$, la propriété que nous cherchons doit être banale, car, dans un espace à trois dimensions, pour toute surface et pour deux familles quelconques de courbes $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ tracées sur elle, on peut trouver une équation (1) correspondante.

3. Supposons d'abord $a \neq 0$ et posons

$$x' = x + \frac{1}{a} x_v, \tag{2}$$

on peut alors écrire l'équation (1) sous la forme

$$x'_u + \frac{a_u + a\,b}{a} x' + \frac{h}{a} x = 0, \tag{3}$$

où $h = a_u + a\,b - c$ est le premier invariant de Darboux pour l'équation (1).

De même, si $b \neq 0$, on peut poser

$$x'' = x + \frac{1}{b} x_u \tag{4}$$

et alors l'équation (1) peut s'ecrire sous la forme

$$x''_v + \frac{b_v + a\,b}{b} \cdot x'' + \frac{k}{b} x = 0, \tag{5}$$

où $k = b_v + a\,b - c$ est le second invariant de Darboux.

4. Les propriétés géométriques cherchées peuvent maintenant être lues sur les relations (2), (3), (4) et (5).

Prenons d'abord (2) et (3). On a alors la propriété suivante: *On peut circonscrire à la surface réglée R_u engendrée par la tangente $x\,x_v$ à la courbe $u=\text{const.}$, lorsque le point x décrit la courbe $v=\text{const.}$, un cône ayant le sommet à l'origine.*

On a une propriété analogue tirée des relations (4) et (5), qui résulte d'ailleurs de la précédente.

Dans le cas où $a=0$, le point x' est à l'infini et alors tous les plans asymptotiques des surfaces R_u passent par l'origine. On a une propriété analogue pour $b=0$.

Si on a en même temps $a=0$, $b=0$, l'équation (1) est une équation de Moutard, dont les surfaces réglées R_u et R_v jouissent de la propriété intéressante d'admettre des cônes asymptotiques ayant tous leur sommet à l'origine.

5. Il y aurait lieu d'étudier les cas $h=0$ et $k=0$, de même que les propriétés analogues à la transformation de Laplace dans un sens ou dans l'autre.

TENSOR COORDINATES OF LINEAR SPACES

By WALLACE GIVENS, Princeton, N. J.

The Pluecker-Klein coordinates of a line in the real or complex projective space P_{n-1} are components of a skew-symmetric tensor $V^{ij}=\frac{1}{2}(A^i B^j - A^j B^i)$, where A^i and B^i $(i=1, \cdots, n)$ are coordinate vectors of two distinct points on the line. In a similar way an $(r-1)$-dimensional linear subspace of P_{n-1} determines to within a factor a skew-symmetric tensor $V^{i_1 i_2 \cdots i_r}$. Regarding the subspace V as the intersection of $n-r$ hyperplanes, it determines to within a factor a covariant skew-symmetric tensor $V_{j_1 j_2 \cdots j_{n-r}}$ with $n-r$ indices.

We replace a set of tensor indices $i_1 i_2 \cdots i_r$ by a single large type index $\mathbf{i}$ and denote the number of indices by $|i|$ $(=r)$, in words, the length of $\mathbf{i}$. The covariant coordinates of V are obtained from the contravariant ones by a renumbering of the components of $V^{\mathbf{i}}$. This is conveniently expressed in the rule

$$V_{\breve{\mathbf{j}}} = \frac{\varrho(|i|)}{|i|!} \varepsilon_{\mathbf{ji}} V^{\mathbf{i}}, \tag{1}$$

where $\varepsilon_{\mathbf{k}}(|k|=n)$ is zero unless $\mathbf{k}$ is a permutation of $(1, 2, \cdots, n)$ and then is $+1$ or -1 according as the permutation is even or odd, and $\varrho(|i|)$ is any scalar function of the number of indices in $\mathbf{i}$. The equations inverse to (1) are

$$V^{\mathbf{i}} = \frac{1}{\varrho(|i|)\,|j|!} V_{\breve{\mathbf{j}}}\, \varepsilon^{\mathbf{ji}}, \tag{2}$$

where $\varepsilon^{\mathbf{k}}=\varepsilon_{\mathbf{k}}$. We employ (1) and (2) to lower and raise sets of skew-symmetric indices. By erasing the hook ($\breve{\ }$) from $V_{\breve{\mathbf{j}}}$ and adding it to $V^{\mathbf{i}}$, we may also use (1) and (2) to define a tensor $W^{\hat{\mathbf{i}}}$ associated with $W_{\mathbf{j}}$.

It can be shown that the quadratic relations satisfied by the coordinates of a subspace of P_{n-1} are $V^{\mathbf{i}rs} V_{\breve{\mathbf{j}rs}}=0$ and that these equations imply the apparently stronger relations $V^{\mathbf{i}ps} V_{\breve{\mathbf{j}qs}}=0$. Indeed, if two linear spaces V and W intersect in a space of α dimensions, $V^{\mathbf{is}} W_{\breve{\mathbf{js}}}=0$ for $|i|-1>\alpha$. When $|i|-1=\alpha$, $V^{\mathbf{is}} W_{\breve{\mathbf{js}}}=I^{\mathbf{i}} J_{\breve{\mathbf{j}}}$, where $I^{\mathbf{i}}$ and $J^{\mathbf{k}}$ are coordinate tensors of the intersection and join, respectively, of V and W.

Introducing into the geometry of P_{n-1} a non-singular quadratic form $\gamma_{ij} X^i X^j$, we are able to lower and raise single tensor indices by the familiar rules: $V_{ij} X^j = X_i$, and $X_j V^{ji}=X^i$. If we choose $\varrho(|i|)$ in (1) and (2) to satisfy the condition

$$\varrho(|i|)\ \varrho(n-|i|)=(-1)^{|i|(n-|i|)}\ (\text{determinant of } \|\gamma_{ij}\|),$$

we secure a consistent calculus in which the tensors $V^{\mathbf{i}}$, $V_{\mathbf{i}}$, $V^{\underset{\wedge}{\mathbf{j}}}$, and $V_{\overset{\smile}{\mathbf{j}}}$ are related as indicated in the diagram:

$$\begin{tikzcd} V^{\mathbf{i}} \arrow[r, leftrightarrow, "\varepsilon"] \arrow[d, leftrightarrow, "\gamma"'] & V_{\overset{\smile}{\mathbf{j}}} \arrow[d, leftrightarrow, "\gamma"] \\ V_{\mathbf{i}} \arrow[r, leftrightarrow, "\varepsilon"'] & V^{\underset{\wedge}{\mathbf{j}}} \end{tikzcd} \qquad |i|+|j|=n\,.$$

When $V^{\mathbf{i}}$ and $V_{\overset{\smile}{\mathbf{j}}}$ determine a linear space, $V_{\mathbf{i}}$ and $V^{\underset{\wedge}{\mathbf{j}}}$ are coordinate tensors of its polar in the quadric $\gamma_{ij}X^iX^j=0$.

If $n=2\nu$, a $(\nu-1)$-dimensional linear space will lie on the quadric if

$$V^{\underset{\wedge}{\mathbf{i}}}=+V^{\mathbf{i}} \text{ or } V^{\underset{\wedge}{\mathbf{i}}}=-V^{\mathbf{i}},$$

and these equations distinguish the two families of rulings on the quadric.

The calculus here indicated may be used in studying the spinor representations of the orthogonal group. This and some other applications will be published in the next volume of the Annals of Mathematics.

SUR CERTAINS RÉSEAUX PROJECTIVEMENT DÉFORMABLES

Par AL. PANTAZI, Bucarest.

M. Terracini a démontré (Rendic. Lincei XXII) que lorsque deux congruences Γ et Γ_1 consécutives dans une suite de Laplace (dans un espace à 3 dimensions) sont respectivement projectivement applicables (au sens de M. M. Fubini et Cartan) sur deux congruences Γ', Γ'_1 consécutives dans une 2^de^ suite de Laplace, alors toutes les congruences $\Gamma_2, \cdots, \Gamma_{-1}, \Gamma_{-2}, \cdots\cdots$ de la première suite sont projectivement applicables sur les congruences correspondantes $\Gamma'_2, \cdots, \Gamma'_{-1}, \Gamma'_{-2}, \cdots\cdots$ de la 2^de^ suite. Pour la commodité du langage nous dirons que le réseau (A) focal commun à Γ et Γ_1 est applicable sur le réseau (A') focal commun à Γ' et Γ'_1. Le théorème de M. Terracini s'énonce alors ainsi: Lorsque deux réseaux sont projectivement applicables, les transformés de Laplace du 1^r^ sont projectivement applicables sur les transformés de Laplace du 2^d^ réseau. Nous avons démontré:

a. Que les réseaux projectivement déformables dépendent de dix fonctions d'un argument;

b. Les réseaux R sont déformables et applicables sur des réseaux R. La déformation d'un réseau R entraine, en général, la déformation projective des surfaces portant le réseau, mai il y a des cas d'exception;

c. Les réseaux T (v. ma Note C. R. Janv. 1936) sont également déformables et applicables sur des reseaux T; en plus ils sont toujours applicables sur des réseaux quadratiques. Ce fait, constaté par M. Terracini pour toutes les classes particulières de réseaux T dont il a démontré l'éxistence, est ainsi tout-à-fait général.

Pour les démonstrations. qui paraîtront dans les *Annales roumaines de Mathématiques*, j'emploie la méthode de M. Cartan du repère mobile en me servant, pour écrire les conditions d'applicabilité des congruences, de la notion d'élément linéaire (v. Note citée) introduite par M. Terracini.

SECTION IV

Calcul des probabilités, statistique mathématique, mathématique d'assurances et économétrie

ÜBER DAS URNENSCHEMA VON PÓLYA

Von Sven Guldberg, Oslo.

Das Präsidium der vierten Sektion des Kongresses hat mir den ehrenvollen Auftrag gegeben eine kurze Zusammenfassung zu geben von einer Arbeit aus dem Gebiete der mathematischen Statistik, die mein Vater Professor Dr. Alf Guldberg sich bei seinem Tode im Februar dieses Jahr hinterließ. Die Vollführung der Arbeit konnte von mir leicht vorgenommen werden, da ich meinem Vater bei der Arbeit schon zur Hand gegangen war.

In der mathematischen Statistik liegen wie bekannt unter andern die drei wichtigen Probleme vor:

Erstens, die möglichst allgemeinen Verteilungsgesetze auf dem möglichst einfachen Urnenschema aufzubauen, so daß die Funktionen auf einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlage ruhen.

Zweitens, die gewöhnlichen symmetrischen Funktionen dieser Gesetze zu berechnen.

Drittens, totale und lokale Kriterien aufzustellen wieweit eine empirische Verteilung sich dem gegebenen theoretischen Verteilungsgesetze approximieren läßt.

Durch die Verallgemeinerung des Bernoullischen Urnenschema hat Professor Dr. Pólya[1] die große Bedeutung der Verallgemeinerung der klassischen Urnenschemas gezeigt. Dieses neue Urnenschema, das seinen Namen trägt, ist speziell in Fällen wo die Wahrscheinlichkeiten von einander nicht unabhängig sind, anwendbar.

Dr. Florian Eggenberger,[2] Dr. Miloš Vacek[3] und Dr. Ota Fischer[4] haben gezeigt, daß gewisse empirische Verteilungen die sich früher schlecht einem Verteilungsgesetze approximieren ließen, mit dem Gesetze Pólya's gut übereinstimmen.

Aus demselben Gesichtspunkte hat nunmehr Professor Guldberg das Urnenschema Pascals verallgemeinert, in ähnlicher Weise wie es Professor Pólya bei Bernoullis Schema getan hat:

---

[1] Sur quelques points de la théorie des probabilités. Annales de l'Institut de Henri Poincaré, Paris 1931.

[2] Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Mitteilungen d. Ver. schweiz. Versicherungs-mathematiker, Bern 1924.

[3] Sur la loi de Pólya regissant les faits correlatifs. Aktuárské Vědy, Praha 1932.

[4] Une remarque sur l'article de M. A. Guldberg: „On discontinuous frequency functions and statistical series". Aktuárské Vědy, Praha 1933—34.

Eine Urne enthält R rote und S schwarze Kugeln. Nach jeder Ziehung legt man die gezogene Kugel plus $\varDelta$ Kugeln derselben Farbe zurück. Wie viele Ziehungen sind notwendig um n rote und dazu noch eine rote in der letzten Ziehung zu erhalten und was ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit. Die Anzahl der Ziehungen sei $n+x+1$, und die gehörige Wahrscheinlichkeit wird somit:

$$f(x) = \binom{n+x}{x} \frac{R(R+\varDelta)\cdots(R+(n-1)\varDelta)\cdot S(S+\varDelta)\cdots(S+(x-1)\varDelta)\cdot(R+n\varDelta)}{N(N+\varDelta)\cdots\cdots(N+(n+x)\varDelta)}$$

In der Arbeit wird gezeigt wie man für dieses Gesetz mit Hilfe der Differenzengleichungen, deren Nützlichkeit in der mathematischen Statistik Professor Guldberg schon bei früheren Gelegenheiten gezeigt hat, die symmetrischen Funktionen (Faktoriellsummen und Momente) findet, und es wird angedeutet wie man totale und lokale Kriterien aufstellen kann.

STANDARD DEVIATION OF GINI'S MEAN DIFFERENCE

By A. L. Bowley, London.

The N quantities $x_1 \cdot\cdot x_s \cdot\cdot x_r \cdot\cdot x_N$ form a frequency group arranged in ascending order.

Their mean difference, g_N, is defined by

$$\frac{N(N-1)}{2\cdot g_N} = \sum |x_r - x_s| = \sum_{r=1}^{N} (2r-N-1)x_r. \tag{1}$$

From this group n quantities are selected at random, say $x_1 \cdot\cdot x_r \cdot\cdot x_n$. Required the standard deviation, σ_g, of g_n, where

$$G = \frac{n(n-1)}{2} g_n = \sum_{r=1}^{n} (2r-n-1)x_r. \tag{2}$$

I. *Mean values of g_n.* The chance that the k'th quantity in ascending order (x_k) in the universe shall appear as the r'th in ascending order in the sample is

$$P(k,r) = {}_{k-1}C_{r-1} \cdot {}_{N-k}C_{n-r} / {}_NC_n. \tag{3}$$

Hence the whole contribution of x_k to G is

$$\sum_{r=1}^{n} x_k(2r-n-1)P(k,r)=2\varkappa\, x_k n(n-1)/N(N-1),\text{[1] where } 2k=N+1+2\varkappa$$

$$\text{Mean } G=\sum_{k=1}^{N} 2\varkappa\, x_k n(n-1)/N(N-1)=M. \tag{4}$$

II. *Mean value of* g_n^2. The contribution of pairs (x_k, x_l) to G^2 contains squares and products.

The squares give

$$S=\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{n}(n+1-2r)^2\cdot {}_{k-1}C_{r-1}\cdot {}_{N-k}C_{n-r}\cdot x_k^2/{}_NC_n$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{n(n-1)}{N(N-2)}\left\{\frac{4(n-2)}{N-1}\varkappa^2+N-n\right\}x_k^2. \tag{5}$$

The chance that the l'th and k'th terms in the universe shall appear as the s'th and r'th in the sample is

$$P(kl,rs)={}_{k-1}C_{r-1}\cdot{}_{l-k-1}C_{s-r-1}\cdot{}_{N-l}C_{n-s}/{}_NC_n.$$

The products consist of terms such as

$$2\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=r+1}^{n}(n+1-2r)(n+1-2s)\cdot P(kl,rs)\,x_k x_l.$$

After reduction we obtain for the contribution of all pairs

$$2P=\frac{2n(n-1)}{N(N-1)(N-2)(N-3)}\sum_{l=2}^{N}\sum_{k=1}^{l-1}[4\varkappa\lambda(n-2)(n-3)$$

$$+(N-n)\{4(\varkappa-\lambda)(n-2)+nN-3N+n+1\}]\,x_k x_l, \tag{6}$$

where $2l=N+1+2\lambda$.

III. Combining these results we have

$$\sigma_g^2=\left\{\frac{2}{n(n-1)}\right\}^2(S+2P-M^2).$$

[1] This and subsequent reductions are made by the help of the formula
$\sum_{r=0}^{n} {}_{N-n}C_{k-r}\cdot {}_nC_r={}_NC_k$, where $r \ngtr k$, $r \ngtr n$, $n \ngtr N$, for integral values.

Write $2\varkappa = N\alpha$, $2\lambda = N\beta$, $\alpha < \beta$.

$$\sigma_g^2 = \frac{4(N-n)}{n(n-1)(N-2)} \sum \left(\frac{Nn - 2N - 2n + 2}{(N-1)^2} \alpha^2 + \frac{1}{N} \right) x_k^2$$

$$- \frac{8(N-n)}{n(n-1)(N-1)(N-2)(N-3)} \sum \sum \left\{ \frac{2Nn - 3N - 3n + 3}{N-1} \cdot 2\alpha\beta \right. \quad (7)$$

$$\left. - \frac{2N(\alpha-\beta)(n-2) + nN - 3N + n + 1}{N} \right\} x_k x_l .$$

IV. Now let N be indefinitely great, and n so large that we can ignore $3/n$. Also ignore n/N.

The expression for large samples from an infinite universe becomes

$$\sigma_g^2 = \frac{4}{\lambda N} \sum_{\alpha=-1}^{+1} \alpha^2 x_k^2 - \frac{32}{nN^2} \sum_{\beta=-1}^{+1} \left\{ \left(\beta - \frac{1}{2} \right) x_l \sum_{\alpha=-1}^{\beta} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) x_k \right\} . \quad (8)$$

Since the formulae ultimately depend on differences between two x's, it is indifferent what point is taken for the origin.

V. *Application to continuous curves.*

Write $z = N \cdot f(x)$ for the equation of a frequency group and $\int_0^x f(x)\,dx = F(x)$.

Then $k - \frac{N}{2} = \frac{1}{2} N\alpha = NF(x)$, $l - \frac{N}{2} = \frac{1}{2} NB = N \cdot f(y)$.

Equation (8) becomes

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{n} \left\{ 16 \int_{-\infty}^{\infty} F^2 \cdot f \cdot x^2 dx - 8 \int_{-\infty}^{\infty} (4F(y) - 1) y f(y) \int_{-\infty}^{y} (4F(x) + 1) x f(x)\,dx \cdot dy \right\} \quad (9)$$

Write $\varphi(x) = x f(x)$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx$.

When $f(x)$ is symmetrical, so that $f(+x) = f(-x)$, equation (9) reduces to

$$\frac{n}{4} \sigma_g^2 = 4 \int_{-\infty}^{\infty} F^2 \cdot f \cdot x^2 dx - 64 \left\{ \int_0^{\infty} f \cdot \Phi\,dx \right\}^2 - 8 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \int_{-\infty}^{y} \Phi(x) f(x)\,dx \cdot dy \quad (10)$$

1. In the case of normal distribution $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, and after a long reduction we find $\sigma_g^2 = \left\{\frac{4}{3} - \frac{8(2-\sqrt{3})}{\pi}\right\}\frac{\sigma^2}{n}$, while $g = 2\sigma/\sqrt{\pi}$.

$$\text{Hence } \sigma_g = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma \times 0.807 = \frac{1}{\sqrt{n}} g \times 0.715 \text{ approx.} \tag{11}$$

2. When the quantities are distributed uniformly $f(x) = 1/N$, and we find $n\sigma_g^2 = N^2/45, \sigma^2 = N^2/12$, $g = N/3$, so that

$$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{n}}\pi \times 0.516 = \frac{1}{\sqrt{n}} g \times 0.447 \text{ approx.} \tag{12}$$

VI. It is interesting to compare the precision of g with those of other measures of dispersion, viz: ϱ, the probable error, η the mean deviation $= \frac{1}{N}\sum |x_r - \pi|$, and σ the standard deviation.

	Normal Distribution	Uniform Distribution
$\sqrt{n} \cdot \sigma_\sigma$	$= \sigma \times 0.79 = \varrho' \times 1.2$	$= \sigma \times 0.866 = \varrho \times 1$
$\sqrt{n} \cdot \sigma_\eta$	$= \sigma \times 0.603 = \eta \times 0.756$	$= \sigma \times 0.707 = \eta \times 0.577$
$\sqrt{n} \cdot \sigma_\varrho$	$= \sigma \times 0.707$	$= \sigma \times 0.707$
$\sqrt{n} \cdot \sigma_g$	$= \sigma \times 0.807 = g \times 0.715$	$= \sigma \times 0.516 = g \times 0.447.$

The *relative* precision of g is therefore very nearly as great as that of σ in the normal curve and considerably greater in uniform distribution.

The *absolute* precision of g is less than that of the other three measurements in the normal curve, but greater in uniform distribution.

Note. I am indebted to Mr. R. G. D. Allen for criticism and help in Sections IV et seq.

A LAPLACIAN EXPANSION FOR HERMITIAN-LAPLACE FUNCTIONS OF HIGH ORDER

By E. C. Molina, New York.

In the Théorie Analytique des Probabilités, Laplace introduced in 1812 two functions designated $U_n(u)$ and $U'_n(u)$ respectively and defined in terms of certain definite integrals. In 1864 Hermite, taking as a starting point the N-th derivative of an exponential, presented two analogous functions which are in this paper designated as $H_N(u)$, $N = 2n$ or $2n+1$.

The U and H functions are connected by the two equations:

$$U_n(u)\left[(2n)!\sqrt{\pi}/2^{2n+1}n!\right] = H_{2n}(u)\left[(-1)^n\sqrt{\pi}/2^{2n+1}\right]$$

$$= e^{u^2}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}\cos(2ux)\,dx$$

$$U'_n(u)\left[(2n+1)!\sqrt{\pi}/2^{2n+1}n!\right] = H_{2n+1}(u)\left[(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\;2^{2n+2}\right]$$

$$= e^{u^2}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n+1}\sin(2ux)\,dx\,.$$

Expansions whose first few terms give with great accuracy the values for the U and H functions of high order, are obtained by applying to the integrals the Laplacian method of evaluating definite integrals whose integrands involve factors raised to high powers.

DIE MITTLERE ABWEICHUNG BEI ANORMALER VERTEILUNG UND IHRE BEDEUTUNG FÜR DIE VERSICHERUNGSPRAXIS

Von P. Riebesell, Berlin.

Sowohl in der Wirtschaftsmathematik als auch in der Versicherungsmathematik wird immer noch, wenn eine relative Häufigkeit q aus n Beobachtungen ermittelt ist, dem Resultat als „mittlerer Fehler" hinzugefügt der Wert

$$m = \pm\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} \tag{1}$$

wo $p = 1 - q$ ist.

Bekanntlich gilt diese Formel nur, wenn dem betreffenden Vorgang das Bernoulli'sche Urnenschema zu Grunde gelegt werden kann, nicht aber, wenn eine anormale Verteilung vorliegt. Da nun bei Versicherungskollektiven in der Regel Pearson'sche Verteilungen vorliegen, ist die Gleichung (1) für die Versicherungsmathematik unbrauchbar. Es muß vielmehr in jedem Einzelfall geprüft werden, welche Art von Verteilungskurve vorliegt und welches Vielfache des Wertes der Gleichung (1) sich aus der Definition der mittleren Abweichung

(2) $$\mu = \pm \sqrt{\frac{\Sigma x^2 y}{n}}$$

ergibt.

Umgekehrt ist es falsch, aus der Tatsache, daß eine nichtnormale Verteilung vorliegt, schließen zu wollen, daß der betreffende Versicherungszweig einer mathematischen Behandlung nicht zugängig ist, wie das noch kürzlich[1] geschehen ist. Nachdem seit Keynes[2] und E. Blaschke[3] bekannt ist, daß sich jede beliebige Frequenzkurve aus der Normalkurve mit Hilfe der Abbildung durch die Mittelwertfunktion herleiten läßt und zahlreiche Typen der Pearson'schen Form ihre Darstellung durch das Pólya—Eggenberger'sche Urnenschema (mit Wahrscheinlichkeitsansteckung) erhalten haben, ist die Mathematik der Normalverteilung lediglich ein Sonderfall der allgemeinen Kollektivmathematik geworden und letztere beherrscht die anormalen Verteilungen genau so gut wie die normalen. Es kommt lediglich darauf an, für jeden Versicherungszweig die zugehörige Verteilungskurve aus der Statistik zu ermitteln.

QUELQUES REMARQUES SUR L'APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS AUX JEUX DE HASARD

Par Emile Borel, Paris.

On sait le rôle qu'ont joué les études sur les jeux de hasard dans les origines du calcul des probabilités. Ces jeux ont donné aux mathématiciens l'occasion de traiter des problèmes relativement simples et les méthodes qui ont été ainsi créées ont permis d'aborder ultérieurement des problèmes plus compliqués.

C'est pour cette raison qu'il ne paraît pas inutile d'étudier certains problèmes concernant les jeux dans lesquels intervient à la fois le hasard et la psychologie des joueurs; l'étude de ces jeux permettra sans doute de créer des méthodes qui, pourront être utilisées avec profit dans de très nombreuses questions telles que les questions économiques dans lesquelles interviennent à la fois des circonstances fortuites et la psychologie des hommes.

---

[1] Vgl. W. Wunderlin, Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Unfallversicherung. Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 31, 1936.

[2] A Treatise on Probability, 1919.

[3] Wirtschaft und Recht der Versicherung 1925, Heft 1.

J'avais déjà abordé cette étude, il y a quelques années (voir notamment la troisième édition de mes Éléments de la théorie des probabilités, Hermann 1924) mais, je m'étais borné à l'étude des jeux symétriques et cette restriction diminuait beaucoup la généralité.[1]

En fait, les jeux de cartes ne sont jamais symétriques, car il y a toujours une différence entre le joueur qui joue ou qui parle le premier et son partenaire.

Considérons donc un jeu entre deux joueurs A et B qui ne soit pas symétrique. Le joueur A peut adopter une certaine manière de jouer que nous appellerons M, c'est-à-dire se fixer un ensemble de règles qui détermineront d'une manière obligatoire la façon dont il se comportera lorsqu'il aura vu ses cartes et, observer s'il y a lieu le comportement de son adversaire au cours du jeu. Certains traités sur les jeux de cartes, sur l'écarté par exemple, fixent ainsi une certaine manière de jouer qu'ils indiquent comme la meilleure au joueur A qui est le premier en cartes.

Lorsque le joueur A a fixé ainsi sa manière de jouer M, admettons que le joueur B connaisse exactement cette manière de jouer M, c'est alors un problème bien précis de calcul des probabilités que de déterminer quelle est la meilleure manière de jouer M' que doit adopter B en réponse à M. Cette manière de jouer M' est déterminée par la condition que le gain moyen de B soit maximum. Il peut arriver, bien entendu, dans certains jeux qui donnent un avantage notable au premier en cartes, que ce gain moyen maximum de B soit un nombre négatif, ce qui revient à dire que c'est la perte minimum.

Si le joueur A constate que B connaissant sa manière de jouer M y opposant la manière M' se trouve ainsi dans une situation trop avantageuse, il peut essayer d'adopter une autre manière de jouer que nous désignerons par N et nous admettrons que si B arrive à connaître N il opposera une nouvelle manière de jouer N'. On pourrait continuer ainsi presque indéfiniment, car dans les jeux un peu complexes, la variété possible des manières de jouer est extrêmement considérable. Supposons que le joueur A essaye successivement trois

[1] A la suite de ma communication à Oslo, il m'a été signalé un article fort important de M. von Neumann sur les jeux de société, que je n'ai pas eu encore le temps d'étudier d'une manière approfondie. M. von Neumann y cite une note que j'ai publiée en 1927 aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, mais il n'a pas eu connaissance de la troisième édition de mes Eléments de la théorie des probabilités (Paris, Hermann, 1924), ouvrage dans lequel je développe, sur certains jeux symetriques, notamment sur le jeu japonais du papier, de la pierre et du couteau, de considérations tout à fait analogues aux siennes (il appelle ce jeu le baccara du bagne).

manières[1] de jouer M, N, P auxquelles le joueur B a opposé respectivement les manières de jouer M', N', P'.

Il est aisé de se rendre compte que l'intérêt du A sera de varier son jeu de manière que le joueur B n'oppose *pas* à sa manière de jouer la réplique qui est la plus favorable à B. Pour tenir compte de cette possibilité offerte à A de varier sa manière de jouer, désignons par x, y, z les probabilités respectives pour que A adopte les manieres de jouer M, N, P. Les nombres x, y, z sont positifs et leur somme est égale à 1.

Désignons de même par X, Y, Z les probabilités pour que le joueur B adopte les manières de jouer M', N', P'. Les nombres X, Y, Z sont également positifs et leur somme égale à 1.

On peut calculer par les méthodes classiques du calcul des probabilités le gain moyen de B dans chacune des combinaisons des trois manières de jouer M, N, P de A avec les trois manières de jouer M', N', P' de B. On en conclut que le gain moyen de B pour chaque partie se présente sous la forme suivante:

$$G=(ax+by+cz)X+(a'x+b'y+c'z)Y+(a''x+b''y+c''z)Z.$$

Les nombres $a\cdots a'\cdots c''$ sont des nombres positifs et négatifs qui représentent le gain moyen de B dans chacune des combinaisons. L'étude du jeu telle que nous l'avons envisagée, dépend de l'étude de la forme bilinéaire G. Il est naturel d'admettre que les coefficients de cette forme peuvent avoir des valeurs arbitraires, vu la grande variété possible des jeux et des manières de jouer. Toutefois, il sera vraisemblable que a, b' et c'' seront positifs, car, en général, lorsque B connaît la manière de jouer de A, il peut trouver une manière de jouer que lui assure un gain contre A.

Considérons les équations

$$ax+by+cz=a'x+b'y+c'z=a''x+b''y+c''z=\lambda.$$

Si ces équations admettent comme solutions des nombres x_0, y_0, z_0 *de même signe*, on pourra prendre x_0, y_0, z_0 tels que $x_0+y_0+z_0=1$ et en ce cas, on aura:

$$ax_0+by_0+cz_0=a'x_0+b'y_0+c'z_0=a''x_0+b''y_0+c''z_0=\lambda_0$$

et

$$G=\lambda_0(X+Y+Z)=\lambda_0$$

[1] C'est pour simplifier l'ecriture que nous faisons cette hypothèse. Dans ce cas simple, le théorème du *max-min.* de M. von Neumann permet de resoudre la difficulté soulevée. Dans le cas général, où le nombre des manières de jouer est extrêmement grand, ce théorème reste vrai theoriquement, mais perd toute valeur pratique, les calculs necessaires pour connaitre le *max-min.* etant impossibles à effectuer.

c'est-à-dire que G a une valeur λ_0 qui peut être positive ou négative, mais indépendante de X, Y, Z. Il est aisé de voir que l'on obtient le même résultat en posant:

$$aX + a'Y + a''Z = bX + b'Y + b''Z = cX + c'Y + c''Z = \lambda$$

et les valeurs X_0, Y_0, Z_0 qui satisfont à ces équations donnent

$$aX_0 + a'Y_0 + a''Z_0 = bX_0 + b'Y_0 + b''Z_0 = cX_0 + c'Y_0 + c''Z_0 = \lambda_0$$

$$G = \lambda_0(x + y + z) = \lambda_0\,,$$

la valeur de λ_0 étant la même. Seulement, le fait que x_0, y_0, z_0 sont positifs ne paraît pas entrainer la conséquence que X_0, Y_0, Z_0 soient également positifs. Mais je n'insiste pas sur ce cas, relativement facile.

Les choses sont plus compliquées lorsque la région du plan pour laquelle les trois formes linéaires

$$ax + by + cz$$

$$a'x + b'y + c'z$$

$$a''x + b''y + c''z$$

sont de même signe, *n'a aucun point commun* avec la région du plan pour laquelle x, y et z sont tous trois positifs. Si, de plus, un phénomène analogue se produit pour les formes en X, Y, Z, la méthode précédente ne peut conduire à aucune manière de jouer certainement supérieure à toutes les autres. Le meilleur conseil que l'on puisse donner à chacun des joueurs est de chercher à deviner la manière de jouer de l'autre joueur afin d'y adapter la sienne.

SLIGHTLY UNSYMMETRICAL FREQUENCY CURVES

By A. L. Bowley, London.

There are four forms of Frequency Curves, all related to the normal curve of error which become identical when their asymmetry is small.

Write μ_2, μ_3 for the second and third moments about the average, $\sigma^2 = \mu_2$, $\varkappa = \mu_3 / \sigma^3$. The hypothesis is that $\varkappa^2$ is negligible.

I. *Law of great Numbers.* $y = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\left(1 - \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{x}{\sigma} - \frac{x^3}{3\sigma^3}\right)\right) \Big/ \sigma\sqrt{2\pi}\,.$

Then $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sigma^2} - \frac{\varkappa}{2\sigma}\left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right)$, when $\varkappa^2$ is neglected. (1)

II. *Pearson's Equation.* $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x}$.

Here $b_0 = -\sigma^2$, $a = -b_1 = \varkappa \frac{\sigma}{2}$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sigma^2}\left(x + \frac{\sigma}{2}\varkappa\right)\left(1 + \frac{\varkappa x}{2\sigma}\right)^{-1}, \tag{2}$$

which becomes (1) when $\varkappa^2$ is neglected.

III. *Method of Translation.* $\eta = e^{-\frac{z^2}{2}} \Big/ \sqrt{2\pi}$.

$$x = m + a(z + bz^2), \; y\,dx = \eta\,dz.$$

By moments, neglecting $\varkappa^2$, $a = \sigma$, $6b = \varkappa$, $m = -ab$.

$$z = \frac{x}{\sigma} + \frac{\varkappa}{6}\left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right), \quad \frac{d\eta}{dz} = -z\eta$$

$$\log y = \log \eta + \log\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -z\frac{dz}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2} \Big/ \frac{dz}{dx}$$

$$= -\left(\frac{x}{\sigma} + \frac{\varkappa}{6} - \frac{\varkappa x^2}{6\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\varkappa}{3}\frac{x}{\sigma^2}\right) - \frac{\varkappa}{3\sigma}\left(1 - \frac{\varkappa x}{3\sigma}\right)^{-1} \tag{3}$$

which becomes (1) when $\varkappa^2$ is neglected.

IV. *Law of Proportional Effect.* $\eta = e^{-\frac{z^2}{2}} \Big/ \sqrt{2\pi}$.

$$x = x_0 + e^{\frac{b+z}{a}}.$$

Write $b = a \log v$, $\frac{1}{a^2} = \log w$. Neglect $\varkappa^2$ and take moments.

We obtain $\varkappa = \frac{3}{a}$, $v\sqrt{w} = \frac{3\sigma}{\varkappa}$, $\bar{x} = x_0 + v\sqrt{w}$ (the average).

Referred to average $z = -b + a \log (x - x_0)$

$$= -a \log v + a \log (x' + v\sqrt{w}) = \frac{1}{2a} + a \log\left(1 + \frac{x'}{v\sqrt{w}}\right),$$

when $x' = x - \bar{x}$.

As in III,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -z\frac{dz}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2}\Big/\frac{dz}{dx}$$

$$= \left[\left\{-\frac{1}{2a} - a\log\left(1 + \frac{x'}{v\sqrt{w}}\right)\right\} a - 1\right] \div (x' + v\sqrt{w})$$

$$= \frac{\varkappa}{3\sigma}\left\{-\frac{3}{2} - \frac{9}{\varkappa^2}\left(\frac{x'\varkappa}{3\sigma} - \frac{x'^2\varkappa^2}{18\sigma^2}\right)\right\}\left(1 + \frac{x'\varkappa}{3\sigma}\right)^{-1} \tag{4}$$

$$= -\frac{x'}{\sigma^2} - \frac{\varkappa}{2\sigma}\left(1 - \frac{x'^2}{\sigma^2}\right),$$

when $\varkappa^2$ is neglected.

In I, II, and III terms that depend on the fourth moment are omitted at the start, so that each equation has the same number of constants. This is to assume that $(\mu_4/\mu_2^2 - 3)$, as well as $\varkappa^2$, is negligible. When these conditions do not hold, the four curves diverge from each other.

References.

1. Edgeworth. Journal of the Royal Statistical Society, 1898, pp. 675 seq., 1906, pp. 497 seq., and 1917, p. 72.
2. Elderton. Frequency Curves & Correlation (1906), pp. 39, 40.
3. Wicksell. On the genetic theory of frequency (1917), pp. 11 seq., Arkiv för mat., astr. o. fys. Bd. 12, N:o 20.
4. Gibrat. Les Inégalités Economiques 1931.

SUR L'INFLUENCE DES ERREURS DE MESURE EN STATISTIQUE

Par M. Brelot, Alger.

Je voudrais attirer l'attention sur un ordre de questions qui m'ont été posées récemment par des biologistes et qui, malgré des analogies avec des travaux connus, ne semblent pas avoir été étudiées systématiquement: l'influence sur les coefficients statistiques d'un groupe déterminé (en particulier la «standard deviation») des erreurs de mesure faites dans la détermination des grandeurs de ce groupe.

Le cas de la moyenne est immédiat. Je me suis occupé[1] de la standard déviation. D'abord si l'erreur sur chacune des n grandeurs x_i du groupe est $\leqq \varepsilon$, l'erreur sur $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma\left(x_i - \dfrac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}{n}}$ est aussi $\leqq \varepsilon$.

On obtient de meilleures limitations pratiques en remplaçant cette certitude algébrique par une assez grande probabilité grâce à des hypothèses de GAUSS sur la distribution des erreurs: soient x_i les valeurs expérimentales, y_i les valeurs théoriques exactes.

On distinguera: 1° une loi de GAUSS (antérieure) donnant la probabilité élémentaire de x_i connaissant y_i soit $\dfrac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2(x_i-y_i)^2} dx_i$ (k commun).

2° une loi de GAUSS (postérieure) donnant la probabilité élémentaire de y_i connaissant x_i soit $\dfrac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2(x_i-y_i)^2} dy_i$ (k commun).

Sous ces hypothèses et séparément, j'ai étudié la probabilité (antérieure ou postérieure) $P(\lambda, n)$ pour que l'erreur $|\sigma_{y_i} - \sigma_{x_i}|$ sur le σ soit $< \lambda$ et j'ai obtenu par deux méthodes des resultats numériques pratiques. Ainsi, pour des probabilités $\geqq 0{,}99$, on peut, dès que $n \geqq 30$ réduire d'au moins moitié les limitations d'erreur correspondant à une même probabilité quand on passe des grandeurs à σ; et cela dans chacun des cas antérieur ou postérieur et quels que soient les x_i ou y_i.

Mon but était de donner rapidement des résultats pratiques pour le cas biologique courant où n est de l'ordre de quelques dizaines; à cause de la difficulté du calcul exact de P, je me suis borné à en chercher des limites inférieures, mais je compte prochainement les améliorer.

Il y a lieu d'autre part d'étudier le cas $n \to \infty$. Voici à ce sujet des résultats tout récents:

Soit $\varepsilon_q = \dfrac{1}{k\sqrt{2}}$ et remarquons que $P(\lambda, n)$ et de même la probabilité antérieure ou postérieure $W(\mu, n)$ pour que $|\sigma^2_{x_i} - \sigma^2_{y_i}| < \mu$ dépendent de k, n, λ ou μ et seulement de σ_{x_i} ou σ_{y_i}. Alors n seul variable, tendant vers ∞:

---

[1] Journal de mathématiques — 2° fasc. 1936 — et Bulletin de la Station d'Aquiculture et de Pêche de Castiglione — 1° fasc. 1935 — paru en 1936.

$$\text{Si } \lambda < \begin{cases} \sqrt{\sigma_{y_i}^2 + \varepsilon_q^2} - \sigma_{y_i} & \text{(cas antérieur)} \\ \sqrt{\sigma_{x_i}^2 + \varepsilon_q^2} - \sigma_{x_i} & \text{(cas postérieur)} \end{cases} \quad P \to 0$$

$$\lambda > \text{(idem)} \qquad P \to 1$$

$$\lambda = \text{(idem)} \qquad P \to \tfrac{1}{2}$$

et de même:

$$\text{si } \mu < \varepsilon_q^2 \qquad W \to 0$$
$$\mu > \varepsilon_q^2 \qquad W \to 1$$
$$\mu = \varepsilon_q^2 \qquad W \to \tfrac{1}{2}$$

ÜBER DIE THEORIE DER STOCHASTISCHEN PROZESSE

Von Willy Feller, Stockholm.

Die Theorie der vom sog. Zufall abhängigen Prozesse bildet das Kernstück der neuen Wahrscheinlichkeitstheorie. Eine Reihe solcher Prozesse wurde schon seit langem unter verschiedensten Gesichtspunkten behandelt, doch verdankt man die erste systematische Untersuchung und allgemeine Grundlegung der Theorie erst Kolmogoroff.[1]

Gegenstand dieser Theorie sind Prozesse, bei denen der Zustand einer Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt, die durch die Lage in jedem Augenblick für alle Zukunft bestimmt ist. Das bekannteste Beispiel für derartige Prozesse mit stetiger Zustandsänderung sind die Diffusionsprozesse, für Vorgänge mit diskreten Einzelereignissen der Atomzerfall, Fernsprechanrufe u. dgl. Nach Cramér[2] sind die unstetigen Prozesse von noch viel größerer Bedeutung für die auch mathematische sehr reizvolle Risikotheorie. Jeder ökonomische Vorgang hat eine starke stochastische Komponente, und die Theorie dürfte mit der Zeit die natürlichsten Hilfsmittel für verschiedene Probleme insbesondere der Konjunkturtheorie liefern.

---

[1] Vgl. insbesondere A. Kolmogoroff: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. *104* (1931). Die Fortführung der Kolmogoroffschen Untersuchungen, über die in dem vorliegenden Vortrag berichtet wurde, ist inzwischen ebenfalls erschienen, W. Feller: Zur Theorie der stochastischen Prozesse (Existenz- und Eindeutigkeitssätze), Math. Ann. *113* (1936).

[2] In Anschluß an Lundberg hat Cramér schon 1930 einen komplizierten Versicherungsvorgang als stochastischen Prozess beschrieben und insbesondere das Ruinproblem behandelt: On the Mathematical Theory of Risk, Skandia-Festschrift, Stockholm 1930.

Wir beschränken uns auf Vorgänge mit nur einem Freiheitsgrad; der Zustand ist dann durch eine Zahl x beschreibbar (Lage des Teilchens, Anzahl der Anrufe . . .). Ein solcher Vorgang wird vollständig bestimmt durch die Wahrscheinlichkeit $F(t, x; \tau, \xi)$ dafür, daß der Zustand, wenn er im Augenblick t den Wert x hat, in einem späteren Zeitpunkt τ einen Wert $\leqq \xi$ annimmt. Eine Zerlegung der Zeitstrecke (t, τ) in zwei Teile $(t, t') + (t', \tau)$ bedeutet nun ein Aufspalten des Vorgangs in zwei unabhängige Ereignisse, und dies ergibt unmittelbar die *fundamentale Identität*:

$$
(1) \qquad F(t, x; \tau, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t', y; \tau, \xi)\, d_y F(t, x; t', y),
$$

der *alle* unsere Prozesse genügen. *Analytisch ist die Theorie der stochastischen Prozesse einfach die Theorie derjenigen Lösungen von (1), die noch gewisse, für Übergangswahrscheinlichkeiten charakteristische Eigenschaften haben.* Es fragt sich zunächst, wie die einzelnen Prozesse auszusondern sind.

Wir betrachten zunächst *stetige* Prozesse, die wir dadurch definieren, daß bei ihnen die Wahrscheinlichkeit einer Zustandsänderung um mehr als eine Zahl $\delta > 0$ während einer kleinen Zeitspanne der Länge Δt klein ist im Vergleich zu dieser:

$$
(2) \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| > \delta} d_y F(t, x; t + \Delta t, y) = 0 .
$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t, x; \tau, \xi) = \dfrac{\partial F(t, x; \tau, \xi)}{\partial \xi}$ erhält man nach dem Vorgang von Kolmogoroff die beiden parabolischen Gleichungen

$$
(3) \qquad \frac{\partial f(t, x; \tau, \xi)}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial^2 f(t, x; \tau, \xi)}{\partial x^2} + b(t, x) \frac{\partial f(t, x; \tau, \xi)}{\partial x} = 0 ,
$$

$$
(4) \qquad \frac{\partial f(t, x; \tau, \xi)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [a(\tau, \xi) f(t, x; \tau, \xi)] + \frac{\partial}{\partial \xi} [b(\tau, \xi) f(t, x; \tau, \xi)] = 0
$$

mit je einer natürlichen Anfangsbedingung. Hierbei sind a und b zwei für den Einzelprozeß charakteristische Funktionen, die in bestimmter Weise aus $F(t, x; \tau, \xi)$ abzuleiten sind. Dies ergibt neben (1)—(4) und den zugehörigen Anfangsbedingungen zwei neue Bedingungsgleichungen für F. Die Grundfrage ist nun, inwieweit diese Relationen stets einen und nur einen stochastischen Prozeß definieren, d. h. *inwieweit sie unabhängig voneinander sind, ob sie überhaupt eine gemeinsame Lösung F besitzen, und wenn, ob diese auch die übrigen für Übergangswahrscheinlichkeiten wesentlichen Eigenschaften besitzt.*

Durch eine eingehende Untersuchung einer bestimmten Grundlösung der allgemeinen parabolischen Gleichung können nun alle diese Fragen vollständig beantwortet werden: Es zeigt sich, daß jede der beiden erwähnten Anfangswertaufgaben wirklich genau einen — u. zw. denselben — stochastischen Prozeß definiert, so daß die anderen fünf Funktionalgleichungen und übrigen Nebenbedingungen eine Folge jeder von ihnen sind.

Der für diesen Existenzsatz erforderte ziemlich umfangreiche analytische Apparat rechtfertigt sich auch dadurch, daß mit denselben Mitteln auch der *allgemeine unstetige* Prozess vollständig behandelt werden kann. Man gelangt dann zu *zwei partiellen Integrodifferentialgleichungen mit Stieltjesintegralen*, deren Behandlung auch an sich interessant ist.

Damit ist für weitere Untersuchungen — insbesondere über den qualitativen Verlauf — eine sichere Grundlage gewonnen. Für spezielle Klassen kann man auch einen Grenzwertsatz beweisen und es ergibt sich so die Hoffnung, daß diese Theorie noch weiter zur Vereinheitlichung der Wahrscheinlichkeitsrechnung beitragen wird. Ich möchte die Überzeugung ausdrücken, daß diese durch die Vertiefung und Verbreiterung ihrer Grundlagen nicht nur an mathematischem Leben gewonnen hat, sondern auch geschmeidiger für die Anwendungen geworden ist; und daß die Praxis von ihr neue Hilfe und Anregung gewinnen wird können, sobald die Abneigung gegen die ungewohnten analytischen Hilfsmittel überwunden wird.

ON THE PROBABLE ERROR OF A FUNCTION OF A FINITE NUMBER OF EQUIVALENT VARIABLES

By H. Milicer-Grużewska, Warszawa.

The theorem of the probable constant error of a function of a finite number of moments of independent variables[1] is extended to the equivalent variables[2]: $x_1, x_2, \cdots$, i. e.,

$$(1) \qquad E\left[x_{i_1}^{\nu_1} x_{i_2}^{\nu_2} \cdots x_{i_l}^{\nu_l}\right] = m_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_2} \begin{pmatrix} l = 1, 2 \cdots \\ i_1, i_2, \cdots i_l \text{ are different} \end{pmatrix}.$$

We shall consider the selected variables: $x_1, x_2, \cdots x_N$, their empirical moments

[1] H. Milicer-Grużewska "An empirical curve and its generalization" C. R. d. séance d. l. Soc. d. Sc. et. d. Lettre d. Varsovie, 1935.

[2] B. de Finetti "Sui numeri aleatori equivalenti" R. d. Reale Acc. Naz. d. Lincei, 1933.

$$(2) \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^{\nu_l} = m_{\nu_l}^{(N)}, \quad l=1, 2, \cdots k; \; N=1, 2, \cdots$$

and the function of these moments $f(m_{\nu_1}^{(N)}, m_{\nu_2}^{(N)}, \cdots m_{\nu_k}^{(N)})$.

Put

$$(m_{\nu_1}^{(N)}, m_{\nu_2}^{(N)}, \cdots, m_{\nu_k}^{(N)}) = (m^{(N)}); \; (\sqrt{m_2^{\nu_1}}, \sqrt{m_2^{\nu_2}}, \cdots, \sqrt{m_k^{\nu_k}}) = M$$

$$f(m_{\nu_1}^{(N)}, m_{\nu_2}^{(N)}, \cdots, m_{\nu_k}^{(N)}) = f(m^{(N)})$$

$$d\,m_{\nu_l}^{(N, q)} = m_{\nu_l}^{(N+q)} - m_{\nu_l}^{(N)}, \quad l=1, 2, \cdots, k$$

$$df(m^{(N, q)}) = f(m^{(N+q)} - f(m^{(N)}).$$

Suppose now that

(1) the moments $|m_{\nu_l}^{(N)}|$, $l=1, 2, \cdots, k$, $N=1, 2, \cdots$, are bounded and

$$|m_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l}| \leqq m_2^{\frac{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_l}{2}}, \quad l=1, 2, \cdots$$

(2) the function $f(m^{(N+q)})$ is bounded and is represented in the neighborhood of the point $(m^{(N)})$ by an absolutely and uniformly convergent Taylor series with respect to N and q.

(3) the functions $f^{(l)}(m^{(N)})$, $l=1, 2, \cdots, (k+1)$ are represented by absolutely and uniformly convergent Maclaurin series, in respect to N, in the whole space of moments and at the point (M).

Theorem. If the suppositions (1), (2), and (3) are fulfilled then $E[df(m^{(N, q)})] = O\left(\frac{1}{N}\right)$.[1]

Remark. This theorem is true for the function of a finite number of moments of pairs of equivalent variables $(x_1 y_1; \, x_2 y_2, \cdots)$, i. e., of variables for which

$$E\left[x_{i_1}^{\nu_1}, y_{i_1}^{\mu_1}, \cdots, x_{i_l}^{\nu_l}, y_{i_l}^{\mu_l}\right] = m_{\nu_1 \mu_1 \nu_2 \mu_2 \cdots \nu_l \mu_l} \begin{pmatrix} l=1, 2, \cdots \\ i_1, i_2, \cdots, i_2 \text{ are different} \end{pmatrix}.$$

The proof is analogous to that of my paper quoted above and will be published in the C. R. de séance d. l. Société d. Sciences et d. Lettre de Varsovie.

The extension which is the subject of this study renders possible the application of the theorem on probable errors also to economic phenomena for which the hypothesis of the independence of variables can hardly be admitted.

[1] And also $E[df(m^{(N, q)})]^2 = O\left(\frac{1}{N}\right)$.

SUR LA NOTION DE CHAINE

Par Octav Onicescu, Bucarest.

Un état d'un système matériel peut être caractérisé par un élément statistique

$$X \equiv \begin{pmatrix} M \\ d\varphi(M) \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $d\varphi(M)$ est la probabilité qui correspond à chaque forme éventuelle du système représentée symboliquement par un point M et les points infiniment voisins.

La description du phénomène physique qui est constitué par la succesion des états du système dans le temps sera donné par la succesion des formes de l'élément statistique X dans le temps.

Dans cette succession, de même que dans la Mécanique classique chaque élément dépend d'un ou de plusieurs éléments antécédents donnant ainsi lieu à une véritable ***chaîne*** statistique.

Il se trouve donc que la chaîne statistique remplace, en général, la classique notion de loi.

La loi qui donne à partir de (1) un nouvel élément et peut générer ainsi par itération une chaîne simple, exprime la fonction de répartition de l'élément suivant comme une fonctionnelle de φ au sens de M. Voltera

$$F(\varphi(M) \mid M^*).$$

Dans cette loi d'itération, qui peut aussi être variable, avec un certain paramètre à chaque nouvelle application, on peut trouver le principe d'un groupe de transformations comme en a trouvé un M. J. Hadamard dans l'application du principe d'Huyghens à l'étude de l'intégration d'une équation du second ordre ayant des solutions au sens de Cauchy.

Si dans la dépendance précédente le point M ne figure pas elle est déterministe; elle est aléatoire dans le cas contraire.

Pour exemplifier nous allons considérer la mécanique du photon sous l'aspect qui vient d'être esquissé.

Soit $\varphi(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz$ la probabilité, pour une particule donnée, d'occuper au moment t une position comprise dans le parallélipipède élémentaire de sommet x, y, z et de cotés dx, dy, dz.

Supposer que la chaîne soit double, comme dans la mécanique classique, veut dire que l'on donne $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ comme fonction de φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, x, y, z, t et comme fonctionnelle de φ.

Cette fonctionnelle est connue s'il s'agit d'un photon et c'est précisement $c^2 \Delta\varphi$. On a ainsi comme loi qui régit la mécanique du phénomène l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right).$$

La fonction φ sera déterminée (en accord avec la théorie de Cauchy, en même temps qu'avec la théorie des chaînes) par la connaissance de

$$\varphi_{t=0}, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0}.$$

La chaîne précédente ne fait que reproduire, avec un langage nouveau, le principe d'Huyghens tel qu'il fut interprété par M. Hadamard.

La réversibilité des chaînes trouve son correspondant dans la réversibilité des lois de la Mécanique classique.

ON MULTI-DIMENSIONAL DISTRIBUTIONS

By H. Wold, Stockholm.

In my lecture I gave an account of a paper by prof. Cramér and myself. As this paper has afterwards appeared,[1] an indication only of its main lines is here appropriate.

Let R_n be a Euclidean space of n dimensions, and with the variable point $\mathbf{x}=(x_1, \cdots, x_n)$. A completely additive, non-negative set function $F(E)$, defined for all Borel sets E of R_n, and such that $F(R_n)=1$, is called a distribution function in R_n. Its characteristic function $f(\mathbf{t})$ is defined for all points $\mathbf{t}=(t_1, \cdots, t_n)$ of R_n by $f(\mathbf{t})=\int_{R_n} \exp[i(t_1 x_1+\cdots+t_n x_n)]\, dF$. Let $\mathbf{t} \neq (0, \cdots, 0)$ and z be two points in R_n and R_1 respectively, and let $S_{\mathbf{t},z}$ be the halfspace in R_n defined by the inequality

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{t}\cdot\mathbf{x}=t_1 x_1+t_2 x_2+\cdots+t_n x_n \leqq z.$$

The developments depend on the obvious relation

$$\text{(2)} \qquad g(u)=\int_{R_1} e^{iuz}\cdot d_z G_{\mathbf{t}}(z)=\int_{R_n} e^{iu\mathbf{t}\mathbf{x}}\cdot d_{\mathbf{x}} F=f(u\cdot\mathbf{t})$$

between the characteristic functions $g(u)$ and $f(\mathbf{t})$ of $G_{\mathbf{t}}(z)$ in R_1 and $F(E)$ in R_n, $G_{\mathbf{t}}$ being associated to F by the relation $G_{\mathbf{t}}(z)=F(S_{\mathbf{t},z})$.

I (Lemma): *If F_1 and F_2 are distribution functions in R_n such that $F_1=F_2$ for every halfspace (1), then $F_1 \equiv F_2$.*

[1] Some theorems on distribution functions. J. London Math. Soc. 11 (1936).

By hypothesis $F_1(S_{\mathbf{t}}, z) = F_2(S_{\mathbf{t}}, z)$ for all real z, as long as $\mathbf{t} \neq (0, \cdots, 0)$. Then, for $u = 1$, the relation (2) gives $f_1(\mathbf{t}) = f_2(\mathbf{t})$, which obviously holds also for $\mathbf{t} = (0, \cdots, 0)$. Thus by the uniqueness theorem for characteristic functions, we have $F_1 \equiv F_2$.

The rest of the paper gives three applications (II—IV). Here (2) and Lemma I act as an induction principle, allowing extensions of theorems on one-dimensional distributions to multi-dimensional ones. The proofs are, as above, very simple. II concerns the classical Carleman momentum criterion, and asserts that $F(E)$ is uniquely determined by its momenta

$$\mu_{r_1, r_2, \cdots, r_n} = \int_{R_n} x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \cdot dF$$

if the following series is divergent

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_{k, 0, \cdots, 0} + \mu_{0, k, 0, \cdots, 0} + \cdots + \mu_{0, \cdots, 0, k})^{-\frac{1}{2k}}.$$

III and IV give simple proofs of the wellknown convolution and continuity theorems for characteristic functions in several variables.

DER GRÖSSTE WERT EINER STATISTISCHEN VERÄNDERLICHEN

Von E. J. Gumbel, Lyon.

Zu einer nach rechts unbegrenzten, stetigen Ausgangsverteilung $w(x)$ mit der Wahrscheinlichkeit $W(x)$ gehört, für N Beobachtungen, eine Verteilung $\mathfrak{w}_N(x)$ des größten Wertes[1]

$$(1) \qquad \mathfrak{w}_N(x) = N\,W(x)^{N-1}\,w(x)$$

welche einen Spezialfall der allgemeinen Verteilung des m-ten Wertes darstellt. Die Verteilung (1) besitzt ihrerseits einen wahrscheinlichsten Wert $\tilde{u}$, der letzter Wert genannt wird, einen Mittelwert $\bar{u}$, der Grenzwert genannt wird, und einen mittleren Fehler s. Der letzte Wert ergibt sich für genügend große N aus

$$(2) \qquad N = -\frac{w'(\tilde{u})}{w^2(\tilde{u})}$$

[1] Les valeurs extrèmes des distributions statistiques. Annales de l'Institut Henri Poincaré T. IV, fasc. 2, p. 115. Paris 1935.

oder, sobald bei einer vorgeschriebenen Genauigkeit die Hopital'sche Regel

$$(3) \qquad \frac{w(\tilde{u})}{1-W(\tilde{u})} = -\frac{w'(\tilde{u})}{w(\tilde{u})}$$

als erfüllt gelten kann, aus

$$(2') \qquad W(\tilde{u}) = 1 - \frac{1}{N}.$$

Für eine einseitig exponentielle Ausgangsverteilung mit dem Mittelwert $\frac{1}{\alpha}$ geht schon bei mäßigen N die Verteilung (1) in die Grenzform

$$(4) \qquad \mathfrak{w}(x) = \alpha\, e^{-y-e^{-y}}$$

über, wobei die transformierte Veränderliche $y = \alpha(x - \tilde{u})$ und die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{W}(x) = e^{-e^{-y}}$ lautet. Der letzte Wert hat dann die Größe

$$(5) \qquad \tilde{u} = \frac{1}{\alpha}\, lg N.$$

Die Formel (4) erlaubt z. B. die Verteilung der größten Distanzen zwischen radioaktiven Emissionen zu berechnen.[2]

Bei einer beliebigen Ausgangsverteilung erhält man für genügend große N, welche Größe selbst von der Natur der Verteilung abhängt, unter wenig einschränkenden analytischen Bedingungen wieder die Grenzverteilung (4) der größten Werte. Dieser weite Geltungsbereich erlaubt auch beobachtete Verteilungen von größten Werten wiederzugeben, deren Ausgangsverteilung noch nicht mit Sicherheit bestimmt ist, wie die Verteilung der Hochwässer,[3] oder überhaupt nicht analytisch festgelegt werden kann, wie z. B. die Verteilung der höchsten Alter.

Die beiden Konstanten $\tilde{u}$ und α lassen sich aus einer beobachteten Verteilung des größten Wertes, sei es durch Bestimmung des Mittelwerts $\bar{u}$ und des mittleren Fehlers s, sei es aus dem Medianwert u_0 und den beiden Quartilen u_1 und u_2 bestimmen. Die erste Methode führt auf

$$(6) \qquad \tilde{u} = \bar{u} - \frac{0{,}57722}{\alpha}; \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1{,}28255}{s}$$

die letztere, etwas ungenauer, dafür aber einfacher, führt auf

$$(6') \qquad \tilde{u} = u_0 - 0{,}23307\,(u_2 - u_1); \quad \frac{1}{\alpha} = 0{,}63592\,(u_2 - u_1).$$

[2] Les distances extrêmes entre les émissions radioactives. C. R. 203, p. 354, Paris 1936.

[3] Les inondations et la théorie de la plus grande valeur. C. R. 203, p. 27, Paris 1936.

Im allgemeinen Fall erhält man für den reduzierten letzten Wert

(7) $$\tau = \frac{\tilde{u} - \xi}{\theta}$$

wobei ξ die Dominante und θ den durchschnittlichen Fehler der Ausgangsverteilung bedeutet, mit Hilfe von (2) oder (2')

(8) $$\tau = f(lg\, N)$$

wobei f von der Natur der Ausgangsverteilung abhängt; somit für den letzten Wert selbst

(8') $$\tilde{u}_N = \xi + \theta f(lg\, N).$$

Der größte, bis zu einer bestimmten Beobachtungszahl beobachtete Wert wird dementsprechend unter Aufrechterhaltung der gleichen Bedingungen mit der Beobachtungszahl, also auch der Zeit, stets wachsen, was mit den Beobachtungen verglichen werden kann.

Die Konstante

(9) $$\alpha = -\frac{w'(\tilde{u})}{w(\tilde{u})}$$

und damit der mittlere Fehler der Verteilung des größten Wertes ist im allgemeinen selbst eine Funktion von N. Dies erlaubt innerhalb derjenigen Ausgangsverteilungen, welche auf die Grenzverteilung (4) führen, drei Kategorien zu unterscheiden je nach dem Verhalten der Ausgangsverteilung im unendlichen:

1) solche, die sich wie eine Exponentialfunktion selbst verhalten. Hierzu gehören z. B. die einseitig und doppelseitig exponentielle Verteilung und der Pearson'sche Typ III. Man erhält $f(lg N) = lg N$ und einen von N unabhängigen mittleren Fehler. Die Grenzverteilung des größten Wertes verschiebt sich mit wachsenden N unverändert nach rechts. Durch Erhöhung der Beobachtungszahl kann man den mittleren Fehler der Verteilung nicht vermindern, was den üblichen Vorstellungen durchaus widerspricht.

2) Noch schlimmer: falls α mit N fällt, steigt der mittlere Fehler der Grenzverteilung mit wachsenden N. Mehr Beobachtungen erweitern die Verteilung; falls die Ausgangsverteilung langsamer als eine Exponentialfunktion nach Null strebt, nimmt der letzte Wert rascher zu als $lg N$. Dies ist der Fall bei der Galton'schen Verteilung, für welche $lg f(lg N) = \sqrt{N}$.

3) Umgekehrt verengt sich die Verteilung, und der mittlere Fehler nimmt ab für alle Verteilungen, welche rascher als eine Exponentialfunktion nach Null gehen. Der letzte Wert nimmt langsamer zu als $lg N$. Dies ist

z. B. der Fall für die Gauss'sche[1] und Gompertz'sche[2] Verteilung, für welche $f(lg N) = \sqrt{lg N}$; bzw. $f(lg N) = lg\, lg N$.

Diese Berechnung der Verteilungen der größten Werte wie des letzten Wertes selbst als Funktion von N erlaubt die Frage zu entscheiden, ob ein bestimmter Extremwert noch mit einer gewählten Ausgangsverteilung vereinbar ist, oder ob wesentliche, z. B. säkulare Veränderungen vorgekommen sind.

DAS GRENZALTER

Von E. J. Gumbel, Lyon.

Zahlreiche Autoren haben sich mit dem von allgemeinen Gesichtspunkten aus interessanten Problem der größten Dauer des menschlichen Lebens beschäftigt und versucht, dieses aus den Beobachtungen durch komplizierte Interpolationsformeln zu bestimmen. Diese Frage erhält ein neues Gesicht, sobald man die Absterbeordnung als Verteilung der Gestorbenen über die Alter[3] betrachtet und insbesondere annimmt, daß diese Ausgangsverteilung unbegrenzt sei. Dann wird nämlich das Grenzalter einfach ein Spezialfall des größten Werts einer unbegrenzten Verteilung für eine gegebene, große Zahl von Beobachtungen. Die Richtigkeit dieser Analogie läßt sich ohne einschneidende analytische Annahmen durch einen Vergleich der Verteilung der Sterbealter der Ältesten aus einer bestimmten Bevölkerung mit der Grenzverteilung der größten Werte durchführen. Die Dominante dieser Verteilung wird letztes Alter $\tilde{\omega}$, der Mittelwert Grenzalter $\overline{\omega}$ genannt; der mittlere Fehler ist umgekehrt proportional der Sterbensintensität $\mu(\tilde{\omega})$ am letzten Alter. Vergleiche, durchgeführt für die letzten 50 Jahre in Schweden[2] und der Schweiz,[4] haben die Berechtigung der Methode bewiesen. Damit wird es zulässig, das letzte Alter als Funktion der Beobachtungszeit zu berechnen. Beschränkt man sich auf die Verteilung der Gestorbenen um das Normalalter ξ und bezeichnet man die Lebenserwartung dieses Alters mit $E(\xi)$, die Wahrscheinlichkeit es zu erreichen mit $l(\xi)$, so beträgt das letzte Alter

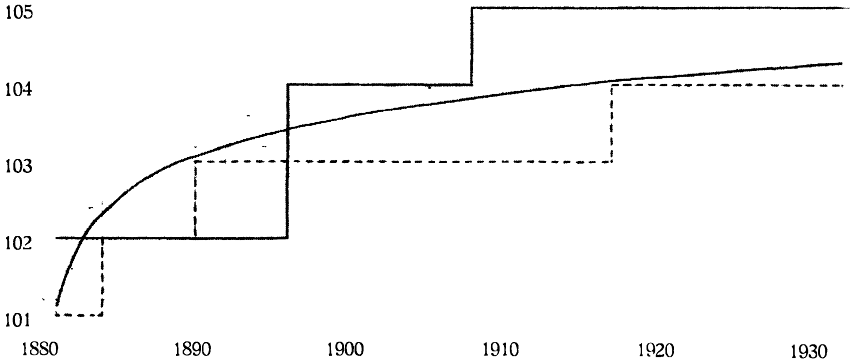
$$\tilde{\omega} = \xi + E(\xi) f(lg N l(\xi) k) \tag{1}$$

[1] La plus grande valeur. Aktuarske vedy V, no. 1, Prag 1936.

[2] Le piu alte étà in Svezia. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari VI, p. 335, Roma 1936.

[3] La table de mortalité traitee comme distribution. Annales de l'Université de Lyon, 5e série A. no. 1, p. 48, 1936.

[4] L'âge limite. Aktuarske vedy VI, no. 1, Prag 1936.



Das größte Alter der Männer in Schweden.
Beobachtung
Theorie
Ganzzahlige theoretische Werte

wobei N die Zahl der Gestorbenen, k eine Konstante, die nur zur Normierung der Verteilung der über dem Normalalter Gestorbenen dient, und f von der Annahme über den Verlauf der Sterblichkeit bei den höchsten Altern abhängt.

Für die Gompertz'sche Formel[1] lauten Absterbeordnung $l(x)$ und Sterbensintensität $\mu(x)$, zurückgeführt auf die drei Normalwerte ξ, $l(\xi)$ und $E(\xi)$

$$l(x)=l(\xi)\,e^{1-e^{pt}};\quad \mu(x)=\frac{p}{E(\xi)}\,e^{pt} \tag{2}$$

wobei das reduzierte Alter

$$t=\frac{x-\xi}{E(\xi)} \tag{3}$$

und $p=0{,}59635$ eine universelle Konstante ist. Nach Einführung der Verteilung der Gestorbenen $\vartheta(x)=l(x)\,\mu(x)$ erhält man auf Grund der Formel (2) des vorangegangenen Artikels das letzte Alter nach leichten Vernachlässigungen aus

$$\log N l(\xi)=2\log e\cdot\operatorname{Sin\,hyp}\left(p\,\tau-\frac{1}{2}\right) \tag{1'}$$

wobei

$$\tau=\frac{\tilde{\omega}-\xi}{E(\xi)} \tag{3'}$$

das reduzierte letzte Alter ist. Die vorangehende Figur vergleicht das beobachtete ganzzahlige größte Alter der schwedischen Männer für die Jahre

[1] La signification des constantes dans la formule de Gompertz-Makeham C. R. t. 196, p. 592, Paris 1933.

1881—1932 mit dieser Theorie (1') und den entsprechenden ganzzahligen Werten. Die dabei aus der Sterbetafel 1901—1910 entnommenen Normalwerte sind $\xi=78{,}47$; $E(\xi)=5{,}81$ Jahre und $l(\xi)=0{,}23$, während die Zahl der jährlich im Durchschnitt während dieser Zeit Gestorbenen $N=39215$ beträgt.

Das Wachstum des letzten Alters mit der Zeit ist so langsam, daß das höchste, bis jetzt in Schweden beobachtete Alter von 106 Jahren wohl erst in einem Jahrhundert überschritten werden wird.[1] Da erfahrungsgemäß das Normalalter mit den hygienischen Bedingungen etwas wächst, die zugehörige Lebenserwartung jedoch gleichzeitig fällt, würde eine Verbesserung der Sterblichkeit, so lange sie im Rahmen dieser Entwicklung bleibt, das Grenzalter nicht erhöhen.

SOME THEOREMS CONNECTED WITH THE "CENTRAL LIMIT THEOREM" IN PROBABILITY

By Harald Cramér, Stockholm.

Suppose that we are given a sequence of mutually independent random variables $x_1, x_2, \cdots$, and let $G_n(x)$ denote the distribution function of x_n, so that for all real x

$$G_n(x) = \text{probability of the relation } x_n \leqq x.$$

We shall suppose that every x_n has the mean value zero and a finite dispersion:

$$E(x_n)=0, \quad E(x_n^2)=\sigma_n^2.$$

Putting

$$z_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{s_n}$$

with

$$s_n^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2,$$

and denoting by $F_n(x)$ the distribution function of the new variable z_n, it is known that $F_n(x)$ can be calculated from the functions $G_1(x), \cdots, G_n(x)$ by means of a repeated convolution ("Faltung").

The famous "Central Limit Theorem" then asserts that, under general conditions, $F_n(x)$ tends for $n\to\infty$ to the *normal distribution function*:

$$F_n(x) \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

[1] Le plus grand âge, distribution et série. C. R. 201, p. 318, Paris 1935.

If the functions $G_1(x)$, $G_2(x)$, $\cdots\cdots$ satisfy certain additional conditions, it is possible to obtain more definite results concerning the behaviour of $F_n(x)$ for large values of n. Using M as a general notation for a constant independent of n and x, we introduce the following conditions:

(I) $\sigma_n > M > 0$;

(II_k) $E(|x_n|^k) < M$ for some fixed integer $k \geqq 3$ and for all n;

(III) Every $G_n(x)$ has a derivative $G'_n(x)$, which is of bounded variation V_n in $-\infty < x < +\infty$, and we have $V_n < M$.

We then have the following theorems[1]:

Theorem A. If (I) and (II_3) are satisfied, we have

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < M \frac{\log n}{\sqrt{n}}.$$

Theorem B. If (I), (II_3), and (III) are satisfied, we have

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < \frac{M}{\sqrt{n}},$$

$$|F'_n(x) - \Phi'(x)| < \frac{M}{\sqrt{n}}.$$

Theorem C. If (I), (II_k), and (III) are satisfied, where k is an integer > 3, we have

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{k-3} \frac{p_{i,n}(x)}{n^{\frac{i}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} + R_{k,n}(x),$$

$$F'_n(x) = \Phi'(x) + \sum_{i=1}^{k-3} \frac{q_{i,n}(x)}{n^{\frac{i}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} + r_{k,n}(x),$$

with

$$|R_{k,n}(x)| < \frac{M}{n^{\frac{k-2}{2}}}, \qquad |r_{k,n}(x)| < \frac{M}{n^{\frac{k-2}{2}}}.$$

Here, $p_{i,n}(x)$ and $q_{i,n}(x)$ are polynomials in x of degree $3i-1$ and $3i$ respectively, with coefficients which, for every fixed i, are bounded for all values of n. In the particular case when all functions $G_1(x)$, $G_2(x)$, $\cdots\cdots$ are identical, $p_{i,n}$ and $q_{i,n}$ are independent of n.

[1] Theorem A was proved already by Liapounoff in 1901. Theorems B and C hold under conditions much more general than those here given. Detailed proofs will be given in my forthcoming Cambridge Tract: *Random Variables and Probability Distributions.*

ÜBER GEWISSE FUNKTIONEN DER KOMMUTATIONSWERTE, DIE VOM ALTER UNABHÄNGIG SIND

Von Eugen Lukács, Wien.

Mit l_x bezeichnen wir die Anzahl der Lebenden des Alters x, mit $D_x = e^{-\delta x} \cdot l_x$ die diskontierte Zahl der Lebenden. Die übrigen Kommutationswerte werden durch die Gleichungen

$$I^0 \bar{N}_x = \bar{N}_x = \int_x^\omega D_t\, dt \quad \text{und} \quad I^k \bar{N}_x = \int_x^\omega I^{k-1} \bar{N}_t\, dt$$

definiert.

Wir bilden die Funktion

$$E_k(x) = \frac{I^k \bar{N}_x}{I^{k-1} \bar{N}_x} : \frac{I^{k-1} \bar{N}_x}{I^{k-2} \bar{N}_x} = \frac{I^k \bar{N}_x \cdot I^{k-2} \bar{N}_x}{(I^{k-1} \bar{N}_x)^2}$$

und nennen sie das k-te Doppelverhältnis.

K. A. Poukka hat bei der Ableitung seiner Näherungsformel bemerkt, daß E_2 vom Alter praktisch unabhängig ist. Für diese nur empirisch gefundene Tatsache soll eine Erklärung gesucht werden und daher untersucht werden, wie eine Sterbtafel beschaffen sein muß, für die die Funktionen E_k vom Alter unabhängig sind.

Man kann zeigen:

1. Wenn das k-te Doppelverhältnis E_k unabhängig vom Alter ist, so sind auch die Doppelverhältnisse $E_{k-1}, E_{k-2}, \cdots, E_3, E_2$ vom Alter unabhängig und können aus E_k mit Hilfe der Formel $E_k = \frac{1}{2 - E_{k-1}}$ berechnet werden.

2. Aus der Konstanz des Doppelverhältnisses E_k folgt, daß die Sterblichkeitsintensität die Gestalt $\mu_x = \frac{1}{b - ax} - \delta$ hat. Diese Formel ist eine Verallgemeinerung des Moivre'schen Sterblichkeitsgesetzes und hat das Endalter $\omega = \frac{b}{a}$.

3. Wenn für eine Absterbeordnung die Sterblichkeitsintensität die Gestalt $\mu_x = \frac{1}{b - ax} - \delta$ hat und das Endalter $\omega = \frac{b}{a}$ ist, so sind *alle* Doppelverhältnisse E_k unabhängig vom Alter und es ist

$$E_k = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{\left\{\sum\limits_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \frac{1}{1+\nu+\frac{1}{a}}\right\} \cdot \left\{\sum\limits_{\nu=0}^{k-2} (-1)^\nu \binom{k-2}{\nu} \frac{1}{1+\nu+\frac{1}{a}}\right\}}{\left\{\sum\limits_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \binom{k-1}{\nu} \frac{1}{1+\nu+\frac{1}{a}}\right\}^2}$$

4. Es sei $\mu_x = A + Bc^x$ die Sterblichkeitsintensität einer nach Gompertz-Makeham ausgeglichenen Absterbeordnung, ferner sei δ die Zinsintensität und $\sigma_x = \mu_x + \delta$. Man kann dann die Funktion σ_x im Altersintervall (α, β) durch eine Hyperbel $\nu_x = \frac{1}{b - ax}$ approximieren und zwar so, daß das Integral $F(a, b) = \int\limits_\alpha^\beta \left[1 - \frac{\sigma_x}{\nu_x}\right]^2 dx$ ein Minimum wird.

Durch diese Forderung sind die Parameter a und b und damit auch die Doppelverhältnisse E_k der approximierenden Sterbetafel bestimmt. Diese Approximation wurde für die *HM*-Tafel und einen Zinsfuß von 4 % im Altersintervall $\alpha = 20$ und $\beta = 80$ durchgeführt und ergab für die approximierende Hyperbel die Parameter $a = 0{,}334975$, $b = 32{,}96976$ und die Doppelverhältnisse $E_2 = 0{,}83292$, $E_3 = 0{,}85684$, $E_4 = 0{,}87477$. Für die *HM*-Tafel selbst ist

bei Alter	E_2	E_3	E_4
20	0,8374	0,8521	0,8670
30	0,8227	0,8439	0,8617
45	0,8111	0,8400	0,8576
60	0,8188	0,8536	0,8652
70	0,8332	0,8658	0,8794
80	0,8590	0,8928	0,9038

Diese Tabelle zeigt, daß die Doppelverhältnisse sehr wenig vom Alter abhängen, diese Tatsache kann man damit erklären, daß man eine vorgegebene Gompertz-Makeham Kurve in einem bestimmten Intervall durch eine Hyperbel approximieren kann.

INTEGRATION ZUSAMMENGESETZTER FUNKTIONEN MIT ANWENDUNG AUF VERSICHERUNGSMATHEMATISCHE PROBLEME

Von Birger Meidell, Oslo.

Die folgende Formel, wo z ein willkürliches Argument bedeutet,

$$\sum_{t=a}^{a+n\omega} f(t)\,\psi(\beta(t)) = \sum_{\varrho=0}^{m-1} \frac{\psi^{(\varrho)}(z)}{\varrho!} \sum_{t=a}^{a+n\omega} f(t)\,(\beta(t)-z)^{\varrho} + R_m\,, \tag{1}$$

läßt sich ohne weiteres durch Entwicklung von $\psi(\beta)$ nach Taylor herleiten. Daß aber das Restglied auf die Form

$$R_m = \frac{1}{m!} \sum_{a}^{a+n\omega} f(t)\,\psi^{(m)}\big(z+\theta(\beta(t)-z)\big)\,\big(\beta(t)-z\big)^m, \tag{1'}$$

— wo also nur *ein einziges* θ auftritt — gebracht werden kann, geht z. B. aus einer etwas allgemeineren, vom Verf. zum vorvorigen Kongresse entwickelten, Formel hervor.[1] Nach der Substitution $\omega = \dfrac{b-a}{n}$, $n \to \infty$, bekommt man, die Integrabilität vorausgesetzt,

$$\int_a^b f(t)\,\psi(\beta(t))\,dt = \sum_{\varrho=0}^{m-1} \frac{\psi^{(\varrho)}(z)}{\varrho!} \int_a^b f(t)\,(\beta(t)-z)^{\varrho}\,dt + R_m \tag{2}$$

$$R_m = \frac{1}{m!} \int_a^b f(t)\,\psi^{(m)}\{z+\theta(\beta(t)-z)\}\,(\beta(t)-z)^m\,dt \tag{2'}$$

Verschiedene Mittelwertsätze und Ungleichungen gehen aus (1) und (2) ohne weiteres hervor. So liefert der Spezialfall

$$z = \frac{\int_a^b f(t)\,\beta(t)\,dt}{\int_a^b f(t)\,dt}\,,\quad f(t)>0,\quad \psi''(t)>0$$

[1] „Les fonctions symétriques . . ." Bologna 1928, Section 1 A, oder ausführlicher beschrieben in der „Skandinavisk Aktuarietidskrift" 1928, pag. 201 f. f. Man setze in Formel (4) $\psi_i(x_i) = f(a+\omega i)\,\psi(x_i)$, $z_1 = z_2 = \cdots = z$, $x_i = \beta(a+\omega i)$, $a+\omega i = t$.

sofort die wohlbekannte Hölder-Jensensche Ungleichung für konvexe Funktionen. Verschiedene versicherungsmathematische Probleme erfordern z. B. eine möglichst rasch konvergente Formel für den Barwert a_x einer Leibrente. Man bekommt mittels (1) für

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x} e^{-\delta t}$$

verschiedene Formeln, so z. B. die ziemlich rasch konvergierende Reihenentwicklung

$$a_x e^{\delta z_x} = e_x + \frac{\delta^2}{2!} \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \frac{l_{x+t}}{e_x} t^2 - z_x^2 e_x \right\} + \cdots \qquad (3)$$

wo man für z_x den Wert $\frac{\sum_1^\infty l_{x+t} \cdot t}{\sum_1^\infty l_{x+t}}$ gewählt hat, und wo e_x die gewöhnliche abgekürzte mittlere Lebensdauer bedeutet. (Beispielsweise liefern schon die zwei ersten Glieder der Reihe bei 5 % Zins und $x = 25$ den Wert 15,61 gegen genau 15,56 bei der Tabelle H. M., während bei 6 % genaue Übereinstimmung erreicht wird bei diesem Alter. Für mittlere Alter ist die Übereinstimmung weniger gut, und weitere Glieder müssen hinzugezogen werden.)

In dieser Formel treten Sterblichkeits- und Zinsfunktionen getrennt auf; gewöhnliche Tabellen sind somit unerforderlich. Mit Hilfe des Obigen, und nach rein empirischen Betrachtungen, für die Verf. a. a. O. näher erörtern wird, hat Verf. auch eine *empirische* Formel abgeleitet

$$a_x = \left\{ e_x + \delta^2 f_x \right\} e^{-g_x \varphi_\delta - h_x \psi_\delta},$$

die im allgemeinen eine *vollständige Übereinstimmung in 2 bis 3 Dezimalstellen* liefert, für $x > 25$. Die Funktionen e, f, g und h hängen nur von der Sterblichkeit, die Funktionen ψ und φ nur vom Zins (δ) ab.

SUR LES ÉQUILIBRES ÉCONOMIQUES

Par M. l'Abbé Potron, Paris.

Notations: A_i = unité de « résultat de travail »; C_h = « niveau de vie »; q_h = nombre des non-travailleurs de C_h; b_{hi} = nombre des A_i consommées, dans C_h, par personne et par an; c_{ki} = nombre des A_i consommées pour produire une A_k; p_{ih} = nombre des travailleurs de C_h produisant les A_i; t_{ih} = nombre total d'heures que leur demande la production d'une A_i;

s_{ih} = leur salaire horaire individuel; a_i = prix d'une A_i; N = maximum individuel annuel du nombre d'heures de travail; NS_h = coût de vie de C_h par personne et par an.

Relations évidentes, et conditions requises:

(1) $$d_i - \Sigma c_{ki} d_k - \Sigma b_{hi} Q_h = f_i \geqq 0, \quad Q_h = \Sigma p_{ih} + q_h,$$

(2) $$N p_{ih} - d_i t_{ih} = w_{ih} \geqq 0, \quad d_i \text{ et } p_{ih} > 0, \quad q_h \geqq 0,$$

(3) $$a_i - \Sigma c_{ik} a_k - \Sigma t_{ih} s_{ih} = b_i \geqq 0, \quad a_i \text{ et } s_{ih} > 0,$$

(4) $$NS_h = \Sigma b_{hk} a_k, \quad d_i t_{ih} s_{ih} - NS_h p_{ih} = N p_{ih} e_{ih} \geqq 0.$$

Conséquences algébriques:

(5) $$\begin{cases} d_i - \Sigma C_{ki} d_k = F_i = f_i + N^{-1} \Sigma\Sigma b_{hi} w_{kh} + \Sigma b_{hi} q_h, \\ C_{ki} = c_{ki} + N^{-1} \Sigma b_{hi} t_{kh}, \end{cases}$$

(6) $$\begin{cases} a_i - \Sigma C'_{ik} a_k = B_i = b_i + d_i^{-1} \Sigma p_{ih} e_{ih}. \\ C'_{ik} = c_{ik} + d_i^{-1} \Sigma p_{ih} b_{hk} = C_{ik} + (N d_k)^{-1} \Sigma b_{hi} w_{kh}, \end{cases}$$

(7) $$d_i - \Sigma C'_{ki} d_k = f_i + \Sigma b_{hi} q_h.$$

En vertu de théorèmes connus (FROBENIUS, S. A. B. 1909, p. 514; POTRON, A. E. N., t. 30, 1913, p. 53), un système $x_i - \Sigma a_{ik} x_k = b_i (a_{ik} \geqq 0, b_i > 0)$ admet des solutions x_j tous > 0 toujours et seulement si une certaine fonction des a_{ik} est < 1. Pour (5), la condition porte sur les C_{ki}, donc uniquement sur les c_{ik}, t_{ih}, b_{hi} et N. Si elle est remplie, pour tout système de f_i, w_{kh} et q_h positifs, (5) détermine un système de d_i positifs. Ces d_i vérifiant (7), la condition est remplie par les C'_{ki}; donc, pour tout système de b_i et e_{ih} positifs, (6) détermine un système de a_i positifs. Des p_{ih} et s_{ih} positifs résultent alors de (2) et (4).

CERTAIN MOMENT FUNCTIONS FOR FISHER'S k-STATISTICS IN SAMPLES FROM A FINITE POPULATION

By PAUL R. RIDER, St. Louis, U. S. A.

R. A. Fisher has defined certain symmetric functions, called k-statistics, of the observations composing a sample, which have the property that the mean value, in repeated samples from an infinite population, of any one of them is equal to the corresponding cumulant or semi-invariant of the population. He has shown how the moment functions of the simultaneous distribution in samples of the k-statistics can be derived by the use of partitions and of certain pattern formulae.

A considerable amount of work has been done on moments of moments of samples from a finite population, but apparently the corresponding problem for k-statistics has not heretofore been treated. Professor Rider has worked out the cumulants, up to and including those of order six, of the simultaneous distribution of k-statistics in samples from such a population.

ON THE MEAN DIFFERENCE AT RANDOM SAMPLES — A NOTE ON PROF. BOWLEY'S LECTURE*)

By Herman Wold, Stockholm.

Let x be a statistical variable, and $F(x)$ its distribution function. The mean difference g of the distribution is[1]

$$g = \int\int |t-u|\, dF(t)\, dF(u) = 2 \cdot \int dF(t) \cdot \int^{t} F(u)\, du. \tag{1}$$

Let $x_1, x_2, \cdots, x_n$ be a random sample of the variable x. Let $\mathbf{E}\, Z$ denote the mathematical expectation of the variable Z, and put $\mathbf{E}\, x = m$; $\mathbf{E}\,(x-m)^p = \mu_p$.

Theorem **1.** *The usual empirical mean difference*

$$\bar{g} = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_1^n \sum_1^n |x_i - x_k|$$

satifies the relation $\mathbf{E}\,\bar{g} = g$. *Thus* $\bar{g}$ *yields a presumptive value, in the sense of* Tchouproff[2], *for* g.

By definition is $\mathbf{E}\,|x_i - x_k| = g$ for $i \neq k$. It follows that $n(n-1) \cdot \mathbf{E}\,\bar{g} = \Sigma\Sigma\, \mathbf{E}\,|x_i - x_k| = n(n-1)\, g$, (the summation indices here, as in the following, vary from 1 to n with the exception of equal values for any two of them).

Theorem **2.** *The variance of* $\bar{g}$ *is*[3]

$$\sigma^2(\bar{g}) = \frac{4}{n} \cdot \left(\mu_2 - \frac{2n-3}{2n-2} \cdot g^2 + 4 \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \int dF(t) \cdot \int^{t} F(u)\, du \cdot [m - t + \int^{t} F(v)\, dv] \right)$$

In fact

$$\sigma^2(\bar{g}) = \mathbf{E}\,\bar{g}^2 - \mathbf{E}^2\,\bar{g} = \frac{1}{n^2(n-1)^2} \cdot \mathbf{E}\,(\Sigma\Sigma\, |x_i - x_k|)^2 - g^2;$$

---

*) cf. page 190.

[1] $+\infty$ and $-\infty$ as upper and lower integral limits are omitted throughout. For the second formula see H. Wold, *Metron* XII, 2 (1935), p. 45.

[2] See *Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie*, Leipzig (1925), p. 75. Cfr. also *Biometrika* XII, (1920) p. 140.

[3] Assuming that $F(x)$ has a derivative, Mr. U. S. Nair has recently [cfr. *Biometrika* XXVIII (1937)] deduced an expression for $\sigma^2(\bar{g})$. His paper contains also the formulae (A) and (B) below.

$$(3) \quad \begin{aligned} &n^2(n-1)^2(\sigma^2(\bar{g})+g^2)= \\ &\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma \mathsf{E}\,|x_i-x_k|\,|x_l-x_m| + \Sigma\Sigma \mathsf{E}\,(x_i-x_k)^2 + \Sigma\Sigma\Sigma \mathsf{E}\,|x_i-x_k|\,|x_i-x_l|; \end{aligned}$$

$$(4) \quad \mathsf{E}\,|x_i-x_k|\,|x_l-x_m| = \mathsf{E}\,|x_i-x_k| \cdot \mathsf{E}\,|x_l-x_m| = g^2;$$

$$(5) \quad \mathsf{E}\,(x_i-x_k)^2 = \int\int (t-u)^2 \cdot dF(t)\,dF(u) = 2\,\mu_2;$$

$$\mathsf{E}_0 = \mathsf{E}\,|x_i-x_k|\,|x_i-x_l| = \int\int\int |t-u|\,|t-v| \cdot dF(t)\,dF(u)\,dF(v).$$

Some deduction gives (cf. (1), second formula)

$$(6) \quad \mathsf{E}_0 = \mu_2 + 4 \cdot \int dF(t) \cdot \int^{t} F(u)\,du \cdot \left[m - t + \int^{t} F(v)\,dv\right].$$

Insert (4)—(6) in (3), where the sums contain respectively $n(n-1)(n-2)(n-3)$, $2n(n-1)$, and $4n(n-1)(n-2)$ equal members. After reduction follows (2).

Special cases: Normal, (A), and rectangular, (B), distributions.

$$(A) \quad F(x) = \int^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt; \quad g = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}};$$

$$\sigma(\bar{g}) = \frac{g}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{4n-6-2(n-2)\sqrt{3}}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(B) \quad F(x) = \begin{cases} 0 &, \; x \leqq \alpha \quad ; \\ (x-\alpha)/(\beta-\alpha), & \alpha \leqq x \leqq \beta; \\ 1 &, \; \beta \leqq x \quad ; \end{cases}$$

$$g = \frac{\beta-\alpha}{3}; \quad \sigma(\bar{g}) = \frac{g}{\sqrt{5n}} \cdot \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

SUR UNE FORMULE GÉNÉRALE SUR L'ASSURANCE SOCIALE

Par Nilos Sakellariou, Athènes.

Dans son ouvrage « *Sur une formule générale pour le calcul des primes pour l'assurance de la vie* »,[1] Maurice Fréchet donne la formule:

$$(1) \quad \Sigma p_{x+k} \cdot D_{x+k} = \Sigma V_{x+k} \cdot D_{x+k} + v \cdot \Sigma \Delta_{x+k} \cdot C_{x+k},$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots, \quad v = 1 : (1+i).$$

[1] International Mathem. Congress, Toronto, Canada, 1924, et Publications de l'Institut de Math. de l'Université de Strasbourg, 1929.

N. Sakellariou communique la formule suivante:

$$(2)\quad \Sigma p_{x+k}\cdot D^{a}_{x+k}=\Sigma V^{a}_{x+k_1}\cdot D^{a}_{x+k_1}+\Sigma V^{ai}_{x+k_2}\cdot D^{ai}_{x+k_2}+\Sigma V^{av}_{x+k_3}\cdot D^{av}_{x+k_3}+$$
$$+\Sigma V^{a\tau}_{x+k_4}\cdot D^{a\tau}_{x+k_4},\qquad (k, k_1, k_2, k_3, k_4=0, 1, 2, \cdots)$$

au moyen de laquelle on peut calculer la prime nette d'assurance et d'autres éléments se rapportant à l'assurance sociale d'une personne et résoudre certains cas particuliers d'assurance sociales sans raisonnement particulier pour chacun d'eux.

En supposant $p_x=p_{x+1}=\cdots=p_{x+\sigma-1}\neq 0$, $p_{x+\sigma}=p_{x+\sigma+1}=\cdots=0$, et en désignant p_x par $|_{\sigma}p_x$ on trouve

$$(3)\quad |_{\sigma}p_x=\frac{\Sigma V^{a}_{x+k_1}\cdot D^{a}_{x+k_1}+\Sigma V^{ai}_{x+k_2}\cdot D^{ai}_{x+k_2}+\Sigma V^{av}_{x+k_3}\cdot D^{av}_{x+k_3}+\Sigma V^{a\tau}_{x+k_4}\cdot D^{a\tau}_{x+k_4}}{N^{a}_{x}-N^{a}_{x+\sigma}}$$

$$N^{a}_{x+j}=\Sigma D^{a}_{x+j},\ j=0, 1, 2, \cdots$$

La formule (3) donne la prime constante annuelle d'une personne âgée de x années et σ années depuis la signature de la police d'assurance.

La formule (2) peut être employée pour toutes éspèces d'assurance sociales de telle sorte qu'on peut trouver la prime constante mensuelle ou hebdomadaire d'assurance comme faisant partie du traitement de l'assurée durant un temps déterminé et pour chaque personne assuree. De plus, si durant des périodes de temps fixes depuis le début des assurances sociales, on percevait differentes primes d'assurance déterminées s'écartant de la prime moyenne, on peut trouver la prime constante qui doit être perçue par le service des assurances sociales durant un temps déterminé de telle sorte qu'après cette période, il puisse percevoir la prime moyenne d'assurance.

ON THE MEASURABILITY OF UTILITY

By Franz Alt, Wien.

Measurability of utility means that there exists a function, defined in the system of all sets of commodities, which is, by some way or other, distinguished among all the other functions of such kind. In order to be exact, we should not speak of only one such function; it is sufficient to distinguish a family of such functions, in which any two are connected by a linear transformation. I shall now indicate a set of conditions which are necessary and sufficient for measurability of utility. It will be seen, that the question, whether these conditions are satisfied or not, is easier to be settled than the problem of measurability itself.

We consider a finite number (say n) of arbitrarily divisible commodities. A set of such commodities is characterized by n real numbers $(x_1, \cdots, x_n)$. We shall denote this set shortly by (x). The conditions are the following:

I) For each two sets of commodities $(x), (y)$ it is known whether the utility of (x) is greater, equal or less than the utility of (y). This relation shall be denoted by $(x) \overset{\supset}{\underset{\subset}{\equiv}} (y)$.

II) For each four sets of commodities (x), (y), (z), (u) it is known whether the change in utility due to the transition from (x) to (y) is greater, equal or less than the change in utility due to the transition from (z) to (u). We shall denote this relation by $(x) \rightarrow (y) \overset{\supset}{\underset{\subset}{\equiv}} (z) \rightarrow (u)$. The signs $\supset, \equiv, \subset$ are used in two different meanings, namely for goods and for changes of goods.

These two conditions have been studied long ago in theoretical economy; their importance has been pointed out especially by Prof. BOWLEY. It is known that they are necessary for developing the theory of marginal utility. Recently Mr. LANGE has proved that they are sufficient for the uniqueness of a utility function which is distinguished by certain qualities. He also gave an outline of a proof for the existence of such a function. But it appears that the conditions are not quite sufficient for that proof. So I have been lead to state some further conditions. We shall assume:

III) The relations "More useful", and "Less useful" are transitive, nonsymmetrical and irreflexive, the relation "equally useful" is transitive, symmetrical and reflexive in both meanings of these relations.

IV) The relation $(x) \supset (y)$ is equivalent to $(z) \rightarrow (x) \supset (z) \rightarrow (y)$ and to $(x) \rightarrow (z) \subset (y) \rightarrow (z)$.

V) If $(x) \rightarrow (y) \supset (x') \rightarrow (y')$ and $(y) \rightarrow (z) \overset{\supset}{\equiv} (y') \rightarrow (z')$, then $(x) \rightarrow (z) \supset (x') \rightarrow (z')$; and the same for $\subset$ instead $\supset$.

It is clear that in the system of all sets of commodities the notion of convergence may be defined, and that the whole system is a continuous space. This enables us to postulate:

VI) Let $(x_1), (x_2), \cdots, (x_n) \cdots$ be an infinite sequence of sets of commodities convergent to (x). Then if, for all values of i, $(x_i) \overset{\supset}{\equiv} (y)$, we shall assume $(x) \overset{\supset}{\equiv} (y)$; if, for all i, $(x_i) \rightarrow (y) \overset{\supset}{\equiv} (y) \rightarrow (z)$, we shall assume $(x) \rightarrow (y) \overset{\supset}{\equiv} (y) \rightarrow (z)$; and if, for all i, $(u) \rightarrow (x_i) \overset{\supset}{\equiv} (x_i) \rightarrow (y)$ we shall assume $(u) \rightarrow (x) \overset{\supset}{\equiv} (x) \rightarrow (y)$. The same three qualities shall hold for $\underset{\equiv}{\subset}$ instead of $\overset{\supset}{\equiv}$.

Before formulating a seventh condition, we shall mention an auxiliar theorem which can be proved from the conditions above. Let (x) and (y) be two arbitrary sets of commodities such that $(x) \subset (y)$; then there exists a set (z) such that $(x)\rightarrow(z)\equiv(z)\rightarrow(y)$; and provided that there exists at least one set (w) such that $(x)\rightarrow(y)\leqq(y)\rightarrow(w)$, there exists also a set (u) such that $(x)\rightarrow(y)\equiv(y)\rightarrow(u)$.

We shall not insist on the proof and come to the last condition:

VII) Let $(x), (y), (z)$ be arbitrary sets of commodities such that $(x)\subset(y)\subset(z)$; there exists a *finite number* of sets of commodities $(x_1)\equiv(x)$, $(x_2)\equiv(y)$, (x_3), $(x_4), \cdots, (x_n)$ such that $(x_1)\rightarrow(x_2)\equiv(x_2)\rightarrow(x_3)\equiv\cdots\equiv(x_{n-1})\rightarrow(x_n)\geqq(x_n)\rightarrow(z)$; and the same for $\supset$ instead of $\subset$.

From these conditions it can be proved 1) that there exists a function $f(x)$, defined for all sets of commodities (x), such that $f(x)>f(y)$ if and only if $(x)\supset(y)$, and that $f(y)-f(x)>f(u)-f(z)$ if and only if $(x)\rightarrow(y)\supset(z)\rightarrow(u)$, and 2) that each other function $g(x)$, subject to the same conditions 1), is a linear function of $f(x)$.

The complete proof is contained in a paper: "Über die Meßbarkeit des Nutzens" in "Zeitschrift für Nationalökonomie", 1936; we shall not dwell upon it here. The two theorems mentioned above mean that conditions I)—VII) are *sufficient* for measurability of utility. On the other hand it is evident that they are *necessary* too.

Our way to distinguish one among the great variety of all possible utility functions was to compare the utility of changes of goods. There is another possible way which has been shown by Prof. FRISCH, namely, to assume that there exists a commodity (for instance money) the utility of which is independent of the utility of all other commodities. But this, of course, is an assumption which cannot be controlled except we should have some other, independent way of measuring utility.

Let us have a look upon the possibilities of deciding whether the conditions are satisfied or not. As to condition I), the question can be answered in the affirmative: The actions of exchange in a market give us a means to define the relation "more useful" for sets of commodities. But the matter is much more complicated with the second condition. We may try to define the relation "more useful" for changes of sets of commodities by interviewing. This is a method for measuring utility suggested by Prof. FRISCH. But if we want to decide the question by mere objective observation, it is not sure whether we shall find a way to do this or not. This is a problem not yet resolved, but I hope that it will be resolved positively within a short time.

If the conditions I) and II) are satisfied, the other conditions can be controlled experimentally.

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORETISCHE METHODEN ZUR UNTERSUCHUNG STATISTISCHER ZEITREIHEN

Von CARL BOEHM, Berlin.

Eine Untersuchung statistischer Zeitreihen, wie sie z. B. in der Wirtschaftsstatistik anfallen, kann in der Regel nicht von der Annahme ausgehen, daß die Beobachtungswerte eine Stichprobe aus *einem* unveränderlichen Kollektiv sind, sondern daß zu jedem (oder zu mehreren aufeinanderfolgenden) Wert ein eigenes Kollektiv gehört. Welche Zusammenhänge sind zwischen diesen Kollektiven möglich? Wie kann ein bestimmter empirisch festgestellt werden?

LEXIS hat als erster statistische Zeitreihen in diesem Sinne untersucht. Seine Tests geben an, ob ein Beobachtungsmaterial als Stichprobe aus mehreren aufeinanderfolgenden Kollektiven ($3x$) betrachtet werden kann. Sie versagen in 2 wichtigen Fällen:

a) wenn — wie z. B. bei der Verkettung und der Nachwirkung — für jede einzelne Beobachtung zunächst eine Reihe von Kollektiven zur Verfügung stehen, aus denen eins aus Grund des (oder der) *vorhergehenden Beobachtungswertes* ausgewählt wird;

b) wenn — wie z. B. bei der Ansteckung — nicht nur wie im Falle a) der vorhergehenden Wert, sondern auch die *Stelle* in der Zeitreihe für die Auswahl entscheidend ist, m. a. W. eine Kombination Lexischer Reihen und denen vom Typ a) vorliegt.

Tests für die Feststellung eines Zusammenhangs vom Typ a) lassen sich leicht analog wie bei Lexis angeben: man hat die Beobachtungen zusammenzufassen, die denselben Wert als Vorgänger haben, und dann zu prüfen, ob diese als Stichproben aus dem durch die Zeitreihe bestimmten Kollektiv aufgefaßt werden können.[1]

Eindeutige Tests für den Fall b) gibt es nur in besonderen Fällen, in der Regel nicht.

Die drei hier genannten Zusammenhänge: Lexische Reihen, Reihen vom Typ a) und b) erfassen alle bisher bekannten und möglichen Kollektivzusammenhänge.

---

[1] Wird so festgestellt, daß ein Zusammenhang vom Typ a) besteht, so ist durch eine Reihe weiterer Tests zu prüfen, welcher besonderer (z. B. Nachwirkung . . .) vorliegt; die Konstruktion dieser Tests bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

Für die praktische Statistik, in deren Mittelpunkt das Stichprobenproblem steht, ergibt sich hieraus ein System statistischer Hypothesen, deren Wahrscheinlichkeit im konkreten Falle zu bestimmen ist. Damit werden die statistischen Zeitreihen einer konsequenten wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchung zugänglich und — darüber hinaus — erhalten die wichtigen Begriffe der Zeitreihenzerlegung, wie z. B. der Trend, einen exakten mathematischen Inhalt.

SEQUENCES WITH AFTER-EFFECT

By Arthur H. Copeland, Michigan, U. S. A.

A general method of constructing sequences with prescribed frequency properties is developed in this paper. The method can be applied to many of the modern probability systems concerned with modifications of the Kollektiv of von Mises. The fundamental concepts employed are defined by Kolmogoroff in his axiomatic treatment of probability. Thus we consider a space S and an associated field F of subsets of S. We assume that there is given a probability distribution function $\pi(A)$ whose range is F. We depart from the procedure of Kolmogoroff in that we introduce sequences whose terms are elements of S. We require that each sequence be so constructed that for every set A of F the limit of the success ratio with respect to A and the sequence shall be $\pi(A)$.

In order to make possible the construction of such sequences we impose certain conditions on F. A field satisfying these conditions is called a probability field. If we restrict ourselves to probability fields, we still retain a high degree of generality as may be seen from the following result. If φ is any real numerical function defined over an arbitrary space and if φ is measurable with respect to an arbitrary distribution function π defined over an arbitrary field, then φ will remain measurable with respect to π after the range of π has been restricted to a properly determined probability field. Integrals of such functions — in fact, of somewhat more general functions — are defined as limits of averages of terms of sequences. An existence proof is also given.

In addition to prescribing the distribution function of a sequence we prescribe the distribution function for certain sub-sequences formed by selections. Thus we can construct the sub-sequence consisting of all those terms whose immediate predecessors lie in a given set A of F. A more general selection of this type can be constructed in terms of a finite group of predecessors. When the distribution of the sub-sequence obtained by such a selection differs from that of the original, the original sequence is said to have after-effect (Reichenbach). In addition to selections according to predecessors we consider periodic selections. We show that sequences can be constructed possessing prescribed distributions and after-effects which are invariant under the operations of all periodic selections.

SUR QUELQUES IDÉES MODERNES EN THÉORIE DES PROBABILITÉS

Par M. Fréchet, Paris.

Je rapelle que, dans l'intéressant rapport de M. von Mises[1] au Congrès de Zürich, l'auteur considérait comme à peu près généralement reconnues l'importance de la notion de collectif, l'utilité de l'emploi de la fonction des probabilités totales (ou de répartition), la claire limitation des problèmes de probabilité aux relations entre les lois des probabilités totales.

Il ne me parait pas possible de me rallier entièrement à cette opinion. D'une part, si les fonctions des probabilités totales sont utiles, elles ne sont que l'un des moyens dont peut se servir le Calcul des Probabilités pour réaliser son but: l'étude des variables aléatoires. D'autre part la notion de collectif a été avancée pour préciser une nouvelle définition de de la probabilité qui est loin d'avoir recueilli l'adhésion de tous les « probabilistes ».

Enfin, d'autres notions, d'autres méthodes nous paraissent mieux caractériser l'évolution moderne du Calcul des Probabilités; telles sont la méthode des fonctions arbitraires de Poincaré, la notion d'événements en chaîne de Markoff, les probabilités dénombrables de M. Borel, (à l'étude de laquelle M. von Mises, lui-même, a brillament contribué), les diverses définitions de la convergence: d'ordre r, en probabilité, presque certaine, etc. d'une suite de variables aléatoires.

Nous développerons ailleurs les raisons à l'appui des affirmations précédentes.

---

[1] Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Verh. Int. Mat. Kongr. Zürich, 1932, Zweiter Band, p. 221.

PRICE INDEX COMPARISONS BETWEEN STRUCTURALLY DIFFERENT MARKETS

By Ragnar Frisch, Oslo.

An important problem in economics is to compare the *price of living* (the price level of consumption goods) in two different places or in two different points of time. The most usual formula expressing the price of living in the situation 1 relative to that of the situation 0 is

$$(1) \qquad P_{01} = \frac{q^1 p_1^1 + q^2 p_1^2 + \cdots + q^N p_1^N}{q^1 p_0^1 + q^2 p_0^2 + \cdots + q^N p_0^N} = \frac{\Sigma q p_1}{\Sigma q p_0}$$

where q stand for physical quantities and p for prices, and the various commodities and services — N in number — are denoted by superscripts.

The quantities q in (1) are assumed the *same* in both situations. The difficulty is that in fact the quantities consumed by a typical individual or household are *not* the same in the two situations. They will even as a rule change just because of the price change that it is wanted to study. But (1) would loose its meaning as a *price* concept if the q's were made to reflect the actual change in quantities.

To get around this difficulty one may proceed as follows: Assume an *indicator*, i. e., a function $I(q^1 \cdots q^N)$ or shorter $I(q)$ such that if the typical individual has the choice between any two quantity combinations q_0 and q_1, then $I(q_0)$ will be $\gtreqless I(q_1)$ accordingly as q_0 is equivalent to, preferred to or given up for q_1. Obviously a function $\bar{I}$, obtained by an arbitrary monotonically increasing transformation of I, will also be an indicator. If the indicator has certain convexity properties, the individual in the situation 0 will move along a certain *expansion-path* in the $(q^1 \cdots q^N)$ space as his income increases. Similarly a path, corresponding to the situation 1. Along the 0-path we consider ϱ_0 as a function $\varrho_0(I)$. Similarly $\varrho_1(I)$. We define *equivalence* of ϱ_0 and ϱ_1 by requiring that they correspond to the same value of I. Accordingly

$$(2) \qquad P_{01} = \frac{\varrho_1(I)}{\varrho_0(I)}$$

will be the price index sought. In general it will depend on I, if not, we have *expenditure proportionality*. In this case the poor and the rich need to have their incomes multiplied by the *same* number in order to be just as well off in situation 1 as in 0. Satisfactory approximation methods of computing (2) exist when data regarding the two paths are given. (One such method is my "double expenditure" method.)

If not only the quantities consumed, but even the *description* of the commodities are different in the two situations, we have *structurally different* markets. A method of comparison, applicable to this general case, ought of course also to furnish the correct solution (2), if applied to the case where (2) has a meaning. The line of attack will therefore be to consider this simple case, but try here to determine equivalence by a principle which in its final form does not involve neither quantities nor the values of I. For economic reasons it seems appropriate to consider the function

$$\theta_t = 1 - \frac{dE}{dI} \tag{3}$$

where $E = q^1 \frac{\partial I}{\partial q^1} + \cdots + q^N \frac{\partial I}{\partial q^N}$, the differential in (3) being taken along the path t. θ is invariant for a linear transformation of I, the only transformation admissible if we assume *independence*, i. e., assume that $I = J + K$, J depending on some of the q's and K of the others. This assumption is economically plausible. On this assumption I have developped statistical methods of computing θ, using data regarding the paths. Actual computations have been made by authors in different countries. Therefore θ may be looked upon as observable. θ is a pure number, independent of the nature of the commodities.

If ϱ_0 and ϱ_1 are equivalent in the sense defined, they satisfy the differential equation

$$(1-\theta_0) = (1-\theta_t)\frac{d \log \varrho_t}{d \log \varrho_0} + \frac{d \log \dfrac{d \log \varrho_t}{d \log \varrho_0}}{d \log \varrho_0}. \tag{4}$$

(4) can be solved explicitly, but for the present purpose is taken as it stands. If we have expenditure proportionality, (4) reduces to $\theta_0(\varrho_0) = \theta_1(\varrho_1)$. Economically this seems plausible a first approximation. Starting with this, a correction may be computed using (4). And the process may be iterated. So far I cannot give general criteria for whether the process converges towards a definite functional relationship between ϱ_0 and ϱ_t, and if so which one of the solutions of (4) that is obtained. Numerical examples tend to show, however, that if the indicator fulfills certain conditions (convexity etc.) that are economically plausible, at least a semi-convergence towards the correct solution — i. e., ϱ_0 *equivalent* to ϱ_t — is obtained.

ÜBER DIE BERECHNUNG DER WAHRSCHEINLICHKEITEN UNABHÄNGIGER ORDNUNGEN AUS DEN BEOBACHTUNGSZAHLEN

Von Arthur Linder, Bern.

Insolera hat gezeigt (Atti Accad. sc. Torino, LXII, 1926—27, S. 611—19), daß die Bestimmung der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit q bei Störung des Bestandes infolge von Ein- und Austritten auf die Integralgleichung

$$\int_0^z d(t)\,dt = l_0\, q(0,z) + \int_0^z r(t)\, q(t,z)\,dt \tag{1}$$

führt, wobei d die Zahl der Todesfälle, r die Mehreintritte und l_0 den Anfangsbestand bezeichnet.

Eine Lösung von (1) ist von Insolera für den Fall des linearen Verlaufs von d und r angegeben worden.

Für beliebigen Verlauf der Todesfälle und der Ein- und Austritte läßt sich eine praktisch gut verwendbare Formel bestimmen, wenn man (1) als Summengleichung anschreibt. Man erhält dann als Lösung

$$q = 1 - \prod_{t=1}^{z}\left(1 - \frac{d_t}{l_0 + \sum_{i=1}^{t-1}(r_i - d_i)}\right). \tag{2}$$

(Mitt. Vereinigung schweiz. Vers.-math., 30. Heft, S. 35—52.)

SECTION V

Physique mathématique, astronomie et géophysique

ÜBER DAS VERHÄLTNIS VON GEOMETRIE UND PHYSIK

Von D. van Dantzig, Delft.

Man hat bisher immer den Standpunkt eingenommen, daß die Geometrie der Physik gegenüber als das Primäre anzusehen ist. So beruhen die Newtonsche Physik und Dynamik wesentlich auf der Gültigkeit der Euklidischen Geometrie. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird diese zwar durch eine allgemeinere (nämlich Riemannsche) Geometrie ersetzt; diese ist aber in noch höherem Maße Voraussetzung für die Physik, indem jetzt die Gravitationserscheinungen als Äußerungen der *geometrischen* Struktur der Welt betrachtet werden. Seitdem haben viele Forscher versucht noch allgemeinere Geometrien aufzubauen, die in derselben Weise die elektromagnetischen und quantenmechanischen Erscheinungen zu „geometrisieren" gestatten sollten.

Demgegenüber wird hier die völlig diametrale Auffassung vertreten, daß sich ein beträchtlich geschlosseneres Naturbild ergibt, wenn man die Geometrie als *sekundär* gegenüber der Elektrodynamik und Quantenmechanik betrachtet. Prinzipiell läßt sich ja *jeder* Teil der Physik durch Generalisierung, sei es mit axiomatischen oder mit analytischen Methoden unabhängig von der Erfahrung machen und zu einer rein mathematischen Disziplin umgestalten, so daß es keinen triftigen Grund gibt, die Geometrie zur Mathematik, die Optik, Elektrodynamik u. s. w. dagegen zur Physik zu rechnen. Überdies sind die Objekte der physikalischen Geometrie äußerst komplizierte Gebilde, indem nämlich der starre Körper und sogar der Lichtkegel erst durch das zusammenwirken von unzähligen materiellen Teilchen bzw. Photonen zustande kommt.

Die Vermutung erscheint demnach berechtigt, man könne in einer ähnlichen Weise die Geometrie aus der Mikrophysik erhalten, wie die klassische aus der kinetischen Gastheorie entsteht, indem man nämlich die *Entfernung* als eine gewisse Funktion von Wechselwirkungsgrößen ausdrückt. Zur Lösung dieser Aufgabe wird es jedenfalls nötig sein, die fundamentalen physikalischen Theorien unabhängig von irgendeinem Entfernungsbegriff darzustellen. Dies ist überdies aus einem anderen Grunde besonders erwünscht, indem es nämlich durchaus fraglich ist, ob der Begriff der Entfernung (oder des Winkels) im Intra-atomären noch einen wohlbestimmten Sinn hat.

Vorerst läßt sich diese Aufgabe für die klassische Mechanik und Elektrodynamik durchführen. Für die Rechnungen und sonstigen Einzelheiten muß auf eine Reihe von Arbeiten des Verfassers verwiesen werden.[1] Es stellt sich heraus, daß die für die Elimination der Metrik erforderliche Unterscheidung zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren und ihre geometrische Deutung schon für die elementare Mechanik und Physik eine Vereinfachung und Klärung bedeutet („Normale“ Reaktionskraft bei Berührung glatter Flächen, Stetigkeit der „normalen“ bzw. „tangentiellen“ Komponenten bei trennenden Flächen, u.s.w.).

Wichtig dabei ist es, daß die Maxwellschen *Differential*-gleichungen einigermaßen in den Hintergrund treten, während die *Integral*-gleichungen vom Typus der Gleichung der retardierten Potentiale an Bedeutung gewinnen. Letztere wird dabei unter Abstraktion von der speziellen metrischen Gestalt des Integralkernes in der Form

$$\varphi_i = \int \gamma_{ik'}\, \mathfrak{s}^{k'}\, d\Sigma' \tag{1}$$

angesetzt, wo $\gamma_{ik'}(P, P')$ von zwei Weltpunkten P, P' abhängt, $\mathfrak{s}^{k'}$ die Stromvektordichte in P' und $d\Sigma'$ das vierdimensionale Volumelement in P' bedeutet.

Auch das Plancksche Gesetz läßt sich unabhängig von der Metrik formulieren, wobei es überdies zum ersten Male in invarianter Gestalt erscheint.[2]

Schließlich stellt sich heraus, daß dasselbe auch für die Quantenelektrodynamik eines Hohlraumes gilt. Die invariante Formulierung und Generalisierung des üblichen Ansatzes führt dazu, die $\gamma_{ik'}$ in der Gestalt

$$\gamma_{ik'}(P, P') = \overset{r}{\varphi}_i(P)\, \underset{r}{\varphi}_{k'}(P') \tag{2}$$

anzusetzten, wo die $\overset{r}{\varphi}_i$ bzw. $\underset{r}{\varphi}_i$ retardierte bzw. avanzierte Potentiale sind, und die Überschiebung über r zwar eine Integration bedeutet, sich aber als mathematische Idealisierung einer Summation über eine endliche aber

---

[1] D. van Dantzig, The fundamental equations of electromagnetism, independent of metrical geometry, Cambridge, Transactions Phil. Soc. *30* (1934) 421—427; Electromagnetism independent of metrical geometry. 1. The foundations; 2. Variational principles and further generalisation of the theory; 3. Mass and motion; 4. Momentum and energy; waves; 5. Quantum-theoretical commutability relations for light-waves, Amsterdam, Proc. Kon. Ak. *37* (1934) 521—525; 526—531; 643—652; 825—836; *39* (1936) 126—131.

[2] Die übliche Formulierung $p_i = \hbar \varkappa_i$ (p_i = Impuls-Energievektor, $\varkappa_i$ = Wellenvektor) ist nämlich (außer für materielle Punkte oder in der *speziellen* Relativitätstheorie) nicht invariant, weil die zur Erhaltung der *gesamten* Impuls-Energie erforderliche Integration kein invarianter Prozeß ist.

sehr große Anzahl von Partikeln auffassen läßt. Weil andererseits wenigstens in der speziellen Relativitätstheorie (bis auf einen ***konstanten*** Faktor)

$$g_{ik} = \lim_{P \to P'} \lambda \gamma_{ik'}(P, P'), \quad \lambda = \{\det(\gamma_{ik'})\}^{-\frac{1}{4}} \tag{3}$$

gilt, sind durch (2) die $\gamma_{ik'}$ und damit also auch die g_{ik} mittels Wechselwirkungspotentiale ausgedrückt. Obwohl dadurch unsere Hauptaufgabe noch keineswegs gelöst ist, (es sollen nämlich auch die φ_i durch $\overset{r}{\varphi}_i$ ausgedrückt werden, was jedenfalls nicht ohne Quantenmechanik geschehen kann), kann man dies doch wohl als einen partiellen Erfolg der Theorie ansehen.

Die stärkste Stütze aber erhält die Theorie durch folgendes Resultat: Werden jetzt die φ_i als Operatoren aufgefaßt, so sind die einfachsten Vertauschungsrelationen[1] die überhaupt invariant und mit unserer Theorie verträglich sind:

$$[\varphi_i, \varphi_{k'}] = \frac{\hbar c}{i}(\gamma_{ik'} - \gamma_{k'i}). \tag{4}$$

Diese sind aber gerade die richtigen.

THE INVERSE SQUARE LAW OF GRAVITATION

By E. A. Milne, Oxford.

In the substratum or smoothed-out universe

$$n\,dx\,dy\,dz = \frac{B\,t\,dx\,dy\,dz}{c^3\left(t^2 - \frac{\mathbf{P}^2}{c^2}\right)^2}, \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{t}, \tag{1}$$

the equation of motion of a free particle has been shown[2] to be

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -(\mathbf{P} - \mathbf{V}t)\frac{Y}{X}. \tag{2}$$

---

[1] Sie ergeben sich durch Verallgemeinerung der üblichen nicht-invarianten Methode. Dabei treten $\overset{r}{\varphi}_i$, $\underset{r}{\varphi}_i$ an Stelle der Fourier-Komponenten.

[2] *Proc. Roy. Soc.*, 154 A, 22, 1936.

In the presence of the statistical distribution

$$N\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw = \frac{\psi(\xi)}{c^6\, X^{\frac{3}{2}}\, Y^{\frac{5}{2}}}\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw, \tag{3}$$

the equation of motion of a free particle has been shown[1] to be

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = (\mathbf{P} - \mathbf{V}\,t)\frac{Y}{X}\, G(\xi) \tag{4}$$

where

$$G(\xi) = -1 - \frac{C}{(\xi - 1)^{\frac{3}{2}}\, \psi(\xi)} \tag{5}$$

and

$$X = t^2 - \frac{\mathbf{P}^2}{c^2},\quad Y = 1 - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2},\quad Z = t - \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{V}}{c^2}$$

$$\xi = \frac{Z^2}{X\, Y}.$$

Comparison of (2) and (4) shows that the acceleration $\mathbf{g}$ of a free particle in the statistical system may be decomposed as

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$$

where $\mathbf{g}_1$ is the acceleration (2) due to the substratum (1) alone and $\mathbf{g}_2$ or

$$-\frac{C}{(\xi - 1)^{\frac{3}{2}}\, \psi(\xi)}(\mathbf{P} - \mathbf{V}\,t)\,\frac{Y}{X}$$

is accordingly the component of acceleration due to the departure of (3) from the smoothed-out state (1). By choosing $\psi(\xi)$ so as to represent isolated condensations in the substratum, it can be shown that $\mathbf{g}_2$ reduces in the vicinity of a condensation to

$$\mathbf{g}_2 \sim -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\,\frac{C c^3 t}{\psi'(1)},$$

where r is the distance of the free particle from the mean centre of the condensations. This establishes by purely kinematic arguments the inverse square law of gravitation for small distances. The 'constant' of proportionality

[1] *Proc. Roy. Soc.*, 156 A, 62, 1936.

may be written as γm_1, where $\gamma = \frac{c^3 t}{M_1}$, $m_1 = \frac{C M_1}{\psi(1)}$, and M_1 is the mass of the fictitious homogeneous substratum. Thus γ is identical with the 'constant' of gravitation which has previously appeared in the study of the gravitational properties of the substratum alone. The emergence of a constant C, a measure of the mass m_1 of the condensations, not included in the description of the statistical system by counting and light-signalling experiments alone, is equivalent to the isolation of *mass* by kinematic methods.

The dependence of γ on t can be reconciled with Newtonian gravitation, and the present rational dynamics with the empirical Newtonian dynamics, by re-graduating all clocks from t to τ, where

$$\tau = t_0 \log\left(\frac{t}{t_0}\right) + t_0 ,$$

in accordance with a conjecture of de Sitter's. The measures of all physical quantities must be changed correspondingly.[1]

SOME ASTROPHYSICAL PROBLEMS CONCERNING THE SCATTERING OF LIGHT

By W. H. McCREA, London.

This is a preliminary account of a seemingly new type of radiation problem. In problems hitherto discussed the radiation intensity is a function of direction at a point, and of a single coordinate of the point, e.g., its distance from a radiating plane; in the present problems it is a function of more than one spatial coordinate. Such is the case for a point- or line-source of radiation in a plane slab of scattering material, which we proceed to study. I seek here results which can be got without writing down the general equation of transfer.

The astrophysical interest is in regard to a star embedded in nebulosity, or shining through the atmosphere of a companion.

An adaptation of the well known Schuster problem for a plane stratified atmosphere shows that, if a single point-source yielding total flux $4\pi S$ is embedded at optical depth τ_1 from face 1, and τ_2 from face 2, of a plane

[1] Full details in *Proc. Roy. Soc.*, 156 A, 62, 1936 and in *ibid.*, 158 A, 324, 1937; 159 A, 171, 1937.

parallel slab of scattering material of total optical thickness $\tau_1+\tau_2$, then the integrated emergent fluxes over faces 1, 2 are[1]

$$2\pi S\frac{2\tau_2+1}{\tau_1+\tau_2+1} \quad \text{and} \quad 2\pi S\frac{2\tau_1+1}{\tau_1+\tau_2+1}.$$

The next step is to find the distribution of this flux over the surface. I consider here only the case where the medium is uniform, with scattering coefficient σ per unit volume, and fills the region $z \leqq c$. Let the source be at the origin O, and let it produce an emergent flux $Sf(R,c)$ per unit area at a point P of the plane $z=c$, when $OP=R$. Then the amount of *direct* radiation from O scattered in a volume element dv, at a point $Q(r,\vartheta,\varphi)$ in the medium, is $\sigma S e^{-\sigma r}\frac{dv}{r^2}$, so that dv becomes a secondary source having this strength. The flux at P can then be regarded as due immediately to the given source at O, or as due to the totality of these secondary sources together with the residual direct beam from O. The latter is always negligible if the optical thickness σc is sufficiently great. In that case the two ways of expressing the flux at P give

$$f(R,c)=\frac{\sigma}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(QP, c-r\cos\vartheta)\, e^{-\sigma r}\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

The integration should actually be taken over the region $z \leqq c$, but owing to the largeness of σc the region outside say $r=c$ will not contribute appreciably; so the integration is written formally as extending over all space.

A solution of this integral equation is $f(R,c)=\frac{2c}{R^3}$, as can be verified by comparison with a result in potential theory. Also, with this value, the integral of $Sf(R,c)$ over the plane $z=c$ is $4\pi S$, giving the correct total flux. Then the physically necessary boundary conditions for f can be seen to be satisfied. So this appears to be the required solution, though I have not yet proved a uniqueness theorem.

---

[1] Some of the present results were worked out independently, at my suggestion, by my pupil Mr. K. K. Mitra.

THE APPLICATION OF THE DIFFERENTIAL ANALYSER TO THE SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

By D. R. HARTREE, Manchester, England.

Consider the equation of heat conduction in one dimension

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{1}$$

with initial and terminal conditions

$$\theta \text{ given for } t=0, \quad 0 \leqq x \leqq l \tag{2}$$

$$\theta \text{ given for } t>0, \quad x=0 \text{ and } x=l \tag{3}$$

Equation (1) can be replaced approximately by

$$\frac{\theta(t+\delta t) - \theta(t)}{\delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \theta(t+\delta t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial x^2}\right]. \tag{4}$$

If $\theta(t)$ is known as a function of x, this is an ordinary differential equation for $\theta(t+\delta t)$ as a function of x, and is convenient for solution by the differential analyser. $\theta(t)$ is supplied to the machine from an input table, and a graph of the solution $\theta(t+\delta t)$ is drawn on the output table; this forms the input curve for the next step δt, and so on.

The error in any one step δt is of order $(\delta t)^3$, the number of steps required to cover a given range is proportional to $(\delta t)^{-1}$, hence the total error in a given range is proportional to $(\delta t)^2$. If the same range is covered twice over, with two different sizes of step δt, then for any x, t it is possible to extrapolate very closely the result which would be obtained in the limit by covering the same range with steps $\delta t \to 0$, when (4) would reduce to (1).

This process can be applied to other equations, provided that the boundary conditions are similar to (2) and (3), that is, they are specified on an open boundary, not on a closed boundary enclosing the field of integration. It has been applied to the equation

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + e^{\theta}$$

which arises in the theory of the thermal breakdown of insulating materials in alternating electric fields; another important application is to the equations of the boundary layer in hydrodynamics.

THE GEOMETRY OF THE ELECTROMAGNETIC SIX-VECTOR, THE ELECTROMAGNETIC ENERGY TENSOR, THE DIRAC EQUATIONS, AND THE HERTZIAN TENSOR

By H. S. Ruse, Edinburgh.

Let S_3 denote the hyperplane at infinity in the tangent-space T_4 at any particular point (x^i) of the space-time V_4 of general relativity. Any vector X^i at (x^i) defines in S_3 a point of homogeneous coordinates X^i, while the metric tensor g_{ij} defines a quadric Q, namely the section by S_3 of the null hypercone of T_4. The six-vector F_{ij} of electromagnetic field-strength represents in S_3 a linear complex which has in general two lines in common with each regulus of Q, and so defines a skew quadrilateral upon the quadric. The vertices of this quadrilateral correspond to four null vectors of V_4 which define the principal directions both of F_{ij} and of the electromagnetic energy tensor E_{ij}. The latter defines in S_3 another quadric Q' which passes through the same skew quadrilateral. Q and Q' are apolar each way and are self-polar with respect to each other. (The above results have been published in *Proc. London Math. Soc.*, *41* (1936) 302—322.)

A skew quadrilateral upon a quadric likewise forms the geometrical background of Dirac's equations, the vertices of the quadrilateral corresponding in V_4 to four null vectors which are easily definable in terms of two-component spinors. The properties of this quadrilateral in relation to Dirac's equations are of considerable interest, and it can further be shown that *the whole Dirac theory can be expressed in a form not explicitly involving spinors*, but depending instead upon the four null vectors. This result is due in part to E. T. Whittaker.

The so-called Hertzian tensor gives rise to a similar geometrical configuration which has an interesting connection with the tensor formula for the potential of a charged particle in special relativity.

A QUATERNION VIEW OF THE ELECTRON WAVE EQUATION

By A. W. Conway, Dublin.

The Dirac-Eddington matrices E_α, $E_\beta \cdots$

$$(E_\alpha^2 = E_\beta^2 = \cdots 1\,;\ E_\beta E_\gamma + E_\gamma E_\beta = 0,\ \beta \neq \gamma)$$

from a quaternion point of view, are to be regarded as linear functions of a quaternion which in their simplest form consist of a quaternion pre-factor and a quaternion post-factor; e. g. if $E = a(\quad)b$ and $E' = a'(\quad)b'$, then $EE' = aa'(\quad)b'b$ and $E'E = a'a(\quad)bb'$. In order to have $EE' + E'E = 0$ it is simply necessary to have one pair a, a' commuting and the other pair b, b' anti-commuting. Taking the Hamiltonian unit vectors α, β, γ which obey the laws $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1$, $\beta\gamma + \gamma\beta = 0$ etc., together with the scalar imaginary i for which $i^2 = -1$, $i\alpha = \alpha i, \cdots$ for (a, a') we can choose the pairs (i, i), (i, α), (α, α) and for (b, b') $(\beta\gamma)$, we can note that all the following functions have their squares equal to unity:

$$\begin{array}{lll}
i(\quad)\alpha, & i(\quad)\beta, & i(\quad)\gamma, \\
\alpha(\quad)i, & \beta(\quad)i, & \gamma(\quad)i, \\
\alpha(\quad)\alpha, & \alpha(\quad)\beta, & \alpha(\quad)\gamma, \\
\beta(\quad)\alpha, & \beta(\quad)\beta, & \beta(\quad)\gamma, \\
\gamma(\quad)\alpha, & \gamma(\quad)\beta, & \gamma(\quad)\gamma,
\end{array}$$

and from the principles above we can at once pick out anti-commuting sets of five, such as:

$$i(\quad)\alpha, \qquad i(\quad)\beta, \qquad \alpha(\quad)\gamma, \qquad \beta(\quad)\gamma, \qquad \gamma(\quad)\gamma.$$

The work of combining the different matrices is thus reduced to a minimum, the results being moreover at every stage visible. A corresponding simplification arises in the Lorentz and other transformations.

ÜBER ELEKTRISCHE DRAHTWELLEN

Von F. NOETHER, Tomsk.

In der Theorie des Baues von Antennen spielt eine Rolle die Frage, wie sich elektrische Wellen längs eines Drahtes ausbreiten, wenn die Energiequelle in einem Punkt des Drahtes konzentriert ist.[1] Ein Teil der Energie wird unmittelbar von der Quelle in den Raum ausstrahlen; als Nutzenenergie ist aber nur der Teil anzusehen, der sich in Form von Oberflächenwellen längs des Drahtes fortpflanzt.

Um die Verhältnisse möglichst klar zu stellen, wurde als Energiequelle eine ringförmige Spule angenommen, die den Draht umschließt, und die einen primären magnetischen Wechselfluß erzeugt. Diesen kann man sich als eine den Draht umschließende Kreislinie vorstellen.

Ist $y=z=0$ die Axe des Drahtes, ϱ der Radius des in der Ebene $x=0$ gelegenen Magnetflusses Φ, so erhält man zunächst das primäre Feld dieses Magnetflusses in der Form einer Integraldarstellung, die für $r=\sqrt{x^2+y^2}<\varrho$ gültig ist. Sie gibt den magnetischen Hertzschen Vektor des Feldes, ein Vektor, der selbst überall auf Kreisen um die Drahtachse verläuft und die Gestalt hat:

$$\Pi_1 = \Phi \pi \varrho \int_{-\infty}^{+\infty} H_1^{(1)}\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,\varrho\right) I_1\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\right) e^{i\lambda z}\, d\lambda .$$

(Hierin ist $k^2=\frac{\omega^2}{c^2}$ die Wellenkonstante bei der gegebenen Frequenz ω; das Integral ist, unter Umgehung der beiden Verzweigungspunkte $\lambda=\pm k$ in verschiedenem Sinn, längs der reellen Achse zu führen).

An der Drahtoberfläche sind nun noch die Randbedingungen des elektromagnetischen Feldes zu erfüllen, d. h. Stetigkeit der tangentialen elektrischen und magnetischen Feldkomponenten zu fordern. Damit erhält man für den Hertzschen Vektor des sekundären Feldes folgende Darstellung, die im ganzen Außengebiet des Leiters gilt:

$$\Pi_2 = \Phi \pi \varrho \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) H_1^{(1)}\left(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r\right) e^{i\lambda z}\, d\lambda ,$$

mit

$$g(\lambda) = H_1^{(1)}(\mu \varrho)\,\frac{k_\sigma^2 \mu I_0(\mu a) I_1(\mu_\sigma a) - k^2 \mu_\sigma I_1(\mu a) I_0(\mu_\sigma a)}{k^2 \mu_\sigma H_1^{(1)}(\mu a) I_0(\mu_\sigma a) - k_\sigma^2 \mu H_0^{(1)}(\mu a) I_1(\mu_\sigma a)}$$

wobei

$$\mu = \sqrt{k^2-\lambda^2},\quad \mu_\sigma = \sqrt{k_\sigma^2-\lambda^2},$$

[1] Vgl. W. KESSENICH, Journ. f. exper. und theor. Physik (russisch), *2* 308, 1932.

und

$$k_\sigma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + 4\pi i \omega \sigma$$

die Wellenkonstante im Innern des Leiters von der Leitfähigkeit σ bedeutet, ferner a den Drahtradius.

Bemerkenswert ist an dieser Darstellung insbesondere der Nenner der Funktion $g(\lambda)$ im Integranden. Sein Verschwinden würde die Konstante λ_0 bestimmen, die den freien Drahtwellen entspricht, und die erstmals von A. Sommerfeld näher untersucht wurde.[1] Damit wird die vorliegende Frage in enge Verbindung mit der bekannten Sommerfeldschen Theorie für die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie über der Erde gebracht. Würde nämlich der Drahtradius a als unendlich im Vergleich zur Wellenlänge angenommen, so läge eine der Sommerfeldschen Aufgabe analoge, (nur mit veränderter Form der Quelle), vor. Zum Zwecke der Berechnung des Integrals muß man den Integrationsweg in der komplexen λ-Ebene über den Sattelpunkt verlegen, der an der Stelle $\lambda = k \sin \vartheta$, mit $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{z}{r}$, liegt. Dabei spielt in dem angenommenen Falle $a = \infty$ der genannte Pol des Integranden keine Rolle, vielmehr berechnet sich das Integral in genügender Entfernung allein durch seinen Sattelpunktswert. Das ergibt eine Ausbreitung in reiner Raumwellenform, wobei die Amplitude noch von der Vertikalerhebung ϑ abhängig erscheint.

Anders liegen die Verhältnisse in dem uns interessierenden Falle, in dem der Drahtradius als klein im Vergleich zur Wellenlänge anzunehmen ist. In diesem Falle liegt der Pol des Integranden so, daß bei der Verlegung des Integrationswegs über den Sattelpunkt außerdem noch ein Residuenintegral zu berücksichtigen ist. Das bedeutet, daß ein bestimmter Teil der Energie in Form von Oberflächenwellen sich längs des Drahtes ausbreitet. Mit wachsender Entfernung überwiegt dieser Teil immer mehr über den Raumwellenbestandteil und übernimmt daher den ausschlaggebenden Teil der Energie. Dieser Unterschied zwischen dem Fall der drahtlosen Telegraphie und dem der Drahtwellen ist charakteristisch.

Eine ganz verwandte Aufgabe liegt vor, wenn die Konstanten des Leiters sich an einer Stelle unstetig ändern, z. B. bei Übergang von einer Freileitung in ein Kabel. Auch von dieser Stelle aus müssen sich zunächst Raumwellen ausbreiten, die teilweise wieder in Drahtwellen übergehen werden. Eine ausführlichere Mitteilung hierüber wird in einer sowjetrussischen Zeitschrift erscheinen.[2]

---

[1] S. Frank-Mises, Differentialgleichungen der Physik, Bd. II, Kap. XXII.

[2] S. auch F. Noether, Physikal. Ztschr. d. Sowjetunion, Bd. 8, 1935.

THE MECHANICAL INSTABILITY OF THE CRYSTAL LATTICE

By J. H. C. Thompson, Oxford.

Various experimental results have suggested that in "real" crystals the atoms (or ions) are not on a perfectly regular lattice ("ideal" crystal), and there are theories which claim to show that the ideal crystal is not a stable configuration. These theories are based on a statical treatment; the atoms (or ions) are supposed to be at rest at their assigned positions on the lattice, whereas they are in motion with the thermal energy of the crystal.

Instability of a configuration must mean that the atoms are not vibrating about their equilibrium positions, but are moving away from them; and this can only be investigated by a thorough study of the dynamics of a crystal lattice.

The dynamics of a polar crystal is worked out to consider the three questions: —

(1) Is the unstrained configuration of an ideal crystal stable?

(2) If an ideal crystal is strained, when does it become unstable?

(3) Does the ideal crystal become unstable before the theoretical breaking point, and invalidate the theoretical calculation of breaking stress?

In a strained ideal crystal of alkali-halide type, containing N^3 cells (N large), the dynamics can be described by means of $6N^3$ normal frequencies

$$\omega_1^2 = f_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, e),\ \omega_2^2 \cdots\cdots,\ \omega_6^2 = f_6(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, e).$$

Here e is the strain tensor, and

$$\varphi_1 = \frac{2\pi r}{N},\ \varphi_2 = \frac{2\pi s}{N},\ \varphi_3 = \frac{2\pi t}{N}\ \ (r, s, t = 1, 2, \cdots N).$$

The variation of ω^2 with $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ gives the *spectrum* of normal frequencies. These functions can be calculated, though their evaluation is complicated. The configuration is unstable if any ω^2 becomes negative.

Results of preliminary calculations for *NaCl* (using an approximate expression for the "repulsive" forces) are: —

(1) $e = 0$. The spectrum of normal frequencies has not been completely examined, but no negative value of ω^2 has been found.

(2) Dilatational strains only have been investigated. At a linear strain of about 5 % it is found that, for $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \pi$, two pairs of *equal* ω^2 become negative. The corresponding unstable motion of the ions is confined to

the axial planes (1, 0, 0). In these planes the motion is completely random. (It is possible that for still lower strains, ω^2 becomes negative for other values of φ_1, φ_2, φ_3.)

(3) Using the same assumptions concerning the forces, the breaking point for $NaCl$ is at a linear strain of about 20 %, which is greater than the elastic limit found in (2).

RESULTS OF CALCULATIONS OF ASYMPTOTIC TRAJECTORIES IN THE FIELD OF A MAGNETIC DIPOLE WITH APPLICATIONS TO COSMIC RADIATION

By M. S. VALLARTA, Cambridge, Mass.

Published under the title "On the Allowed Cone of Cosmic Radiation", by G. Lemaitre and M. S. Vallarta, in the Physical Review, Vol. 50, p. 493, Septbr. 15, 1936.

LES ESSAIS EXPÉRIMENTAUX DU CALCUL D'UN RADIANT DU COURANT MÉTÉORIQUE DES TRAJETS OBSERVÉS

Par JINDŘICH SVOBODA, Praha.

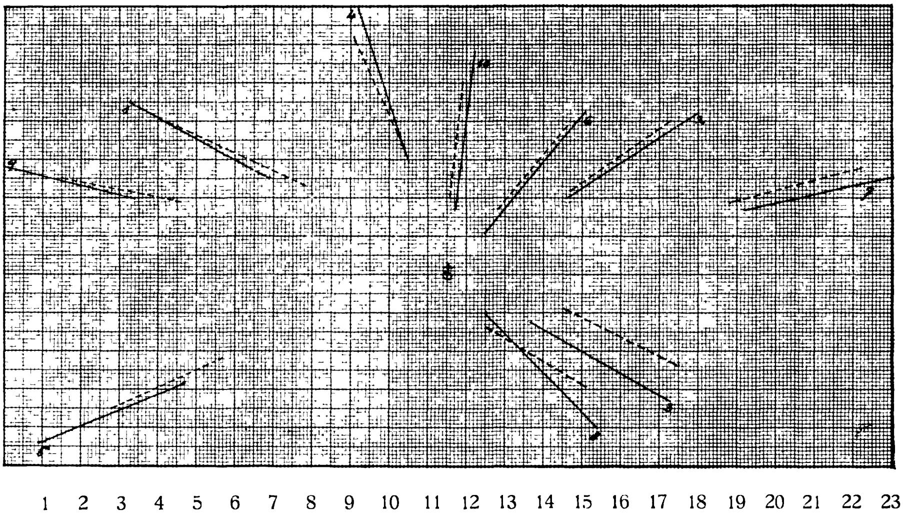
Pour étudier les méthodes du calcul d'un radiant de l'observation des météores j'ai fait les expériences sur un météore artificiel. C'est pour cela que j'ai fait installer un appareil qui me permet en outre aussi des études sur les dessins des météores.

J'ai observé en tout cent météores distribués dans dix groupes égaux. La figure ci-jointe montre les observations du groupe no. 4. Des trajets dessinés de chaque groupe j'ai calculé le radiant par trois méthodes:

I. Soit minimum la somme des carrés des distances du radiant calculé des droits qui font une prolongation des trajets dessinés.

II. Soit minimum la somme des carrés des angles, des quels on doit tourner les droits autour du centre de chaque trajet dessiné pour les droites passer le radiant calculé.

III. Soit minimum la somme des carrés des distances et des angles.



+ Les observations du groupe no. 4. ——— trajets vrais

☉ radiant vrai - - - - trajets observés

Le radiant vrai a eu les coordonnées $x = 11{,}5°$, $y = 5{,}0°$. Les essais expérimentaux ont donné les resultats suivants:

Groupe	I		II		III	
	x	y	x	y	x	y
1	12,06°	5,04°	12,36°	4,93°	12,07°	4,96°
2	11,03	5,35	11,15	5,17	11,02	5,35
3	11,60	5,50	11,58	5,53	11,60	5,50
4	11,54	5,22	11 50	4,95	11,05	5,35
5	11,38	5,54	11,36	5,25	11,41	5,52
6	11,53	4,90	11,40	4,70	11,52	4,89
7	11,33	4,72	11,37	4,78	11,45	4,71
8	11,43	5,62	11,30	5,00	11,42	5,60
9	11,39	4,99	11,47	4,98	11,38	5,00
10	11,35	4,96	11,44	5,13	11,36	5,03
Moyenne	11,46	5,18	11,49	5,04	11,43	5,19
$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{m-1}}$.	± 0,26	± 0,31	± 0,33	± 0,24	± 0,30	± 0,31
$\pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.....	± 0,08	± 0,10	± 0,10	± 0,08	± 0,09	± 0,10

On voit que la méthode II. donne les meilleurs résultats. Elle semble donc la plus favorable pour la détermination du radiant.

SUR L'ÉGALITÉ DE LA MASSE INERTE ET DE LA MASSE PESANTE

Par Z. Horák, Praha.

L'égalité exacte et générale de la masse inerte et de la masse pesante constitue la base du principe d'équivalence et de la théorie de la gravitation d'Einstein. Cette égalité a été confirmée, pour divers corps terrestres, par les expériences connues d'Eötvös avec une précision à 10^{-8} près. Par cette communication, je veux signaler que les observations astronomiques suffisent bien pour démontrer la dite égalité, ce que je me propose de faire voir comme il suit.

1°. L'existence de la masse inerte et de la masse pesante peut être motivée, en tenant compte de l'évolution du système solaire, à savoir du fait que les planètes à l'état primitif — gazeux ou liquide — ont gardé leur forme sensiblement sphérique. Considérons, pour fixer les idées, la Terre et admettons que le rapport

$$\mu = \frac{\text{masse inerte}}{\text{masse pesante}}$$

ne soit pas le même pour toutes les particules constituant la Terre. Alors, le Soleil, les autres planètes ainsi que la Terre elle-même ne donneraient pas à toutes ces particules les mêmes accélérations. Or, il est absolument certain que la Terre s'est trouvée dans l'état gazeux ou liquide pendant une durée assez longue, de sorte qu'elle commencerait, dans ces conditions, à se déformer et finirait par une désintégration. Donc de l'existence même des planètes, il faut tirer la conclusion nécessaire que les rapports μ sont — au moins pour toutes les masses formant une même planète — égaux entre eux.

2°. Cependant, les valeurs du rapport μ pourraient différer pour diverses planètes. Cela admis, les accélérations, qu'éprouveraient les diverses planètes, ne seraient pas inversement proportionnelles aux carrés de leurs distances au Soleil ce qui se manifesterait par différentes valeurs de la constante de gravitation qui ne serait plus une constante universelle. Donc la constance du rapport μ pour toutes les planètes du système solaire est garantie avec la même précision que celle de la constante de gravitation. Il faut en déduire que la valeur de μ est la même pour toutes les planètes, ce qu'on peut d'ailleurs regarder comme conséquence du fait qu'elles sont de même composition chimique.

3°. Pour un solide formé de corps dont les rapports μ diffèrent, il faut distinguer le centre de masse (inerte) et le centre de gravitation qui ne se confondent pas en général. Alors, un champ homogène de gravitation pourrait changer le moment (relatif au centre de masse) de la quantité de mouvement d'un tel solide. Donc la rotation uniforme de la Terre conduit à la conclusion que μ est le même pour tous les corps terrestres et l'on retrouve ainsi le résultat obtenu dans le n° 1°.

LIMITATIONS ON THE BEHAVIOUR OF AN EXPANDING UNIVERSE

By J. L. Synge, Toronto.

In the theory of the expanding universe there are only two independent field equations but there are three dependent variables, — curvature, pressure and density. An additional "equation of state" is required to make the problem mathematically definite. Various equations of state have been proposed, but a more general method has been given by H. P. Robertson (Reviews of Modern Physics, 5 (1933), 72), in which only "inequalities of state" are used, e. g. the pressure p and the density ϱ are assumed to be positive. In the present paper the argument is based on the inequalities $p \geqq 0$, $\varrho \geqq 0$, $p \leqq \frac{\varrho}{3}$. A systematic treatment is developed.

Starting from the fundamental form $R^2 d\sigma_0^2 - dt^2$, where $d\sigma_0$ is the line-element of a space of constant curvature K_0 and R a function of the time, and putting $x = R^2$, $y = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2$, the field equations become

$$\varkappa p = -2\frac{dy}{dx} - \frac{y - \lambda x + K_0}{x},$$

$$\frac{1}{3}\varkappa\varrho = \frac{y - \frac{1}{3}\lambda x + K_0}{x},$$

$$\left(\varkappa = \frac{8\pi G}{c^2}\right),$$

λ being the cosmological constant. By virtue of the inequalities of state we have

$$y - \frac{1}{3}\lambda x + K_0 \geqq 0,$$

$$-\frac{y - \lambda x + K_0}{2x} \geqq \frac{dy}{dx} \geqq -\frac{y - \frac{2}{3}\lambda x + K_0}{x}.$$

Taking x, y as rectangular Cartesian coordinates in a "phase-plane" of the universe, in which the history of the universe will be represented by a curve, we find from the preceding inequalities that the slope of the phase-line of the universe at any phase-point is greater than that of the "guiding hyperbola" through the point and less than that of the "guiding cubic", the guiding hyperbolas being the curves

$$x\left(y - \frac{1}{3}\lambda x + K_0\right) = \text{const.},$$

and the guiding cubics

$$x^{\frac{1}{2}}\left(y - \frac{1}{3}\lambda x + K_0\right) = \text{const.}$$

Consideration is given to all the nine cases $K_0 >, =, < 0$, $\lambda >, =, < 0$, but chiefly to $K_0 > 0$, $\lambda > 0$. In this case the guiding curves of particular interest are those which touch the x-axis. These curves divide the possible region of the phase-plane into six regions. If the present phase-point lies in certain of these regions, it is possible to make general statements concerning the past and future history of the universe.

The details of the work have been published in Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, 30 (1936), 165—178.

SUR LA VITESSE RADIALE DES NÉBULEUSES EXTRA-GALACTIQUES

Par P. Drumaux, Gand.

Il est possible d'expliquer la vitesse radiale des nébuleuses sans recourir à la notion d'Univers ni à l'hypothèse d'une expansion de l'Univers.[1] La loi régissant cette vitesse radiale peut être déduite directement des équations de la gravitation d'Einstein. La relativité généralisée suffit à résoudre le problème.

Pour le montrer nous nous appuyerons sur les remarques suivantes:

1°) La vitesse radiale en question est essentiellement une vitesse relative des nébuleuses extra-galactiques par rapport au système stellaire dont nous faisons partie, à savoir la voie lactée.

2°) Ce système peut être considéré comme étant en mouvement libre ou en chute libre à travers l'espace sidéral.

[1] Sur une condition nécessaire pour la possibilité physique des divers types d'Univers. — *Ann. de la Soc. scientifique de Bruxelles.* t LIV, serie B, 1934, p. 224.
Sur l'Univers sphérique d'Einstein. — *Verhandl. des Intern. Mathematikerkongresses, Zurich* 1932. Band II p. 319.

3°) Les observations astronomiques montrent que si l'on admet, conformément aux équations générales de la gravitation, un écart de l'espace-temps par rapport à une métrique euclidienne, cet écart ne peut être que très petit dans les limites du domaine cosmique exploré par le téléscope.

Considérons dès lors un système de référence qui soit lié à notre voie lactée et envisageons un ds^2 très général où tous les $g_{\mu\nu}$ soient fonctions de toutes les coordonnées:

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + g_{22}\,dx_2^2 + g_{33}\,dx_3^2 + g_{44}\,dx_4^2$$

où x_1, x_2 et x_3 sont des coordonnées spatiales trirectangulaires et x_4 la coordonnée de temps.

Comme les $g_{\mu\mu}$ s'écartent très peu de ∓ 1, on peut les développer en série comme suit:

$$g_{\mu\mu} = \mp 1 + A^{\mu}_{\alpha} x_{\alpha} + \frac{1}{2} B^{\mu}_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta} + \frac{1}{6} C^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} x_{\alpha} x_{\beta} x_{\gamma} + \cdots\cdots$$

où A^{μ}_{α}, $B^{\mu}_{\alpha\beta}$ et $C^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ désignent des groupes de constantes pour lesquelles l'ordre des indices inférieurs α, β et γ est indifférent. Il y a 4×4 constantes A, 4×10 constantes B et 4×20 constantes C, soit 136 constantes inconnues pour déterminer le ds^2.

Cela étant, du fait que notre voie lactée, qui est supposée prise comme origine des axes coordonnés, peut être considérée comme en chute libre, on aura:

$$A^{\mu}_{\alpha} = 0 \qquad B^{\mu}_{\alpha 4} = 0 \qquad C^{\mu}_{\alpha 44} = 0\,.$$

Dans ces conditions la vitesse radiale résulte directement des équations de la gravitation:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa\, T_{\mu\nu}\,.$$

On obtient ainsi, en première approximation, la vitesse radiale v_r pour une orientation correspondant aux cosinus directeurs α_1, α_2 et α_3 (après avoir effectué au préalable une rotation convenable des axes coordonnés):

$$v_r = \frac{c}{2\varkappa\varrho}\left[\left(C^1_{114} - C^4_{114}\right)\alpha_1^2 + \left(C^2_{224} - C^4_{224}\right)\alpha_2^2 + \left(C^3_{334} - C^4_{334}\right)\alpha_3^2\right] r\,,$$

confirmant la loi de Hubble.

Il est possible de montrer que la vitesse radiale n'est pas nécessairement une vitesse de récession. Il y a éloignement ou rapprochement selon que le caractère non-euclidien diminue ou augmente avec le temps. Il est physiquement possible que les nébuleuses après s'être éloignées de notre voie lactée reviennent vers elle.

De même si l'on adopte un ds^2 moins général, notamment un ds^2 polaire à symétrie sphérique, par exemple de la forme:

$$ds^2 = -(1 + Ar + Br^2)\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + (1 + Pr + Qr^2)\,c^2 dt^2$$

où A, B, P et Q sont des fonctions inconnues du temps, on arrive à des conclusions analogues, mais alors, par suite de l'hypothèse de la symétrie sphérique, la vitesse radiale ne varie plus avec l'ascension droite et la déclinaison. On obtient alors:

$$\frac{v_r^2}{c^2} = \frac{1}{9}\left[\frac{\lambda^2}{\varkappa(\varrho_0)_0} + 5\lambda - \frac{1}{2}\varkappa(\varrho_0)_0\right] r^2$$

où $(\varrho_0)_0$ est la densité propre à l'origine.

En introduisant en outre l'hypothèse d'Einstein $\varkappa\varrho_0 = 2\lambda$, on retrouve une vitesse proportionnelle à $\sqrt{\lambda}$:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\, r.$$

En résumé la vitesse radiale des nébuleuses s'explique directement par les lois de la gravitation d'Einstein sans aucune hypothèse complémentaire et son expression s'obtient immédiatement par la considération du mouvement de chute libre du système de référence.

Cette vitesse radiale peut donc être considérée comme une nouvelle confirmation de la théorie de la relativité.

ÜBER DIE CARSON'SCHE INTEGRALGLEICHUNG

Von H. Bremekamp, Delft.

Die Integralgleichung

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-uz}\, h(u)\, du \qquad (1)$$

spielt eine wichtige Rolle in Carson's Theorie der Heaviside'schen Operatorenrechnung. Ich behandle einige Sätze über genügende Bedingungen, unter welchen die Funktion $h(u)$ durch (1) eindeutig bestimmt ist, und unter welchen eine Lösung von (1) überhaupt möglich ist. Man muß bei jedem Satze angeben, für welche Werte von z die betreffende Lösung der Gleichung genügen soll. Die Eindeutigkeitssätze sind interessanter je nachdem die Menge dieser Werte kleiner ist, die Existenzsätze je nachdem sie umfassender ist.

Satz I. Es kann nicht zwei verschiedene *stetige* Funktionen $h(u)$ geben, die der Gleichung (1) für jedes positive ganzzahlige z genügen.

Die vorgetragene einfache Beweismethode ist auch geeignet um einen etwas allgemeineren Satz von LERCH (Acta Math. 27, 1903) zu beweisen.

Die Bedingung: $h(u)$ ist stetig, kann ersetzt werden durch: $h(u)$ genügt den Dirichletschen Bedingungen.

Satz II. Es sei $f(z)$ eine in der komplexen Halbebene $x > c$ analytische Funktion, derart, daß das Integral

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{uz} f(z)\, dz \tag{2}$$

konvergiert für jedes positive u. Von der Funktion $h(u)$ wird verlangt, daß sie der Gleichung (1) genügt für jedes z in der genannten Halbebene. Wenn die Gleichung eine derartige Lösung hat, so ist dieselbe durch das Integral (2) gegeben, und daher eindeutig bestimmt.

Zu Unrecht wird die zum Beweise dieses Satzes nötige Rechnung in der Litteratur oft als Existenzbeweis für die Funktion $h(u)$ betrachtet. (Siehe z. B. die viel zitierte Arbeit von MARCH Bull. Am. Math. Soc. 33, 1927).

Wenn man den Beweis etwas anders einrichtet findet man, daß man nur zu verlangen braucht, daß die Gleichung (1) gilt auf irgend eine Strecke in der Halbebene $x > c$.

Satz III. Das Integral (2) genügt tatsächlich der Gleichung (1) unter folgenden Voraussetzungen.

1. Die Gleichung gilt für $R(z) > c$, wo c so zu wählen ist, daß alle Singularitäten der gegebenen Funktion $f(z)$ links von der Geraden $x = c$ liegen,
2. $f(z) \to 0$, für $z \to \infty$ mit positivem Realteil,
3. es konvergiert $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(c+iy)|\, dy$.

DÉFAUT DE LA BALANCE DE TORSION D'EÖTVÖS ET AVANTAGE DU GRADIOMÈTRE A TROIS MASSES

Par E. KOGBETLIANTZ, Téheran.

Depuis l'invention en 1888 par Eötvös de la balance de torsion ayant une de ses deux masses placée plus haut que l'autre, l'application de la méthode gravimétrique de prospection géophysique à l'étude de la tectonique du sous-sol et à la recherche des gîtes des minerais utiles s'est developpée énormément et actuellement on compte plus de cinq cents balances de torsion travaillant dans toutes les parties du monde. Ces balances sont toutes du type Eötvös c'est à dire à deux fléaux suspendus l'un à côté de l'autre, l'axe de rotation étant placé ainsi entre les deux fils de torsion. En écrivant l'équation d'équilibre pour chaque fléau on a l'habitude de négliger les dérivées tierces du potentiel, mais en outre on ne tient pas compte du fait fondamental qu'aucun des deux fils de torsion ne coïncide pas avec l'axe de rotation, la balance devant travailler dans des azimuts différents. C'est une source d'erreur qui augmente avec l'écartement des deux fils de torsion. Soit 2λ cet écartement. L'équation d'équilibre s'écrit tenant compte des dérivées tierces mais négligeant celles du quatrième ordre:

$$\begin{aligned}
&b\,[U_{yz}\cos\alpha - U_{xz}\sin\alpha] + a\,[2\,U_{xy}\cos 2\alpha + U_{\Delta}\sin 2\alpha] +\\
&a\,[(3\,U_{x^2y} - U_{y^3})\cos 3\alpha + (3\,U_{xy^2} - U_{x^3})\sin 3\alpha] +\\
&\lambda\,\{-b\,(U_{x^2z} + U_{y^2z}) + a\,[(U_{y^3} + U_{x^2y})\cos\alpha - (U_{x^3} + U_{xy^2})\sin\alpha] +\\
&b\,[U_{y^2z} - U_{x^2z})\cos 2\alpha - 2\,U_{xyz}\sin 2\alpha]\} = n_\alpha - n_0
\end{aligned}$$

où a, b sont deux constantes de l'appareil, U désigne le potentiel de pesanteur et α est l'azimut sous lequel est orienté le fléau. Le nombre n_α est lu directement et la position du zero n_0 est inconnue. L'équation employée toujours s'en déduit en rejetant tous les termes avec les dérivées tierces. De ces termes celui $-b\,\lambda\,(U_{x^2z} + U_{y^2z})$ est constant et il ne cause pas d'erreur, car transporté dans le deuxième membre il fait varier l'inconnue n_0 et ce que l'on détermine c'est en réalité $m_0 = n_0 + b\,\lambda\,(U_{x^2z} + U_{y^2z})$ ce qui n'a aucune influence sur les resultats. Les autres termes avec λ en facteur s'ajoutent aux deux premiers termes et entraînent comme conséquence le fait que les calculs habituels donnent non pas les quatre expressions $2\,U_{xy}$, $U_{\Delta} = U_{y^2} - U_{x^2}$, U_{xz} et U_{yz}, mais les expressions suivantes

$$\bar{U}_{xz} = U_{xz} + \lambda\frac{a}{b}(U_{x^3} + U_{xy^2}),\quad \bar{U}_{yz} = U_{yz} + \lambda\frac{a}{b}(U_{x^2y} + U_{y^3})$$

et simile

$$\bar{U}_{\Delta} = U_{\Delta} - 2\,\lambda\frac{b}{a}\,U_{xyz},\quad 2\,\bar{U}_{xy} = 2\,U_{xy} + \lambda\frac{b}{a}(U_{y^2z} - U_{x^2z}).$$

Le terme le plus genant e'est celui avec $\cos 3\alpha$ et $\sin 3\alpha$. Il empêche de travailler correctement en trois azimuts α_1, $120^\circ + \alpha_1 = \alpha_2$ et $240^\circ + \alpha_1 = \alpha_3$ car la formule fondamentale pour n_0, à savoir $3n_0 = n_1 + n_2 + n_3$, est en réalité

$$m_0 + a\,\lambda\,[(3\,U_{x^2y} - U_{y^3})\cos 3\,\alpha_1 + (3\,U_{xy^2} - U_{x^3})\sin 3\,\alpha_1] = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{3}$$

d'où l'impossibilité de déterminer m_0 correctement.

Tous ces termes n'ont point une valeur négligeable car la précision facile à obtenir avec les fils de torsion de meilleure qualité est de l'ordre d'un demi-Eötvös $= 0{,}5 \cdot 10^{-9}$ cgs tandis qu'il est bien connu que les balances de torsion les meilleures fabriquées par Askania ne peuvent donner les valeurs des U_{xz} et U_{yz} qu'á $1^E.5-2^E$ et celles des U_Δ et $2\,U_{xy}$ qu'à 3^E près. Or actuellement on a besoin de connaître les dérivées secondes du potentiel à 1 Eötvös près car alors l'interpretation géologique des observations gravimétriques devient plus exacte. En même temps un des défauts de la prospection gravimétrique est la lenteur d'opérations par le terrain. On obtient une balance de torsion très précise et rapide en remplaçant le fléau ordinaire par celui à 3 masses disposées aux sommets d'un triangle regulier de manière qu'une de ces masses soit plus haut (on plus bas) que les deux autres. Cette balance à fléau unique dont le fil de torsion coïncide avec l'axe de rotation est insensible aux dérivées de troisième ordre et son équation d'équilibre s'écrit en négligeand les dérivées du quatrième ordre:

$$A \cdot [U_{yz} \cos \alpha - U_{xz} \sin \alpha] = n_\alpha - n_0$$

où A est la constante de l'appareil. On voit que cette balance, gradiomètre à trois masses, donne les deux composantes U_{xz} et U_{yz} du gradient horizontal de la pesanteur et ne donne pas U_Δ et $2\,U_{xy}$. Or, en pratique l'influence du relief topographique sur les balances de torsion éxige une correction des mesures faites et cette correction, facile pour le gradient, est si difficile à calculer pour les grandeurs U_Δ et $2\,U_{xy}$ qu'on n'emploie pratiquement que le gradient. Ce nouveau type de balance de torsion proposée en 1926 par l'auteur est en construction à la maison Askania et sa réalisation doit faciliter et accélérer la prospection géophysique tout en la rendant beaucoup plus accessible au point de vue pécuniaire.

SECTION VI

Mécanique rationnelle et appliquée

SUR CERTAINS MOUVEMENTS DES FLUIDES PARFAITS

Par Emile Merlin, Gand.

L'aspect que présentent les corps célestes dépend intimement de la nature des trajectoires des particules qui les composent.

Dans la recherche des figures des planètes, qui sont animées d'un mouvement de rotation autour d'un axe, on est naturellement amené à considérer les trajectoires circulaires ayant un axe commun. On simplifie la question en admettant que le corps est un fluide parfait de densité uniforme et qu'il tourne à la manière d'un solide soumis à l'attraction newtonienne.

Recherchant les formes d'équilibre relatif de tels fluides, on trouve les ellipsoïdes de Mac Laurin, ceux de Jacobi, les figures d'équilibre de Liapounoff et Poincaré.

Mais Jupiter, Saturne, le Soleil, par exemple, ne tournent pas à la manière d'un solide, et la densité n'y est pas partout la même. De là de beaux travaux dus notamment à Lichtenstein[1], à M. M. Wavre[2] et Dive.[3]

Toutefois certains corps célestes, comme les nébuleuses spirales, ont des formes qui ne s'expliquent pas de la sorte. J'ai montré que le mouvement de rotation autour d'un axe fixe étant retenu, et admettant que le fluide est parfait hétérogène, non de révolution, la force agissant sur l'unité de masse dérivant d'un potentiel, il suffit d'admettre une relation, d'ailleurs quelconque a priori, entre les éléments mécaniques, pression, densité, potentiel, relation pouvant varier au cours du temps, pour que le lieu des points de même densité et de même vitesse angulaire de rotation se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation suivant des spirales logarithmiques.[4] Cette hypothèse très générale permet ainsi de rendre compte de la forme que présentent les nébuleuses spirales.

Mais, dans d'autres nébuleuses, le mouvement de rotation n'apparait pas nécessairement, et je me suis proposé l'étude de mouvements parti-

---

[1] Voir, par exemple, Léon Lichtenstein. Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin, 1933.

[2] R. Wavre. Figures planétaires et géodésie. Paris. 1932.

[3] Pierre Dive. Rotations internes des astres fluides. Paris 1930. Voir aussi: E. Merlin. Sur la distribution des vitesses et des densités dans un fluide hétérogène en rotation. Comptes rendus, t. 185, p. 1579, 1927 et E. Merlin. Sur les fluides à stratification cylindrique en rotation autour d'un axe. Idem, t. 186, p. 126, 1928.

[4] E. Merlin. Sur un cas très genéral du mouvement d'un fluide parfait hétérogène en rotation présentant des stries en forme de spirales. Comptes rendus, t. 190, p. 1118, 1930. — E. Merlin. Quelques propriétes des fluides parfaits à stries spirales en rotation. Idem t. 190, p. 1225, 1930.

culiers, où les trajectoires offrent une grande homogénéité.[1] Le fluide, toujours parfait hétérogène est soumis à l'action d'une force qui, rapportée à l'unité de masse dérive d'un potentiel. En chaque point, la densité et la vitesse sont supposées indépendantes du temps, tandis que la pression peut en dépendre. Nous admettons, en outre, que le long d'une trajectoire, la vitesse, la densité et la pression à l'instant t gardent la même valeur. Pour arriver à un résultat concret, exigeons encore que la courbure se conserve le long des trajectoires. On trouve que celles-ci sont des hélices circulaires tracées sur des cylindres de même axe. Elles font avec le plan de la section droite un angle qui est le même pour toutes les hélices situées sur le même cylindre. Elles peuvent dégénérer en des circonférences.

Il est remarquable que certaines nébuleuses obscures, que l'on rencontre dans la Voie lactée, au Nord de Thêta Ophiuchi, rappellent l'aspect qu'imposent les trajectoires hélicoïdales.

Attirons encore l'attention sur le fait curieux suivant. Les hypothèses faites ici entraînent une relation entre la pression, la densité, le potentiel et le temps, alors que l'existence d'une telle relation permet, d'autre part, de justifier l'aspect présenté par les nébuleuses spirales.

SUR LE SILLAGE DERRIÈRE UN OBSTACLE CIRCULAIRE

Par Victor Vâlcovici, Bucuresti.

Je me propose, dans ce qui suit, de démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans le cas du problème du sillage derrière un arc de cercle symétriquement disposé par rapport au courant. Nous supposerons que le milieu O de l'arc est l'origine des axes et que la vitesse (égale à un) du fluide à l'infini a la direction et le sens de l'axe $+Ox$. Le centre du cercle se trouve sur le côté positif de Ox (arc convexe) et son rayon est égale à l'unité.

On sait[2] que la solution du problème du sillage dépend d'une fonction $\omega(\zeta)$ qui réalise la représentation conforme du domaine (d) — partie

---

[1] E. Merlin. Sur la nature des trajectoires de certains fluides parfaits hétérogènes. Comptes rendus, t. 202, p. 2130, 1936. E. Merlin. Sur un cas particulier de trajectoires de certains fluides parfaits hétérogènes. Idem t. 203, p. 297, 1936.

[2] Levi-Civita, Scie e leggi di resistenza (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo t. XXIII (1907).

du plan $z=x+iy$ où le fluide est en mouvement — sur un demi-cercle dans le plan des ζ, à l'aide de la relation:

$$Z = \frac{a^2}{2}\int_i^{\zeta} e^{i\omega(\zeta)} \frac{\zeta^4-1}{\zeta^3}\, d\zeta .$$

En mettant, comme d'habitude:

$$\omega = -\frac{\pi}{2} + i\log\frac{\zeta-i}{1-i\zeta} + \Omega(\zeta),$$

avec:

$$\Omega = \Theta + i\,T$$

et en tenant compte des conditions aux limites, je trouve que si $t(\sigma)$ est la solution de l'équation:

$$(1)\quad 2\pi\, t(\sigma)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta + \sin^2\sigma)\, e^{-t(\sigma)}\, d\sigma = l\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\sigma_1 + \sin^2\sigma_1)\log\left(\frac{\sin\sigma+\sin\sigma_1}{\sin\sigma-\sin\sigma_1}\right)^2 e^{-t(\sigma_1)}\, d\sigma_1$$

alors on a sur le contour

$$\Theta = \frac{l}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\sigma+\sin^2\sigma)\, e^{-t(\sigma)}\, d\sigma}\int_0^{\sigma} (\sin\sigma+\sin^2\sigma)\, e^{-t(\sigma)}\, d\sigma ,$$

$2l$ étant la longueur de l'arc. L'équation (1) est résolue par un procédé d'approximations successives. L'arc ne doit pas dépasser $28^\circ\, 52'$.

M. Weinstein[1] avait démontré l'existence et l'unicité pour $2l \leqq 20^\circ\, 36'$. M. Leray[2] a étendu cette démonstration bien au dela de cette limite. Toutefois la méthode ci-présente possède l'avantage du calcul effectiv de l'approximation. Le développement des calculs paraîtra ailleurs.

---

[1] A. Weinstein, Sur les sillages provoquées . . . . , Atti della Reale Accad. dei Lincei. XVII (1933) 1, 83.

[2] J. Leray, Les problèmes . . . . , Comentarii math. Helvetici, vol. 8, fasc. 2, 3.

ASSOCIATED AIRY FUNCTIONS IN ELASTICITY AND HYDRODYNAMICS

By H. Bateman, Pasadena, California.

§ 1. If U_s, V_s are conjugate harmonic functions so that $U_s + i V_s = f_s(z)$ and c_n is a complex constant, the functions U, V given by the equation

$$U + i V = \sum_{s=0}^{n-1} y^s f_s(z) + c_n y^n$$

may be called associated polyharmonics of order n. When $c_n = 0$ they become the conjugate polyharmonics of order n which have been studied by P. Burgatti [Bull. Unione mat. ital. 1 (1922) 8—12, 2 (1923) 87—91.]

§ 2. In the slow steady two-dimensional motion of a homogeneous fluid of unit viscosity the stream-function and the stress-function are conjugate biharmonics.

§ 3. If (ξ, η) are associated harmonics, (σ, τ) arbitrary harmonics, the functions

$$U = \sigma_x + \xi \tau_y - \eta \tau_x, \quad V = -\sigma_y + \xi \tau_x + \eta \tau_y$$

are conjugate biharmonics. This result is related to a solution of the two-dimensional elastic equations given by G. Kolossoff [Comptes rendus. 146 (1908) 522—525] and a conjugate solution is easily written down.

§ 4. If u, v are associated biharmonics, a function H such that

$$H_{xx} - H_{yy} - 2 i H_{xy} = u + i v$$

is suitable for the treatment of problems relating to uniformly loaded or rotating plates.

§ 5. If

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \pm \frac{\partial}{x y} f(-x, y),$$

$f(x, y)$ is harmonic. There is a corresponding functional differential equation giving a biharmonic function. If $g(x, y)$ and $g(y, x)$ are conjugate harmonics or biharmonics and $g(x, y) \equiv f(x + y, x - y)$, the function $f(u, v)$ satisfies a single functional differential equation.

§ 6. If

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2 i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right) F(x, y, t) = i \frac{\partial}{\partial t} F(x, -y, t)$$

the function $F, (x, y, t)$ satisfies the equation of the vibration of plates.

§ 7. If $(x+a)f'(x)=mf(-x)$, where a and m are constants, $f(x)$ can be expressed in terms of Legendre functions. If $mf'(x)=(x+a)f(-x)$, $f(x)$ can be expressed in terms of confluent hypergeometric functions.

§ 8. The functional differential equation

$$(s+a)\frac{\partial}{\partial s}f(s,t)=\frac{\partial}{\partial t}f(-s,t)$$

has a set of solutions of type

$$f(s,t)=\frac{s}{|s|}e^t V_n(s,t)+V_{n+1}(s,t),$$

where the functions $V_n(s,t)$ are even functions of s which satisfy a partial differential equation independent of n. If $e^t=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $|s/a|=z/r$, V_n is a symmetric harmonic function and

$$\frac{\partial V_{n-1}}{\partial r}=r\frac{\partial V_n}{\partial z},\quad \frac{\partial V_{n+1}}{\partial z}+\frac{z}{r}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial z r}+r\frac{\partial V_n}{\partial r}+z\frac{\partial V_n}{\partial z}+V=0$$

a particular solution is $V_n=r^n P_n(z/r)$ where $P_n(\mu)$ is a Legendre function.

BEITRAG ZUR BIEGETHEORIE KREISFÖRMIGER PLATTEN VERÄNDERLICHER DICKE

Von R. Gran Olsson, Trondheim.

Die Differentialgleichung der Durchbiegung einer kreissymmetrisch verbogenen Platte von radial veränderlicher Dicke wird für ein bestimmtes Gesetz der Veränderlichkeit der Plattendicke integriert. Diese Differentialgleichung lautet

$$(1)\quad \frac{d^2\varphi}{d\varrho^2}+\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{N}\frac{dN}{d\varrho}\right)\frac{d\varphi}{d\varrho}-\left(\frac{1}{\varrho^2}-\frac{\nu}{\varrho}\frac{1}{N}\frac{dN}{d\varrho}\right)\varphi=\frac{a^3}{N\varrho}\left[\int p(\varrho)\varrho\,d\varrho+C\right].$$

Hier bedeuten

φ die Neigung der Mittelfläche der Platte,

ϱ die Entfernung eines Punktes von der zur Mittelfläche senkrechten Symmetrieachse bezogen auf den Außenradius a der Platte,

N die von r abhängige Biegesteifigkeit der Platte,

ν die Querdehnungszahl,

p (ϱ) die Belastung,

C eine Integrationskonstante, die aus den Randbedingungen bestimmt wird.

Die Biegesteifigkeit möge sich nach dem Gesetz $N = N e^{-\frac{\lambda}{n}\varrho^n}$ ändern, wo λ und n beliebige Konstanten sind $(n > 0)$. Die (1) entsprechende homogene Gleichung lautet dann

$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} + \left(\frac{1}{\varrho} - \lambda\varrho^{n-1}\right)\frac{d\varphi}{d\varrho} - \left(\frac{1}{\varrho^2} + \nu\lambda\varrho^{n-2}\right)\varphi = 0. \tag{2}$$

Mit

$$x = \frac{\lambda}{n}\varrho^n, \; \gamma = \frac{n+2}{n}, \; a = \frac{1+\nu}{n}$$

lautet die Lösung der Gleichung (2)

$$\varphi = \varrho\left[A\,F(a,\gamma,x) + B\,x^{1-\gamma}F(a-\gamma+1, 2-\gamma, x)\right], \tag{3}$$

wo

$$F(a,\gamma,x) = 1 + \frac{a}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

die konfluente hypergeometrische Funktion bezeichnet. A und B sind beliebige Integrationskonstanten. Für positive ganze γ tritt statt der zweiten Lösung eine Funktion zweiter Art auf. Die Fälle, wo γ gleich Null oder einer negativen, ganzen Zahl ist, mögen ausgeschlossen werden. Für $n = 2\nu$ läßt sich die konfluente hypergeometrische Funktion durch Besselfunktionen imaginären Arguments darstellen.

Das partikuläre Integral zur Befriedigung der rechten Seite der Gleichung (1) läßt sich in vielen Fällen durch Ausdrücke von der Form $\varrho^m e^{\frac{\lambda}{n}\varrho^n}$ angeben. So ergibt sich beispielsweise für $n=2$ bei einer mit p_0 gleichmäßig belasteten Ringplatte vom Innenradius r_i,

$$\varphi_p = \frac{p_0 a^3}{2 N_0 \lambda}\varrho e^{\frac{\lambda}{2}\varrho^2}\left[\frac{1}{3-\nu} - \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^2\right] \qquad \left(\varrho_i = \frac{r_i}{a}\right). \tag{4}$$

Aus (3) und (4) ergibt sich die vollständige Lösung in bekannter Weise. Eine ausführliche Darstellung dieser und verwandter Fragen soll später an anderer Stelle veröffentlicht werden. (Vgl. auch Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 16 (1936) S. 347)

BEITRÄGE ZUR BERECHNUNG DER SCHALEN UNTER UNSYMMETRISCHER UND UNSTETIGER BELASTUNG

Von P. NEMÉNYI, Kopenhagen.

Die Arbeit behandelt zwei verschiedene Probleme, die nur lose miteinander zusammenhängen; beiden kommt u. A. bei gewissen Problemen der Schalenberechnung für Wind und Schnee Bedeutung zu.

Die erste Aufgabe betrifft die Membrantheorie der Rotationsschalen mit nicht rotationssymmetrischer Belastung oder Stützung. Es werden die bekannten Lösungen und Methoden diskutiert und die Unrichtigkeit des Dischinger'schen Verfahrens für $n > 1$ nachgewiesen. Es wird indessen auf die Fruchtbarkeit des Ausgangsgedankens von Dischinger: der Gleichgewichtsuntersuchung durch 2 geeignet gewählte Meridianschnitte und einen beliebigen (beweglichen) Breitekreis begrenzter *endlicher* Schalenstücke hingewiesen, und gezeigt, daß eine solchartige Betrachtung, — richtig durchgeführt — zur Integralgleichung des Problems (und zu einem dieser Integralgleichung entsprechenden übersichtlichen Näherungsverfahren) führt. Aus der so erhaltene Integralgleichung läßt sich ferner eine neue gewöhnliche Differentialgleichung des Problems ableiten. Für den homogenen Fall lautet diese Gleichung für die n-te Harmonische:

$$\frac{1}{U}\frac{d^2 U}{dz^2} = (1-n^2)\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{dz^2},$$

$r =$ Radius des Breitenkreises, z: lotrechte Ordinate. U ist eine Funktion von z aus der die n-te Harmonische der Ringspannung $S_{n,\,\mathrm{Ring}}$ wie folgt gebildet werden kann.

$$S_{n,\,\mathrm{Ring}}(\psi, z) = \cos n\psi \cdot \frac{U(z)\dfrac{d^2 r}{dz^2}}{2r\dfrac{ds}{dz}\cos\dfrac{\pi}{2n}}.$$

Der zweite Teil der Arbeit ist der Klärung der Frage gewidmet, in wieweit eine Stufe in der Belastungsfläche, die in der Membran unendlich große Spannungen hervorruft, bei der wirklichen Schale von Bedeutung ist. Die Klärung dieser allgemeinen Frage wird an Hand des näheren Studiums der besonderen Verhältnisse bei der zylindrischen Tonnenschale versucht.

Die Arbeit erscheint in Extenso in „Bygningsstatiske Meddelelser“ in Kopenhagen.

SUR L'ACTION HYDRODYNAMIQUE D'UN COURANT TRANSLO-CIRCULATOIRE SUR UN PROFIL A POINTS DE REBROUSSEMENT

Par M. A. Omara, Le Caire.

On sait que la résultante des pressions exercées sur un contour fermé S par un courant fluide incompressible est donnée par la formule de Blasius, qui s'écrit en transformant conformément le domaine du plan z, extérieur au contour en le demi-plan supérieur d'un plan ζ:

$$Y+iX=\frac{1}{2}\varrho\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2\frac{d\xi}{dz}d\xi,$$

où F est le potentiel complexe régissant le mouvement fluide dans ζ.

Soit ξ_1 l'abscisse du point du plan ζ correspondant à un point de rebroussement. Comme dans le voisinage de ξ_1,

$$\frac{dz}{d\xi}=(\xi-\xi_1)\chi(\xi),\quad \text{avec } \chi(\xi_1)\neq 0,$$

on voit que ξ_1 est un pôle d'ordre un de la fonction à intégrer et par conséquent l'intégrale n'a pas de sens. Mais on lui en donne un, en prenant sa valeur principale. On trouve par application du théorème de Cauchy:

$$Y+iX=\varrho WC+\frac{1}{2}\varrho\pi i\Sigma\,\mathrm{Res}\left[\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2\frac{d\xi}{dz}\right]\text{ aux pôles } \xi_j.$$

L'auteur montre que chacun des termes de cette somme représente une force agissante le long de la tangente à S au point de rebroussement correspondant, et propose la modification suivante au théorème de Kutta-Joukowski:

En plus de la portance classique, les profils à points de rebroussement sont soumis à un système de forces dues à la présence deces points. Le long de la tangente en chaque point de rebroussement agit une force (X_j, Y_j) telle que:

$$Y_j+iX_j=\frac{1}{2}\varrho\pi i\,\mathrm{Res}\left[\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2\frac{d\xi}{dz}\right]\text{ au pôle } \xi_j.$$

Comme cette force persiste quand la circulation $C=0$, la même modification s'étend au paradoxe de d'Alembert.

DÉMONSTRATIONS NOUVELLES DE PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT GYROSCOPIQUE

Par A. MÉTRAL, Paris.

I. Halphen à l'aide des fonctions elliptiques et M. Hadamard par le calcul des résidus[1] ont démontré que la rotation précessionnelle a toujours le signe de la valeur initiale r_0 de la composante de la rotation du solide de révolution autour de son axe de figure OZ. Nous démontrons cette propriété fondamentale par la considération des racines u_1, u_2, u_3 du polynôme $f(u)$ donné par

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (\alpha - a u)(1-u^2) - (\beta - b r_0 u)^2 \equiv f(u) \equiv a(u-u_1)(u_2-u)(u_3-u)$$

avec $u = \cos\theta$, θ nutation, α, β constantes arbitraires, $b = \frac{C}{A}$, C moment d'inertie autour de OZ, A moment d'inertie autour d'un axe du plan XOY, $a = \frac{2\mu g l}{A}$, μ masse du solide, g accéleration de la pesanteur, l distance du point fixe O au centre de gravité G du solide:

$$\Delta\psi = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\beta - b r_0 u}{(1-u^2)\sqrt{f(u)}}\, du > \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\frac{u_3+1}{u_3-u_1}} - \sqrt{\frac{u_3-1}{u_3-u_2}}\right] > 0,$$

$$-1 < u_1 < u_2 < +1 < u_3 .$$

II. La limite supérieure de $\Delta\psi$ est donnée de même par

$$\Delta\psi < \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\frac{u_3+1}{u_3-u_2}} - \sqrt{\frac{u_3-1}{u_3-u_1}}\right].$$

III. En appelant k et $\frac{1}{k}$ les racines du trinôme

$$(u_2-u_1)[2c(1+u_1u_2) - (c^2+1)(u_1+u_2)] = 0,$$

$[u_1 < k < u_2$, et $c =$ valeur initiale de $u]$ on démontre le théorème suivant:

Théorème. *Les parallèles limites $u_1 = \cos\theta_1$ et $u_2 = \cos\theta_2$ étant donnés, pour qu'il existe un mouvement du gyroscope correspondant à ces parallèles limites et tel que $\psi' = 0$ lorsque u passe par la valeur c, il faut et il suffit que c soit compris entre k et u_2: la valeur k toujours comprise entre u_1 et u_2 est positive ou négative selon que $(\theta_1+\theta_2)$ est inférieur ou supérieur à π.*

[1] Bulletin des Sciences Mathématiques 1895, Tome XIX, pag. 228.

IV. On peut définir deux *mouvements conjugués*, savoir deux mouvements correspondant à deux valeurs inverses de c, c étant seulement défini par la condition $\beta = b r_0 c$. En effet l'équation différentielle qui donne $u(t)$ est la même. On obtient alors le théorème suivant:

Théorème. *Quand on fait varier c entre k et $+1$, les valeurs de c et de son inverse épuisent tout le champ des variations possibles de c. On obtient donc tous les mouvements qui correspondent aux deux parallèles limites donnés, en considérant les mouvements qui correspondent à c compris entre k et 1 et leurs mouvements conjugués.*

V. Enfin ou peut démontrer le théorème suivant:

Théorème. *La composante r_0 étant supposée positive, le mouvement d'un point isolé m_1 de masse unité mobile sans frottement sur une sphère de centre O et de rayon unité est le mouvement du point m de l'axe OZ du gyroscope tel que $\overrightarrow{Om} = +1$, sous les conditions suivantes:*

1°. *m_1 est un point pesant, la pesanteur étant prise égale à $\frac{a}{2}$ (ce qui est toujours possible par un choix convenable des unités).*

2°. *m_1 est soumis en outre à une force normale à la trajectoire égale en valeur absolue à $b r_0 w$ (w = vitesse de m), dont le sens s'obtient en faisant tourner le vecteur vitesse $\overrightarrow{w}$ de $+\frac{\pi}{2}$ autour de $m_1 Z$, normale extérieure à la sphère.*

Ce mouvement n'est autre que celui d'un point pesant électrisé soumis à l'influence d'un pôle d'aimant situé en O.

LA MÉCANIQUE INVARIANTE

Par J. Le Roux, Rennes.

La Mécanique invariante a pour but d'énoncer les lois fondamentales de la mécanique indépendamment de toute notion à priori d'espace absolu et même de temps.

Le programme en avait été formulé par Poincaré en 1900. Le principe de relativité généralisée se ramène au même problème, dont la solution se déduit très simplement de la théorie des groupes de transformations de Lie. Cette méthode géniale trouve dans la Mécanique une nouvelle application de sa puissance et de sa fécondité. Elle fournit sans efforts des résultats d'une importance fondamentale, dont l'existence n'avait même pas été soupçonnée.

Un même mouvement, rapporté à des systèmes différents de coordonnées géométriques et de temps, présente des apparences qui peuvent être elles-mêmes très différentes. Mais dans cette diversité d'images on découvre des propriétés communes. La Mécanique invariante les met en évidence.

De plus, dans les propriétés exclusivement relatives, ou découvre, par l'emploi des transformations infinitésimales, des liaisons nouvelles d'un très grand intérêt.

L'énergie cinétique varie d'un système de référence à un autre, quand ces systèmes sont mobiles les uns par rapport aux autres. Mais on peut calculer une énergie cinétique invariante et en déterminer les propriétés. C'est de cette énergie invariante qu'on déduit toutes les propriétés invariantes du mouvement.

Il existe des systèmes de référence pour lesquels l'énergie cinétique relative est égale à l'énergie cinétique invariante. Tous ces systèmes sont invariablement liés entre eux et leur ensemble constitue ce que j'appelle le *Solide principal de référence* du système matériel considéré.

Le mouvement d'un ensemble matériel par rapport à son solide principal jouit de propriétés remarquables. Quelle que soit la composition de l'ensemble, ces éléments paraîtront toujours se mouvoir suivant le principe de réciprocité de l'action et de la réaction de Newton.

Dans certains conditions le principe de la moindre action peut s'appliquer sous une forme invariante, entièrement indépendante du temps. On peut alors definir pour le mouvement de l'ensemble considéré un *temps canonique propre invariant.*

La loi de la gravitation sous la forme newtonienne n'est pas invariante. Mais il est possible de la formuler sous forme invariante en utilisant les propriétés énoncées ci-dessus. L'espace absolu de la mécanique classique correspond au solide principal de l'ensemble gravitant et le temps absolu concorde avec le temps canonique propre du mouvement du même ensemble.[1]

---

[1] J. Le Roux. Principes et Méthodes de la Mécanique invariante.

PROBLÈMES AUXILIAIRES DANS LA THÉORIE DU POTENTIEL

Par R. WAVRE, Genève.

Dans cette note je résumerai quelques résultats obtenus récemment dans l'étude du potentiel newtonien en tant que fonction analytique.

1. Nous avons tout d'abord étudié dans la partie réelle de son domaine de Weierstrass la fonction analytique qui coincide au voisinage d'un point avec le potentiel newtonien d'un corps « simple ». Nous avons montré que la fonction de passage introduite progressivement par Stahl, Bruns puis par MM. Hadamard et Schmidt est une fonction période pour un circuit décrit autour de la frontière du corps attirant et il n'y a pas d'autres singularités dans l'espace réel que les frontières, arêtes et les singularités de la fonction de passage. On peut ainsi construire une fonction harmonique multiforme admettant une ligne de ramification donnée et une fonction période donnée également.

2. Nous nous sommes proposé de déterminer les corps étant donnée leur attraction. Il ne faut pas prendre en considération les potentiels de simple et double couche étendues sur des surfaces fermées; ce sont des solutions banales. Ce problème a besoin d'être précisé. C'est ainsi que l'on peut se demander tout d'abord s'il existe des déformations des corps qui laissent le potentiel invariant. On peut établir qu'une simple couche ouverte est indéformable. Une double couche ne peut être déformée que si la densité est homogène.

3. A la suite d'Appell et de M. Volterra nous avons étudié le potentiel dans le domaine complexe où l'analyticité prend sa véritable signification. Il existe quatre potentiels logarithmiques d'une circonférence. Pour des surfaces homogènes, nous aboutissons à des intégrales semblables à celles de M. Herglotz qui se calculent par les résidus de Cauchy. M. F. Beer a montré qu'il existe un troisième potentiel pour la sphère homogène; il a en plus étendu la méthode de M. E. Schmidt au potentiel dans le domaine complexe.

4. Mademoiselle A. Halpern a formé un exemple de potentiel dont les dérivées normales d'ordre impair jouissent de la propriété suivante: elles sont finies sur un ensemble partout dense de points où la densité fait un saut, elles sont infinies sur un ensemble partout dense où la densité est continue. Les deux ensembles admettent la même fermeture.

La bibliographie concernant les questions ci-dessus se trouvera dans les thèses, de Genève, de M. F. Beer et de M^elle^ Halpern.

RÄUMLICHE STRAHLEN MIT KONSTANTER GESCHWINDIGKEIT

Von Georg Hamel, Berlin.

Herr Erhardt Schmidt machte mich auf folgende Frage aufmerksam: Gibt es außer den bekannten ebenen Fällen räumliche Potentialströmungen reibungsfreier, inkompressibler Flüssigkeiten, die stationär und mit konstanter Geschwindigkeit längs jeder Stromlinie verlaufen?

Daß die einzigen ebenen Bewegungen dieser Art geradlinige oder Kreisbewegungen sind, folgt leicht aus funktionentheoretischen Sätzen.

Im Raume führt nach einer Bemerkung Herrn von Laues die Aufgabe auf die Frage *nach einer Schaar von Minimalflächen, die zugleich Potentialflächen sind.* Man sieht nämlich leicht ein, daß von folgenden drei Forderungen jede eine Folge der beiden anderen ist:

1. Eine Flächenschaar $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ sei eine Schaar von Potentialflächen, deren zugehörige Strömung

$$\mathfrak{v} = \frac{d\varphi}{d\mathfrak{r}} \equiv \operatorname{grad} \varphi$$

divergenzfrei sei:

$$\operatorname{div} \frac{d\varphi}{d\mathfrak{r}} = \frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{r}^2} \equiv \Delta\varphi = 0 \qquad (\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}).$$

2. Die Flächenschaar $\varphi = \text{const.}$ sei eine Schaar von Minimalflächen.

3. Der senkrechte Abstand $n\,d\varphi$ zwischen zwei benachbarten Flächen sei längs der orthogonalen Trajektorien konstant.

$$\left(n = \frac{1}{|\mathfrak{v}|} \equiv \frac{1}{v}\right).$$

Es soll hier nun bewiesen werden:

1. Es gibt eine räumliche Bewegung, bei der die Minimalflächenschaar aus einer von ihnen durch Parallelverschiebung hervorgeht. Die Weierstrass'sche Funktion ist

$$F(\tau) = -\frac{ih}{2\tau^2},$$

h eine reelle Konstante. Dies ist die bekannte gewöhnliche Schraubenfläche, $2\pi h$ ist ihre Steighöhe. Die Parallelverschiebung ist durch die Änderung der Integrationskonstanten in dieser Weise gegeben:

$$\frac{\partial x_0}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial y_0}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial z_0}{\partial \varphi} = \beta,$$

β ist wie auch h von φ unabhängig.

Es ist

$$n = -\beta \frac{1 - \tau \bar{\tau}}{1 + \tau \bar{\tau}},$$

sodaß die Mannigfaltigkeiten $n =$ const. in der komplexen Hilfsebene τ Kreise sind, im Raum konzentrische Zylinder um die Schraubenaxe.

Es gibt infolgedessen einen Strahl in einem Hohlzylinder mit konstanter Geschwindigkeit an jedem Rand, am äußeren Rand ist sie kleiner, der Druck also größer als am inneren Rand. Die Stromlinien sind Schraubenlinien. Es besteht die Geschwindigkeitsverteilung:

$$v^2 = \frac{1}{\beta^2}\left(1 + \frac{h^2}{x^2 + y^2}\right).$$

2. *Der Hauptsatz*: *Weitere Lösungen gibt es nicht.*

Es kann nur der Beweisgang angedeutet werden, der noch recht mühsame Beweis soll an anderer Stelle veröffentlicht werden.[1]

STATIONÄRE, DURCH EINE SCHÜTTELNDE MASSE ERREGTE SCHWINGUNGEN EINES ELASTISCHEN HALBRAUMES

Von Erich Reissner, Berlin.

Im Hinblick auf Anwendungen in der dynamischen Bodenuntersuchung wurde folgendes Problem behandelt: An der Oberfläche eines homogenen elastischen Halbraumes greifen zeitlich periodische axialsymmetrische Oberflächenspannungen an, die insbesondere erzeugt werden durch rotierende Massen, die an einem schweren auf dem Halbraum ruhenden Körper angebracht sind. — Alle bisherigen Untersuchungen über erzwungene Schwingungen des elastischen Halbraumes, die mit einer grundlegenden Arbeit von H. Lamb [Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) 203 (1904)] beginnen, sind durchgeführt worden im Hinblick auf Anwendungen in der Seismik, bei denen nach der Form der Erschütterungswellen in großer Entfernung vom Erregungszentrum gefragt ist. Dabei kann man sich auf den Fall linien- bezw.

[1] Inzwischen erschienen: „Potentialströmungen mit konstanter Geschwindigkeit". Sitz.-Ber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Phys.-math. Kl. 1937. II.

punktförmiger Erregungsquelle beschränken und die dabei auftretende unendliche Amplitude im Erregungszentrum in Kauf nehmen. — Bei der vorliegenden Fragestellung war es dagegen nötig die Untersuchung auszudehnen auf den Fall flächenhaft verteilter Erregung, um die (dann endliche) Verschiebung im Zentrum berechnen zu können. Mit deren Kenntnis ließen sich dann insbesondere die Resonanzverhältnisse des Systems Schüttelmasse — Halbraum studieren. — Die mathematische Schwierigkeit bestand in der Auswertung der durch uneigentliche Integrale gegebenen formelmäßigen Resultate, die auf einem, soweit festgestellt werden konnte, neuen Wege erfolgte. — Die Arbeit erscheint im Auszug in Ingenieur-Archiv 7 (1936) und vollständig als „Veröff. Inst. dtsch. Forsch.ges. Bodenmech. (Degebo)“ 1937.

SECTION VII

Logique, philosophie et histoire

ÜBER REKURSIVE FUNKTIONEN DER ZWEITEN STUFE

Von Rózsa Péter, Budapest.

Die rekursiven Funktionen spielen bei der Grundlegung der Mathematik eine wichtige Rolle. Es werden darunter diejenige zahlentheoretischen Funktionen verstanden, welche von gewissen Ausgangsfunktionen ausgehend durch endlich viele Substitutionen und Rekursionen definiert werden. Der Begriff der Rekursion kann auf verschiedene Weisen abgegrenzt werden, und dadurch gelangt man zu verschiedenen Funktionsklassen. Man unterscheidet zwischen einfachen, zweifachen, usw. Rekursionen, je nachdem die Rekursion nach einer, zwei, oder mehreren Zahlenvariablen verläuft, ferner zwischen Rekursionen der I-sten, II-ten, III-ten Stufe, usw., je nachdem zum Aufbau einer zahlentheoretischen Funktion bloß Funktionen von Zahlenvariablen, oder auch Funktionen von Funktionsvariablen, von Funktionsfunktionsvariablen, usw. zugelassen werden. Ackermann hat ein interessantes Beispiel für eine Funktion angegeben, welche sich nicht durch einfache Rekursionen der ersten Stufe definieren läßt. Die Bedeutung seines Beispiels ist die n-te Funktion, die man durch sukzessive Iterationen aus der Addition gewinnt, angewandt auf n und n. Diese Funktion ist durch eine zweifache Rekursion der ersten Stufe definiert; sie läßt sich aber auf der zweiten Stufe auch durch einfache Rekursionen aufbauen. Es führt demnach sowohl die mehrfache Rekursion der ersten Stufe, wie auch die einfache Rekursion der zweiten Stufe über die Klasse der einfach-rekursiven Funktionen der ersten Stufe hinaus. Es scheint lohnend, den Zusammenhang dieser beiden höheren Rekursionstypen zu untersuchen.

Nun habe ich bewiesen, daß die Klasse der mehrfach-rekursiven Funktionen der ersten Stufe mit der Klasse der einfach-rekursiven Funktionen der zweiten Stufe identisch ist. Dieses Ergebnis und sein Beweis läßt sich leicht auch auf höhere Stufen übertragen, ebenso, wie meine Resultate über ein- und mehrfache Rekursionen der ersten Stufe.

Beispiele für rekursive Funktionen auf höheren Stufen, die aber nicht auf einer niedriegeren Stufe rekursiv sind, lassen sich durch eine Ausdehnung des Ackermannschen Beispiels gewinnen. Ein anderes Beispiel liefert die Verallgemeinerung des Diagonalverfahrens.

EINE BEMERKUNG ZUM ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

Von TH. SKOLEM, Bergen.

Hat man einen Zählausdruck der GÖDELschen Normalform

$$(1)\qquad (x_1)(x_2)(x_3)(E\,x_4)\cdots(E\,x_n)K(x_1,\cdots,x_n,F_1,\cdots,F_k),$$

wobei alle F_r zweistellig sind, so kann man einen in bezug auf Erfüllbarkeit damit gleichwertigen der Form

$$(2)\quad (E\,x_1)\cdots(E\,x_k)(x_{k+1})(x_{k+2})(x_{k+3})(E\,x_{k+4})\cdots(E\,x_{k+n})K_1(x_1,\cdots,x_{k+n};\,G)$$

finden, wo G dreistellig ist. Dies gelingt dadurch, daß man

$$G(x_1,x_2,a_r)\sim F_r(x_1,x_2)\qquad (r=1,2,\cdots,k)$$

setzt, wobei die a_r verschiedene Individuen sind.

Man kann aber ausgehend von (1) auch einen damit gleichwertigen Zählausdruck der Gestalt

$$(3)\qquad (E\,x_0)(E\,x_1)\cdots(E\,x_k)(x_{k+1})(x_{k+2})\cdots(x_{k+6})(E\,x_{k+7})\cdots$$
$$(E\,x_{k+m})K_1(x_0,\cdots,x_{k+m};\,R)$$

finden, wo R zweistellig ist. Ist nämlich (1) in I erfüllt, so kann man einen Bereich

$$J=\{a_1,\cdots,a_k,b\}+I+I_1+I_2$$

bilden, wobei I_1 die Menge aller Mengen $\{x\}$ und I_2 die Menge aller Mengen $\{x_1,\{x_2\}\}$ sind, indem x, x_1, x_2 alle Individuen von I durchlaufen, während $a_1,\cdots,a_k,b$ in $I+I_1+I_2$ nicht auftreten. Innerhalb $I+I_1+I_2$ soll $R(x,y)\sim(x\,\varepsilon\,y)$ sein. Weiter soll $R(b,x)$ gelten für alle x aus I, während $R(x,a_h)\sim(x\,\varepsilon\,I_2)\,\&\,F_h(x_1,x_2)$ ist, wobei $x=\{x_1,\{x_2\}\}$. Sonst soll R nie stattfinden. Bedeuten $(x)'$ und $(E\,x)'$ bezw. „für alle x in I" und „es gibt ein x in I", während (x) und $(E\,x)$ sich auf den ganzen Bereich J beziehen, so gilt

$$(4)\quad (x_1)'(x_2)'(Ey)(Ez)[R(x_1,y)\,\&\,R(x_2,z)\,\&\,R(z,y)\,\&\,(R(y,a_1)\sim F_1(x_1,x_2))\,\&\cdots$$
$$\&\,(R(y,a_k)\sim F_k(x_1,x_2))],$$

woraus

$$(5)\qquad (x_1)'\cdots(x_n)'(Ey_{11})\cdots(Ey_{ij})\cdots(E\,z_{ij})\cdots(E\,z_{nn})[\cdots\&\,R(x_i,y_{ij})$$
$$\&\,R(x_j,z_{ij})\,\&\,R(z_{ij},y_{ij})\,\&\cdots\&\,((R(y_{ij},a_h)\sim F_h(x_i,x_j))\,\&\cdots]$$

was mit (1) zusammen

$$(6)\qquad (x_1)'(x_2)'(x_3)'(E\,x_4)'\cdots(E\,x_n)'(Ey_{11})\cdots(Ey_{ij})\cdots(E\,z_{ij})\cdots(E\,z_{nn})$$

$$[K(x_1,\cdots,x_n;F_1,\cdots F_k)\,\&\cdots\&\,R(x_i,y_{ij})\,\&\,R(x_j,z_{ij})\,\&\,R(z_{ij},y_{ij})\,\&\cdots$$

$$\&\,(R(y_{ij},a_h)\sim F_h(x_i,x_j))\,\&\cdots]$$

gibt. Entsteht $K_1(y_{11},\cdots,y_{ij},\cdots,y_{nn},a_1,\cdots,a_k)$ aus $K(x_1,\cdots,x_n,F_1,\cdots,F_k)$, wenn darin jedes $F_h(x_i,x_j)$ durch $R(y_{ij},a_h)$ ersetzt wird, so folgt aus (6)

$$(7)\qquad (x_1)'(x_2)'(x_3)'(E\,x_4)'\cdots(E\,x_n)'(Ey_{11})\cdots(E\,z_{nn})$$

$$[K_1(y_{11},\cdots,y_{ij},\cdots,y_{nn},a_1,\cdots,a_k)\,\&\cdots\&\,R(x_i,y_{ij})\,\&\,R(x_j,z_{ij})\,\&\,R(z_{ij},y_{ij})\,\&\cdots].$$

Außerdem gilt in J die Aussage

$$(8)\qquad (x_1)'(x_2)'(y_1)(y_2)(z_1)(z_2)(R(x_1,y_1)\,\&\,R(x_2,z_1)\,\&\,R(z_1,y_1)\,\&\,R(x_1,y_2)$$

$$\&\,R(x_2,z_2)\,\&\,R(z_2,y_2)\rightarrow\cdots\&\,(R(y_1,a_h)\sim R(y_2,a_h))\,\&\cdots).$$

Da die Elemente x von I durch $R(b,x)$ charakterisiert sind, so kann man in bekannter Weise (7) und (8) zu zwei Ausdrücken (7') und (8') mit denselben Präfixen, aber ohne die Striche, umformen.

Also gilt die Konjunktion von (7') und (8') in J, wenn (1) in I erfüllt ist. Die Umkehrung gilt auch, wenn man unter I die Menge aller x in J versteht, für welche $R(b,x)$ gilt, und die Funktionen F_h durch die Festsetzung

$$R(b,x_1)\,\&\,R(b,x_2)\rightarrow$$

$$(9)\qquad [F_h(x_1,x_2)\sim(Ey)(E\,z)(R(x_1,y)\,\&\,R(x_2,z)\,\&\,R(z,y)\,\&\,R(y,a_h))]$$

definiert. Aus (8) und (9) folgt nämlich

$$(10)\quad (x_1)'(x_2)'(y)(z)[R(x_1,y)\,\&\,R(x_2,z)\,\&\,R(z,y)\rightarrow(F_h(x_1,x_2)\sim R(y,a_h))],$$

woraus

$$(11)\quad (x_1)'\cdots(x_n)'(y_{11})\cdots(y_{ij})\cdots(y_{nn})(z_{11})\cdots(z_{ij})\cdots(z_{nn})[\cdots\&\,R(x_i,y_{ij})$$

$$\&\,R(x_j,z_{ij})\,\&\,R(z_{ij},y_{ij})\,\&\cdots\rightarrow\cdots\&\,(F_h(x_i,x_j)\sim R(y_{ij},a_h))\,\&\cdots].$$

Aus (7) und (11) folgt aber

$$(x_1)'(x_2)'(x_3)'(E\,x_4)'\cdots(E\,x_n)'(Ey_{11})\cdots(E\,z_{nn})$$

$$[K_1(y_{11},\cdots,y_{ij},\cdots,y_{nn},a_1,\cdots,a_k)\,\&\cdots\&\,(F_h(x_i,x_j)\sim R(y_{ij},a_h))\,\&\cdots],$$

woraus

$$(x_1)'(x_2)'(x_3)'(E\,x_4)'\cdots(E\,x_n)'\,K(x_1,\cdots,x_n;F_1,\cdots,F_k)$$

d. h. (1).

Die Konjunktion von (7') und (8') kann mit einem einzigen Präfix der Form

$$(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(x_5)(x_6)(E\,x_7)(E\,x_8)\cdots(E\,x_m)$$

geschrieben werden. Hier kommen noch die konstanten Individuen $a_1, \cdots, a_k, b$ vor; werden sie aber durch Variablen ersetzt, die durch Seinszeichen gebunden werden, so bekommt man einen Ausdruck der Form (2).

Eine ausführlichere Darstellung dieser Betrachtungen mit Anwendung auch auf die Normalformen von KALMÁR und ACKERMANN wird bald in Oslo Vid.-Akad. Skrifter erscheinen.

SUR LA NOTION DE COMPATIBILITE ET LES RAPPORTS ENTRE L'INTUITIONNISME ET LE FORMALISME

Par A. ERRERA, Bruxelles.

Les intuitionnistes distinguent les énoncés et les propositions: celles-ci diffèrent des simples énoncés en ce qu'elles assertent la vérité, la fausseté (ou négation) ou la double négation, que nous appellerons *compatibilité*.

Ils démontrent l'équivalence entre la simple et la triple négation; donc l'incompatible, c'est le faux; et l'on peut asserter une proposition *négative*, s'il est impossible qu'elle soit fausse. Cependant, ils refusent le principe du tiers exclu, même pour les propositions négatives.

Il résulte d'un théorème de M. Glivenko, que le faux classique est le faux brouwérien et que le vrai classique doit être remplacé par le compatible brouwérien. Avec cette différence que, pour un énoncé, les intuitionnistes prétendent ne rien dire, bien qu'ils admettent qu'un énoncé puisse être l'antécédent d'une implication.

Appelons tierce, une proposition compatible, mais non démontrée vraie; alors le vrai classique se répartira en vrai et en tiers et les théorèmes se traduiront comme suit:

1°) Si, dans *l'hypothèse* d'un théorème classique, se trouve une proposition vraie, il faudra distinguer deux cas: elle est vraie ou tierce. Comme on ne parle pas du tiers, on ignore le second cas. Mais l'énoncé apparaît inchangé.

2°) Si, dans la *conclusion* d'un théorème classique, se trouve une vérité non construite, le théorème tombera; mais on aura le droit de considérer la conclusion comme compatible. Tel serait le cas du principe du tiers exclu lui-même: compatible, mais non vrai.

Cependant, il ne peut pas y avoir de proposition tierce: car alors le principe du tiers exclu serait faux, ce qui n'est pas.

Or, pour les intuitionnistes, le principe du tiers exclu n'est pas un axiome; et il ne sera jamais un théorème, car M. Heyting a démontré son indépendance. Alors, s'il n'était pas vrai, il serait une proposition tierce (puisqu'il est compatible). Donc l'hypothèse qu'il n'est pas vrai implique contradiction.

Il reste aux intuitionnistes le droit de ne pas l'employer, mais non celui d'en interdire l'usage.

DIE KORRESPONDENZ DER MATHEMATIKER BERNOULLI

Von O. Spiess, Basel.

Die große Stellung, welche die Basler Mathematiker Bernoulli im Geistesleben des 18. Jahrhunderts einnehmen, veranlaßte im Juni 1935 die *Naturforschende Gesellschaft* in *Basel* den noch größtenteils unedierten *Briefwechsel* dieser Gelehrten für den Druck bearbeiten zu lassen, wozu ihr von privater und staatlicher Seite ansehnliche Mittel gewährt wurden. Nachdem die gegenwärtigen Besitzer der Briefe, die Akademie der Wissenschaften in *Stockholm* und die Herzogliche Bibliothek zu *Gotha* diese Manuskripte (über 6000 an Zahl) bereitwillig zur Verfügung gestellt haben, sind die Vorarbeiten bereits in vollem Gang.

Die wertvollsten Korrespondenzen sind die mit Johann I Bernoulli und seinen Söhnen Daniel und Johann II. Eine mühsame Vorarbeit besteht nun für die Herausgeber in der Aufgabe, die *Originalbriefe* dieser Forscher aufzuspüren, da die allein zur Verfügung stehenden Kopien große Lücken aufweisen. In *Deutschland*, *Holland* und *Italien* sind Briefe zu vermuten, die Hauptmasse ging aber nach *Frankreich* an die L'Hopital, Varignon, Montmort, Mairan, Fontenelle, Maupertuis, La Condamine etc. Es sind Anzeichen dafür da, daß Papiere aus dem Nachlaß einiger dieser Männer noch heute in privatem Besitz vorhanden sind. Um solche Schätze ans Licht zu ziehen, bedarf es aber der Hilfe der Einheimischen. Die Veranstalter der Edition richten daher einen *Appell* an die Gelehrten aller Länder, insbesondere an die Akademien und Bibliotheken, diese Nachforschungen kräftig zu unterstützen und Fundstellen von Bernoullibriefen dem Herausgeber zur Kenntnis zu bringen. Eine weitere Förderung wird später darin bestehen, die ersten Bände der Korrespondenzen nach ihrem Erscheinen in möglichst großer Zahl anzukaufen, um dadurch den Fortgang des Unternehmens sicher zu stellen. Schon jetzt kann der 1933 vorgängig erschienene Briefwechsel Bernoulli-Moivre durch den Verlag *Georg & Cie*, *Basel* bezogen werden.

GOETHES STELLUNG ZUR MATHEMATIK

Von L. Locher, Winterthur.

Die Meinung, daß Goethe sich ausschließlich ablehnend gegen die Mathematik verhielt, ist weit verbreitet. Aber schlimmer noch ist, daß man Goethe solche Motive für diese Ablehnung beilegt, deren Zuschreibung wenig zur sonstigen höchsten Anerkennung paßt. Eine genauere Untersuchung ergibt aber, daß solche Ansichten nur auf Grund ungenügender Sachkenntnisse zustande gekommen sind. Die vielen Äußerungen über Mathematik in den Sprüchen in Prosa, in den grundlegenden naturwiss. Aufsätzen, in der Farbenlehre usw. zeigen, daß sich Goethe gründlich mit der Frage, was Mathematik leisten kann und welche Beziehung sie zur Naturwissenschaft habe, beschäftigt hat. Mathematik ist für ihn das Muster einer Wissenschaft überhaupt, er betrachtet sie als beste Vorbereitung in die Philosophie. Er lehnt es aber ab, daß auf Grund rein mathematischer Schlüsse etwas über die im rein Qualitativen liegende Gesetzmässigkeit eines Erscheinungsgebietes ausgesagt wird. Nähere Angaben mit Zitaten in der Ztschr. „Das Goetheanum" 15. Jg. Nr. 29 (19. Juli 1936) und in der ausführlicheren Abhandlung *„Goethe's Attitude toward Mathematics", National Mathematics Magazine, Vol. XI, No. 3, Dec. 1936.*

NEW INFORMATION CONCERNING JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814—1897)

By R. C. Archibald, Providence, R. I.

This new information was supplementary to that contained in his article in *Osiris*, v. 1, Jan. 1935, p. 85—154. Reference was made to a number of Sylvester family connections such as: to two nieces who became the wives of the Italian counts Gigliucci (brothers); to his connections through a sister and an aunt with the Mozley family, bankers in Liverpool; to his first cousin who became the wife of R. H. Keatinge judge of the probate and prerogative court in Dublin for 25 years; and to a number of other prominent families. A photograph of a portrait of Sylvester exhibited at the Royal Academy in 1842, was shown.

A report was made on hundreds of letters written by Sylvester, to be found at St. John's College, Cambridge, the Mittag-Leffler Institute, Djursholm, and the Norman Lockyer Observatory, Sidmouth. Reference was also made to many letters written by distinguished people to Sylvester. The high esteem in which Sylvester was held by the President and Trustees of the John Hopkins Univ. even 10 years after he had left them was illustrated. His correspondence makes clear that on his recommendation Felix Klein was invited to Johns Hopkins in 1884 and that Klein had almost decided to accept, but lack of a legal pledge with reference to security of tenure finally deterred him.

It was pointed out that Sylvester was expelled from University College London at the age of 14, but was appointed professor there ten years later, and elected a fellow of the Royal Society one year after that, — before he had even received any University degree.

An anecdote about Sylvester when attending a Johnian feast was related and attention was drawn to a passage in the recently published reminiscences of the Egyptologist, Flinders Petrie, whose god-mother was a Miss Marston, whose life had been "crippled by a deep attachment to the mathematician Sylvester; she felt the difference in religion prevented their marriage, and they parted".

The paper is to be published, with much additional material and with two unpublished portraits, in *Isis*.

THE INVENTION OF THE DECIMAL FRACTIONS AND THE APPLICATION OF THE EXPONENTIAL CALCULUS BY IMMANUEL BONFILS OF TARASCON (c. 1350)

By Solomon Gandz, New York City.

Immanuel Bonfils, a French Jewish astronomer and mathematician, flourished c. 1340—77 in Tarascon. In two Mss. of the National Library of Paris there is preserved a short Hebrew treatise of Bonfils, which to our present knowledge, contains the earliest exposition of the decimal fractions and of the application of a unified exponential calculation to both fractions and integers. The invention of Bonfils introduces two new elements: The decimal fractions and the exponential calculus, substituting the addition and subtraction of the exponents for the multiplication and the division of the decimal powers. It is evident that Bonfils is primarily interested in the demonstration of the method of the exponential calculus. The decimal fractions are only introduced in order to obtain a unified scale of powers which will facilitate the calculation with the exponents. In order to obtain the symmetrical arrangement of the decimal powers so that the positive exponents of the integers shall correspond to the negative exponents of the fractions, he had to deprive the units of the degree one, usually ascribed to them from the times of Archimedes (287—12 B. C.), and to characterize them as having the degree zero, or no degree at all. This step represents a radical innovation and a great invention. Since the reception of the sexagesimal fractions by the Greeks there was a deep chasm between the integers and the fractions. The integers had the decimal and the fractions the sexagesimal scale. For the integers the awkward and antiquated rule of Archimedes, according to which $a^m \cdot a^n = a^{m+n-1}$ remained in use while for the fractions the new and elegant rule $\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$ was recognized. Bonfils first reestablished the Babylonian harmony between the integers and fractions, introducing, however, the decimal instead of the sexagesimal base. Then he also introduced the correct and unified exponential calculus as one and the same rule for both integers and fractions, and thus laid the foundation for the invention of the fundamental law of the logarithms.

Now permit me to say a few words more on the history of the exponential calculus, or, as some historians would rather call it "The law of the exponents". The above mentioned rule of Archimedes had the form $a^m \cdot a^n = a^{m+n-1}$, and in this somewhat awkward form it was applied by all the mediaeval mathematicians up to the 16th century. It is a mistake, when some historians of mathematics say that this rule fell into oblivion during the Middle Ages. We find the rule expounded by John of Seville, or Joannes Hispalensis (c. 1140) by Abraham Savasorda (c. 1100), by Ibn Ezra (c. 1150) and by Levi b. Gershon (1288—1344). As regards the sexagesimal fractions, the main rule for the multiplication, in its precise form, $\frac{1}{a^m} . \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$ may be traced back to the arithmetic of al-Khuwārizmī (c. 825), called *Algoritmi de numero Indorum.* Strangely enough, al-Khuwārizmī does not know that the corresponding rule for the division is $a^m : a^n = a^{m-n}$. The exact rule for the multiplication of the sexagesimal fractions $(a^m \cdot a^n = {}^{m+n})$ is also to be found in the Algorismus of the 12th century, called *Liber Ysagogarun Alchorismi* copied between 1163—1168, and supposed to be an elaboration of al-Khuwārizmī's work by Adelard of Bath (c. 1116—1142); in Ibn Ezra's *Sefer ha Mispar*; in Levi b. Gershon's Ma'esch Hosheb, and in Mizrahi's Sefer ha Mispar. Levi b. Gershon says expressly that the rule for the fractions is a^{m+n} and not a^{m+n-1} because in the degrees of the fractions the units are not included. Al-Karkhi (c. 1010), however, goes one step further, by giving both the rules for the multiplication and division of the sexagesimal fractions. Bonfils goes still further and says that one can arbitrarily reach any degree of accuracy in the quotient. If the divisor is a^m and you want to obtain a^n in the quotient, then you have to magnify the dividend into the degree a^{m+n}. — We have thus seen that in the calculation with integers and fractions two sharp inconsistencies had developed.

In first line there were two different scales or bases. The decimal scale for the integers, and the antiquated sexagesimal scale, a relic of old Babylonian mathematics, for the fractions. In second line there were also two different methods of exponential calculation. The clumsy, antiquated formula: $a^m \cdot a^n = a^{m+n-1}$ for the integers, and the correct, classic formula: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ for the fractions. This improved rule had nothing to do with the sexagesimal scale but was due to the fact that, of course, among the degrees of the fractions the units were not counted, hence the degrees of the fractions were identical with the exponents of the sexagesimal powers. Among the integers, however, the units had to be counted as the first degree, and this caused the discrepancy between the degrees and the powers of ten, so that degree a corresponded to exponent $a-1$. This discrepancy was noticed by the Hebrew mathematicians Levi b. Gershon and Ibn Ezra. The latter expressly and clearly states the fact by saying, at the end of his book, that according to true arithmetic, be-heshbon ha-'emet, the degree one ought to be ascribed to the tens, but that the mathematicians, somehow, did place the units in the first degree "in order to make it easier for the pupils", hence they have to subtract one. It is safe to assume that our author Bonfils was well acquainted with the arithmetical works of Ibn Ezra and Levi b. Gershon. Pondering over these problems, the idea may have come to him to remove both dificiencies and difficulties with one device. By introducing the unified decimal scale for both, integers and fractions alike, the degrees had to be determined in a more harmonious way, so that the decimal multiples may correspond in their position to the decimal submultiples. The units thus came to occupy the middle, or boundary-position between the integers and fractions, and had to receive the degree zero. As a result Bobfils was enabled to establish the correct and unified exponential calculus for both the integers and fractions, and to anticipate the fundamental law of the logarithms.

THE HISTORY OF MAGIC SQUARES IN INDIA

By A. N. Singh, Lucknow, India.

In a manuscript of a work on magic, known as *Kakṣapuṭa,* has been found a rule for the construction of a 4-magic square with odd or even totals.[1] One of these squares has been called *Nâgârjunîya*, and is thus attributed to Nâgârjuna, the celebrated alchemist, who flourished about the first or second century after Christ.

[1] *Indian Antiquari*, XI, 1882, p. 83 f.

The Hindu astronomer Varâhamihira (505 A. D) has given a 4-square with total 18, and has called it *sarvatobhadra* ("magic in all respects"). This square is continuous according to the definition of Paul Carus.[1]

In a Jaina inscription found among the ruins of the ancient town of Khajuraho occurs a 4-square with total 34. This belongs to the eleventh century. In the *Tijapapahuṭṭa stotra* we find another 4-square with total 170. The date of this is uncertain, but it can not be later than the fourteenth century.

A complete theory of the construction of magic squares is found in the *Gaṇita-kaumudî*, a work on arithmetic and mensuration, by the Hindu mathematician Nârâyaṇa who flourished in the 14th century. It is probably the first work that contains a mathematical treatment of the subject. It is here that we find for the first time a classification of squares into $4n$, $4n+2$, $4n \pm 1$ types. Nârâyaṇa gives methods for the construction of $4n$ and $4n \pm 1$ squares by the method of superposition of two squares. The method of superposition was discovered in the west by de la Hire (1705) and forms the basis of most of the work that was subsequently done on the subject. Nârâyaṇa gives also the method of the knight's move for the construction of $4n$-squares and the well known method of constructing odd squares by filling parallel to the diagonal. He attributes these methods to previous authors.

A number of interesting squares constructed by novel methods have been found in the writings of the Jaina monks Dharamânanda[2] and Sundarasurî[3] both of whom lived in the fifteenth century. Two of the methods have been discovered recently by Schubert and Andrews respectively.

ZAHLEN AUF EINEM PAPYRUSFETZEN IN DER OSLOER-PAPYRUSSAMMLUNG

Von Poul Heegaard, Oslo.

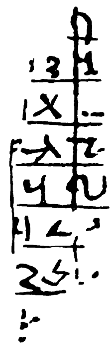
In der Papyrussammlung der Universitätsbibliothek zu Oslo befindet sich ein kleines unregelmäßiges Stück, ungefähr 4.3 × 1.4 cm. groß (P. Oslo inv. 1336). Es stammt von Tebtunis in Fayûm und ist wahrscheinlich aus dem 2. bis 4. Jahrhundert nach Chr. Die zwei Zeichen in der 7. Zeile haben eine so große Ähnlichkeit mit den Ziffern 2 und 3, daß man bei

[1] W. S. Andrews, *Magic squares and cubes*, Chicago, 1908, p. 125.

[2] *Catuḥṣaṣti-yogini-mandal stuti* of Dharmânanda.

[3] The squares occur in a *stotra* by Sundarasurı.

einer ersten ganz oberflächlichen Betrachtung sich fragen könnte, ob hier indischer Einfluß sich äußert. Das ist aber schon wegen des Zeitpunkts ganz unwahrscheinlich. Außerdem befinden sich solche Zahlzeichen, die Ähnlichkeit mit 2 und 3 haben, auch unter den alten hieratischen und demotischen Zahlzeichen. Mehrere von den Zeichen sind übrigens ähnlich solchen Zeichen, z. B. das in Zeile 1 (= 5), das rechts in Zeile 2 und das links in Zeile 5. Ich bin nicht sachkundig und deshalb wage ich nicht, Vermutungen über die anderen Zeichen — ob sie Zahlen oder Worte bedeuten — zu äußern. Die Absicht dieser wenigen Worte ist nur die Sachkundigen auf dieses Stückchen Papyrus aufmerksam zu machen. Ich überschätze seine Bedeutung nicht. Das Material von altägyptischen Zahlzeichen ist aber so spärlich daß man jedes Vorkommen sorgfältig rubrizieren soll.



Professor O. Neugebauer bemerkt hierzu: Soweit ich sehe, lassen sich sämtliche Zeichen ganz ungezwungen im Rahmen des üblichen spätägyptischen Schriftsystems deuten. Z. B. sieht die Präposition *m* wie eine 3 aus (Zeile 2 links), in Zeile 3 links steht ein Ackermaß $\left(\frac{1}{4}\text{ Arure}\right)$, in Zeile 6 zwei Zeichen für Hohlmasse $\left(\frac{1}{2}\text{ und }\frac{1}{64}\text{ Scheffel}\right)$. Die Linierung ist in dieser Zeit ganz üblich, der Vertikalstrich könnte eine Kolumnentrennung sein. Ich würde das Bruchstück als einem eine landwirtschaftliche Abrechnung enthaltenden hieratischen Papyrus angehörig ansehen.

BEMERKUNGEN ZUM NACHLEBEN DER BABYLONISCHEN MATHEMATIK

Von Kurt Vogel, München.

Herr Neugebauer hat in seinem Vortrag am 16. Juli einem größeren, nicht ausschließlich historisch interessierten Kreis einen Überblick gegeben über die Zusammenhänge der babylonischen mit der griechischen Mathematik. In Ergänzung hiezu sollte vor der historischen Sektion die Bedeutung der babylonischen Tradition an zwei konkreten Einzelbeispielen hervorgehoben und insbesondere auch gezeigt werden, daß tatsächlich von einem bereits algebraischen Charakter der babylonischen Mathematik gesprochen werden muß.

Das erste behandelte Problem war das der quadratischen und biquadratischen „Gleichungen". Die Verwandtschaft zwischen babylonischer und griechischer Mathematik tritt hier klar zu Tage und zwar nicht nur in der Art der Aufgabenstellung und der systematischen, vom Einfachen zum Komplizierten fortschreitenden Anordnung der Beispiele, sondern vor allem auch in der verwendeten Lösungsmethode. Das babylonische Verfahren tritt in der griechischen Mathematik wieder auf, bei EUKLID ins Geometrische übersetzt, bei HERON und DIOPHANT wieder in arithmetischer Form; zum Teil wird dort die Methode explizit beschrieben. Ein neuerdings von THUREAU-DANGIN mitgeteiltes Beispiel ist einerseits aufs engste verwandt mit einer Aufgabe bei DIOPHANT und paßt andrerseits mit seinen Zahlenwerten genau an den Anfang der babylonischen "Serientexte". Das Fehlen der Lösungsmethode in den Serientexten hat zu der Annahme geführt, daß es sich hier nur um ein billiges Erraten und nicht um ein Berechnen der Lösung handelte. Demgegenüber wird in dem genannten Beispiel die exakte Lösungsformel vorgerechnet.

Das zweite behandelte Problem wurde auch erst in jüngster Zeit veröffentlicht. Es stammt aus etwa —2000 und gehört zu den aus der ägyptischen Mathematik bekannten Aufgaben von der Form

$$\left(\frac{x}{a} + b\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{x}{a} + b\right) + \cdots = d.$$

Diese Art von Aufgaben, deren geschachtelte Form durch die Lösung von rückwärts bedingt erscheint, läßt sich über die griechische und armenische Mathematik bis in die spätbyzantinischen Aufgabensammlungen hinein verfolgen. Auch die verwendete altbabylonische Lösungsmethode findet sich später in der ägyptischen und muslimischen Mathematik wieder.

Wenn man unter Algebra — mit HANKEL — die Anwendung arithmetischer Operationen auf zusammengesetzte Zahl- und Raumgrößen versteht, so ist sie bereits in der babylonischen Mathematik entwickelt. Wir sehen sie in der Systematik und Symbolik der Serientexte, in den Lösungsformeln oder in Aufgaben, in denen mit inhomogenen Ausdrücken operiert wird. Und wenn in einer babylonischen Zinseszinsrechnung verlangt wird, daß der Zins von der Form einer Quadratzahl n^2, einer Kubikzahl n^3 oder einer „Kubik-minus-1-Zahl" $n \cdot n \cdot (n-1)$ sein soll, so kann man nicht mehr von einer lediglich praktisch orientierten Mathematik sprechen. Wir haben eine reine Mathematik vor uns mit ausgesprochen algebraischen Zügen und erkennen die Quellen, aus denen DIOPHANT, der griechische Meister der Algebra schöpfen konnte.

ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK IN UNGARN

Von J. Jelitai, Budapest.

Eine kurze Darstellung meiner bisherigen Forschungsergebnisse über die Geschichte der Mathematik an der Budapester Pázmány-Universität, die 1935 die 300. Wiederkehr ihres Gründungstages feierte. Gegründet von Kardinal Pázmány als eine Jesuiten-Universität, wurde sie nach der Auflösung des Ordens als königl. ungarische Universität 1777 nach Buda und 1784 nach Pest verlegt. Das Landesarchiv in Budapest ist die Fundgrube meiner diesbezüglichen Forschungen, die von Prof. v. Dávid veranlaßt wurden. Ich übergehe die Jesuitenperiode und fange 1774 mit dem Auftreten der höheren Mathematik im öffentlichen Unterricht an. Der erste Professor matheseos sublimioris per concursum constitutus ist J. Mitterpacher. Wie früher gab es auch damals einen Professor matheseos elementaris pro logicis: A. Dugonics und seit 1777 auch einen dritten Mathematiker: den Professor matheseos practicae: F. Rausch. Es erhalten schon im Jahre 1782 sechs repetentes ordinarii stipendiati ex mathesi sublimiore: eminenter. Nach dem Tode Mitterpachers erhielt sein Schüler: J. Pasquich im Jahre 1788 seinen Lehrstuhl auf Grund einer schönen Preisarbeit. Die zeitgenössische Literatur schreibt anerkennend von seinen Werken. Er widmete König Leopold II. ein Buch, der ihm dafür eine goldene Kette verlieh. Ein Testimonium Facultatis Philosophicae Pestiensis aus dem Jahre 1796 beweist, daß seine Hörer (durchschnittlich 2—5, im Alter von 19—24) ex calculo differentiali, integrali, geometriaque sublimiore geprüft wurden. Pasquich legte 1797 seine Professur nieder. Ihm folgte F. Bruna, dessen Lehrplan einstimmig von der Fakultät angenommen wurde. Den Lehrstoff zählt er auf 5 Folio-Halbseiten auf, mit 63 Hinweisen auf die Literatur. Seine ersten Hörer sind 6 Repetenten, 1 absolvierter Philosoph, 1 Calcograph und 1 Jurist. Im nächsten Schuljahr hatte er schon 11 Schüler im Alter von 19—27. Die Zahl seiner Hörer schwankt später zwischen 5 und 19 und sinkt 1817 auf 3. Er meldet 1807 dem Statthaltereirat: se mathesim sublimiorem non dictando sed explicando tradere. Pasquich wollte als Direktor der Ofner Sternwarte einen Schüler von Gauß als Adjunkten haben. Ich fand einen Brief (vom 30. Juli 1814) von Gauß und Teile von zwei früheren Briefen von ihm, wo er Gerling und Encke empfiehlt. Encke bat Pasquich in einem bis jetzt auch unveröffentlichten Brief um eine Frist.

Der elfte „liber regius" von G. Bethlen im Budapester Landesarchiv enthält eine französische Geometrie auf 45 Folio-Seiten. Text, Schreibart, Wasserzeichen des Papiers und der übrige Inhalt des Manuskriptes sprechen für die Zeit um 1600.

SECTION VIII

Pédagogie

A METHOD FOR DEMONSTRATING THE QUALITATIVE PROPERTIES OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY MEANS OF CINEMATOGRAPH FILMS

By R. A. FAIRTHORNE, Farnborough.

The object of this method is to help students to acquire the same understanding of certain mathematical conceptions as they have, through acquaintance with mechanisms, of mechanics and physics. In particular it may be used to demonstrate the qualitative properties of functions commonly defined as the solutions of certain differential equations.

In essence the films consist of moving diagrams of a differential analyzer, as used at the Massachusetts Institute of Technology, Manchester, and Oslo, drastically reduced to the most simple visual terms. To this extent they may be regarded as working models, whose extreme simplicity is due to the anarchic physics that result from the absence of natural law in the cinematograph image. Owing, however, to the fact that the essential elements of the film are types of motion, rather than shapes, and that these elements represent the fundamental operations of mathematics and can be compounded to any reasonable extent, the method is flexible enough to be regarded as a kinetic notation for the type of problem considered.

The paper is illustrated by a specimen film dealing with the equation $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$, made by the author in collaboration with Mr. B. G. D. Salt.

BELIEBIGES WURZELZIEHEN ALS RECHNUNGSART OHNE LOGARITHMEN

Von HANS PRZIBRAM, Wien.

Durch die Anwendung elementarer Mathematik auf biologische Probleme kam ich in die Lage dem Wurzelziehen ohne Benützung von Logarithmentafeln nachzugehen. Da es in pädagogischer Hinsicht von Nutzen sein dürfte ohne Einführung des Begriffes eines Logarithmus Wurzelziehen praktisch vornehmen zu können, so erlaube ich mir hierüber zu berichten. Vor diesem Auditorium braucht nicht erst betont zu werden, daß die in den Mittelschulen gelehrte Ableitung des Wurzelziehens aus dem Polynomialsatze kaum für die dritte, sicher nicht mehr für die fünfte Wurzel verwertbar ist. (Dasselbe gilt von der kürzlich durch M. MASSON, Bulletin de Saint-Cloud Avril-Juillet 1936 n° 2—3, p. 45, bekantgegebenen „Méthode nouvelle pour extraire les racines carrées ou cubiques", auf die mich

M. Fréchet aufmerksam zu machen die Liebenswürdigkeit hatte.) Von meinen, wie eine Rundfrage bei angesehenen Mathematikern ergab, anscheinend neuen Methoden seien die folgenden herausgegriffen:

I. Methoden der Faktorenzerlegung.

a) Division der zu radizierenden Zahl der Reihe nach durch beliebige kleinere Zahlen, welche selbst Potenzen sind mit dem Exponenten, der demjenigen der zu ziehenden Wurzel entspricht. Kommt man endlich auf eine Zahl 1 mit Dezimalen, so wird dieser Dezimalbruch nach der bekannten Methode: Division der Dezimalen durch den Wurzelexponenten bei unveränderter Ziffer 1, weiterbehandelt. Dieser gemischte Bruch wird als letzter Faktor mit den früher erhaltenen Basen der verwendeten Teilpotenzen multipliziert.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Beispiel:} & \sqrt[3]{56,\underbrace{376,\ 400}} = 100\times 3\times 1{\cdot}26\times 1{\cdot}0147 = 383{\cdot}5566 & & & \\
& 56{\cdot}3764 : 27 = \ 2{\cdot}088 & \text{log. ber.} & 383{\cdot}55 \\
& 2{\cdot}088 : 2 = 1{\cdot}044 & \text{Abweichung} & 0{\cdot}0066 \\
& 1{\cdot}\underline{|044} : 3 & & < 3\ ‱
\end{array}
$$

b) In ähnlicher Weise verfährt man bequemer, wenn man sich zuerst nach Heraushebung der Zehnerpotenzen eine Reihe von Potenzen einer beliebigen Ziffer aufstellt bis zu jener Potenz, welche denselben Exponenten wie die gewünschte Wurzel besitzt. Kommt man nach fortgesetzter Division unter die Größe dieser Potenzbasis herab, so wählt man eine passende zweite Potenzreihe mit kleinerer Basis zum weitergehen.

$$
\begin{array}{lrll}
 & & 5^5 = 3125;\ 2^5 = 32 & \\
\text{Beispiel:} & \sqrt[5]{321578600} \ : 3125 = & 102905{\cdot}17 & \ldots 5 \\
 & 102905{\cdot}17 : 3125 = & 32{\cdot}92964 & \ldots 5 \\
 & 32{\cdot}92964 : \ 32 = & 1{\cdot}02905 & \ldots 2 \\
 & 1{\cdot}\underline{|02905} : \ 5 = & 1{\cdot}00581 & \\
 & 5\times 5\times 2\times 1{\cdot}00581 = & 50{\cdot}2905 & \\
 & \text{log. ber.} = & 50.287 & \\
 & \text{Abweichung} & 0{\cdot}0035 & \\
 & & < 7\ ‱ &
\end{array}
$$

(Die Potenzreihen erhält man kürzer als durch fortgesetzte Multiplikation der Basis mittelst den meinen Wurzelziehmethoden entsprechenden Potenzierverfahren.)

Diese Methode läßt prinzipiell auch das Ziehen von Wurzeln mit gebrochenen Exponenten zu, wobei abgekürzte Multiplikation zur Bildung von Potenzen (oder eine andere Potenzierungsart) verwendet werden kann.

c) Um das Dividieren durch große Zahlen zu vermeiden und doch rasch vorwärts zu kommen, bediene man sich der Potenzen von 5, durch die man dividieren kann, indem man mit einer Potenz von 2 multipliziert und einer entsprechenden Zehnerpotenz dividiert, was sich besonders bei Quadratwurzeln $\left(5^2 = 25 = \frac{100}{4}\right)$ und Kubikwurzeln $\left(5^3 = 125 = \frac{1000}{8}\right)$ empfiehlt.

Beispiel: $\sqrt[3]{440\,711081} \times \frac{8}{1000} \ldots 5$

$3\,525688{\cdot}648 \quad » \quad \ldots 5$

$28\,205{\cdot}511 \quad » \quad \ldots 5$

$225{\cdot}644 \quad » \quad \ldots 5$

$1{\cdot}|\underline{805 \quad : 3}$

$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 1{\cdot}2683 = 792{\cdot}6875$

log. ber. $= 761{\cdot}0$

Abweichung $\quad 31$

$< 5\ \%$

d) Höhere Genauigkeit erhält man durch Division des letzterhaltenen Faktors mit der Einserstelle 1 in die Zahl 2 und Multiplikation mit der entsprechenden Wurzel von 2, im obigen Beispiele hieße es:

$2 : 1{\cdot}805 = 1{\cdot}1054 \qquad 625 \times 1{\cdot}26 = 787{\cdot}50$

$1{\cdot}|\underline{1054 : 3} \qquad 1{\cdot}03513 \times 787{\cdot}5 \quad = 760{\cdot}8$

log. ber. $\quad 761$

Abweichung $\quad 0{\cdot}2$

$< 3\ ‱$

e) Um die Kenntnis der Wurzeln von 2 nicht zu benötigen, kann der als letzter Faktor geltende gemischte Bruch (z. B. 1·805) in kleinere zerlegt werden, die unter 1·5 hinab fallen $\left(\text{etwa } 1{\cdot}2 = \frac{12}{10}\right)$ und daher dann bei Division der Dezimalen mit der gewünschten Wurzel gute Werte liefern:

Beispiel: $1{\cdot}805 \quad : 1{\cdot}2 = 1{\cdot}\,50417 \ldots \left.\begin{matrix} 1{\cdot}|\underline{2 : 3} = 1{\cdot}06667 \\ 1{\cdot}|\underline{2 : 3} = 1{\cdot}06667 \end{matrix}\right\} 1{\cdot}12734$

$1{\cdot}50417 \quad : 1{\cdot}2 = 1{\cdot}|\underline{25347} \qquad : 3 = 1{\cdot}08449 \times 1{\cdot}12734 = 1{\cdot}22202$

$1{\cdot}22202 \times 625 = 761{\cdot}76250$

log. ber. $\quad 761$

Abweichung $\quad 0{\cdot}762$

$= \quad 1\ ‰$

II. Methoden der Potenzvergleichungen.

a) Man bestimmt die dem Wurzelexponenten entsprechende Potenz von 2, hebt die Potenz von 2 heraus und behandelt weiter wie (vorhin) besprochen.

$$\text{Beispiel: } \sqrt[15]{45925} \qquad 2^{15} = 32\,768$$

$$2\sqrt[15]{45925 : 32768} = 2\sqrt[15]{1^{\cdot}|40153} : 3 = 1^{\cdot}026769$$

$$2 \times 1^{\cdot}026769 = 2^{\cdot}053538$$

$$\text{log. ber.} = 2^{\cdot}0455$$

$$\text{Abweichung} \quad 0.008$$

$$< 4\,‰.$$

b) Die Potenzen von 2 lassen sich allgemein aus der Formel $2^n \doteq 2^{n-10} \times 10^3$ bestimmen.

$$\text{Beispiel: } 2^{40} \doteq 2^{30} \times 1000 \doteq 1073741824000$$

$$\text{Durch Multiplikation erhält man } 2^{40} = 1099511627776$$

$$\text{Abweichung} \quad 257 \times 10^8 \text{ oder } 2\,\%.$$

c) Noch allgemeiner wird die Formel für die ganze Zahl einschließlich der Zehnerpotenzen berechnet: $2^{10m+n} \doteq 2^n \times 1000^m$ oder $2^n \times 10^{3m}$. Eine beliebige Wurzel bis Exponent 100 wird erhalten, indem die zu radizierende Zahl fortgesetzt durch die nach dieser Formel erhaltene Potenz von 2 dividiert wird, die dem Exponenten der Wurzel entspricht. Das Produkt der erhaltenen Quotienten gibt Wurzel auf Ganze genau; weitere Behandlung nach den bereits verwendeten Dezimalbruchmethoden.

$$\text{Beispiel: } \sqrt[99]{864 \times 10^{27}} \qquad 2^{99} = 512 \times 10^{27}$$

$$864 : 512 = 1^{\cdot}|690 : 99 = 1^{\cdot}007$$

$$2 \times 1^{\cdot}007 = 2^{\cdot}014$$

$$\text{log. ber.} = 2^{\cdot}0063$$

$$\text{Abweichung} \quad 0^{\cdot}0077$$

$$< 4\,‰$$

III. Methoden der Zehnerheraushebung (für dritte Wurzel).

a) Multiplikation einer Zahl mit 2, Heraushebung der $\sqrt[3]{2}$ und annähernde Berechnung der Wurzel des Dezimalbruches $1^{\cdot}\ldots$ durch Division der Dezimalen durch 3 oder Multiplikation mit $0^{\cdot}33$. Anstatt dann $\sqrt[3]{2} = 1^{\cdot}26$ in diesen Bruch zu dividieren, wird mit 8 multipliziert und durch 10 dividiert (nämlich $10 : 8 = 1^{\cdot}25$), was auf 1 % genaue Werte liefert.

Beispiel: $\sqrt[3]{543}=\sqrt[3]{543\times2}:\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{1086}:1{\cdot}26=\sqrt[3]{1{\cdot}086\times1000}:126$

$$=\frac{1{\cdot}0287\times10}{1{\cdot}26}\doteq\frac{8\times1028{\cdot}7}{1000}=8{\cdot}2296$$

log. ber. 8·1584

Abweichung 0.71

$< 1\,\%$

b) Genauer ist die wirkliche Division durch 1·26, also

10·287 : 1·26 = 8·164

log. ber. 8·1584

Abweichung 0·0056

$< 7\,‰0.$

Aber gerade die Methode III a ist deshalb von besonderem Interesse, weil die dritte Wurzel ohne eine andere Division als die Verschiebung des Dezimalpunktes bewerkstelligt wird. Es ist somit möglich dritte Wurzeln von Schülern ziehen zu lassen, die des Dividierens nicht mächtig sind!

COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Séance dans la section VIII Mercredi le 15 juillet.

Présidence: H. FEHR (Genève).

M. le Prof. P. HEEGAARD (Oslo) souhaite la bienvenue aux délégués et aux nombreux congressistes présents, puis il prie M. le Prof. Fehr de présider la séance.

M. FEHR, secrétaire-général de la Commission, excuse M. J. Hadamard, membre de l'Institut, qu'une mission scientifique en Chine empêche de prendre part au Congrès. Il salue ensuite la présence de M. David-Eugene Smith (New-York), président d'honneur de la Commission.

Après avoir rappelé l'origine des travaux de la Commission, dont la création remonte au Congrès de Rome (1908), M. Fehr donne un aperçu sommaire de l'exercice écoulé (1932—1936). A l'ordre du jour de la Réunion de Zurich figurait la question très importante de la préparation des professeurs de mathématiques. Le rapport général du professeur Gino

Loria et les rapports des délégations nationales ont été publiés par les soins du secrétaire général[1]. Ils forment un volume de 163 pages qui a été envoye non seulement aux délégués, mais encore aux Ministères de l'Instruction Publique de tous les pays possédant un enseignement supérieur. Cela nous a permis de poursuivre nos démarches tendant à faire connaître les travaux de la Commission dans des pays qui n'ont pas encore de représentant officiel.

Donnant suite au vœu exprimé par le Congrès de Zurich, le Comité Central a invité les Délégations nationales à présenter au Congrès d'Oslo un rapport sur *les tendances actuelles des l'enseignement mathématique* de leur pays. Il a estimé qu'il n'y avait pas lieu d'imposer un questionnaire, la plus grande liberté devant être laissée aux rapporteurs. Il s'est borné à leur recommander que leur exposé signale les progrès réalisés ou les réformes accomplies dans les domaines tels que les suivants:

I. Organisation scolaire. — Nouveaux types d'écoles.
II. Les tendances modernes concernant le but de l'enseignement mathématique. — Les plans d'études.
III. Les examens. — Programmes des certificats conduisant aux études supérieures (baccalauréat, certificat de maturité, etc.).
IV. Les méthodes d'enseignement. — Les liens entre les différentes branches mathématiques. — La place accordée aux mathématiques appliquées. — Les manuels.
V. La préparation des professeurs de mathématiques.
VI. Divers.

C'est en se conformant à ce plan général que les rapporteurs ci-après ont exposé successivement la situation de leur pays:

Allemagne, rapporteur, M. le Prof. W. Lietzmann
Angleterre, rapporteur, M. le Prof. E. H. Neville
Autriche, M. le Prof. G. Kantz résume le rapport de la délégation autrichienne rédigé par M. le Prof. Dintzl.
Danemark, rapporteur, M. le Prof. T. Mollerup.
Hongrie, rapporteur, M. le Dr. T. Jelitai.
Japon, M. le Prof. Kuniyeda résume le rapport imprimé dont il remet un exemplaire à chacun des délégués.
Norvège, rapporteur, M. le Prof. K. Piene.
Pologne, rapporteur, M. le Prof. Straszevicz.
Roumanie, rapporteur, M. le Prof. Tzitzeica.
Suisse, rapporteur, M. le Prof. Fehr.

[1] *Publications du Comité Central*, Série IV, en vente au siège de la Commission, à Genève.

Le Secrétaire-général dépose un court rapport envoyé par M. le Prof. ZERVOS (Athènes) et informe la Commission que la délégation française a annoncé un rapport rédigé par MM. DESFORGE et ILIOVICI.

Il résulte de ces rapports que d'importantes transformations sont envoie de réalisation ou à l'étude dans plusieurs pays.

Ces documents, auxquels viendront encore se joindre les rapports concernant d'autres pays, seront reproduits dans *L'Enseignement Mathématique*, revue internationale, organe officiel de la Commission.

Résolutions. L'Assemblée décide, à l'unanimité, de soumettre à l'approbation du Congrès une résolution à renouveler le mandat de la Commission et dont voici le texte:

Le Congrès invite la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique à poursuivre ses travaux; les objets à mettre à l'étude seront fixés par le Comité central.

Séance administrative. La séance de la section VIII fut suivie d'une séance administrative de la Commission, sous la présidence de M. le Prof. W. LIETZMANN, vice-président. La Commission passe en revue la participation des divers pays et procède à un premier échange de vues sur les questions à mettre à l'étude pour le prochain congrès. Puis elle décide de conférer le titre de «Membre honoraire de la Commission», en raison des services rendus, à MM. les Prof. BEKE (Buda-Pest), BIOCHE (Paris), CASTELNUOVO (Rome), DICKSTEIN (Varsovie), ENRIQUES (Rome), FAID BOULAD Bey (Le Caire), LORIA (Gênes), PETROVITCH (Beograd) et WIRTINGER (Vienne).