COMPTES RENDUS
DU
CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS
OSLO 1936

Tome I

Procès-Verbaux
et
Conférences Générales

COMPTES RENDUS
DU
CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS
OSLO 1936

Tome I

Procès-Verbaux
et
Conférences Générales

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

OSLO 1937

TABLE DES MATIÈRES

Conférences générales.

* Conférence de section, reçue trôp tard pour être insérée dans le tome II.

LISTE DES AUTEURS ET DES ORATEURS

PRÉFACE

Le Tome I des actes contient les procès-verbaux du congrès et les conférences générales, le rapport sur les travaux des deux lauréats des médailles Fields, et une conférence de section, reçue trôp tard pour être insérée dans le tome II.

Le Tome II contient les résumés des conférences de sections. Le comité des publications a reçu des comptes rendus de 201 conférences de sections; le nombre total était 205, si bien qu'il n'en manque que 4 conférences.

Toutes les épreuves ont été soumises aux conférenciers.

On ne trouve dans les comptes rendus, tome I et II, que les conférences qui furent prononcées au congrès, le comité ayant refusé par principe aussi bien que par manque de place de faire imprimer d'autres articles qui nous ont été envoyés.

TRAVAUX PRÉPARATOIRES POUR LE CONGRÈS

A la séance de clôture du Congrès de Zurich, le 12 septembre 1932, le regretté professeur Alf Guldberg, au nom des mathématiciens de Norvège eut l'honneur d'inviter les mathématiciens à Oslo pour le prochain Congrès International. Au grand plaisir des mathématiciens de Norvège cette invitation fut acceptée, et la séance de clôture approuva le projèt que le prochain Congrès aurait lieu à Oslo en 1936.

Un comité d'organisation norvégien avait dèjà au printemps 1932 reçu l'offre de l'appui financier nécessaire de la part de plusieurs des contributeurs mentionnés ci-dessous, de sorte que l'on avait — avant de présenter l'invitation à Zurich — la certitude de pouvoir réaliser le projet du congrès au point de vue économique.

Le Congrès a reçu de l'appui financier des donateurs suivants:

L'association des Sociétés norvégiennes d'assurances sur la vie	kr. 25 000,00
L'association des Banques norvégiennes	» 10 000,00
L'État (Département du Culte et de l'Instruction Publique) ..	» 10 000,00
	kr. 45 000,00

La municipalité d'Oslo offrit aux congressistes und dîner le 15 juillet et La Compagnie des Tramways d'Oslo accorda aux porteurs de l'insigne de congressiste le parcours gratuit sur toutes les lignes de tramways et d'autobus de la Compagnie. Les Chemins de fer de l'État Norvégien accordèrent une réduction de 20 pour cent, pour l'aller et le retour du Congrès.

Les compagnies de navigation suivantes accordèrent une réduction aux congressistes. La Cie « Fred Olsen & Co. », Oslo (Newcastle, Rotterdam, Anvers). La Cie « Søndenfjelds-Norske Dampskibsselskab » (Kiel, Hamburg).

La premiére circulaire d'invitation fut envoyée octobre/novembre 1935 aux mathématiciens, aux académies, universités, écoles de hautes études et sociétés mathématiques au nombre d'environ 6000 exemplaires. Ensuite, le programme définitif fut envoyé à ceux qui avaient répondu au premier appel. Comme il est probable que des comités d'organisation futurs puissent s'y intéresser et en profiter on ajoutera les renseignements suivants:

Les réponses à notre première demande se répartirent de la façon suivante (d'après enumération le 19 janvier 1936):

Participation	Nombre		
	Participants	Personnes adhérentes	Somme
Probable	450	303	753
Possible	309	124	433
Improbable	94	5	99
Somme	853	432	1285

La participation définitive fut:

Participants 487 (108 % des « probables », 57 % de la totalité des réponses).

Personnes adhérentes: 182 (60 % des « probables », 42 % de la totalité des réponses).

Le nombre suivant de ces personnes firent part qu'elles « présenteront peut-être une communication dans une séance de section ».

Parmi les « probables »	299
» » « possibles »	158
» » « improbables »	18
	455

On entendait au cours du Congrès 205 conférences de sections, c'est à dire 68,5 % des « probables », 45,5 % de la totalité des réponses.

Le programme proposé fut réalisé à cela près que messieurs A. Gelfond et A. Khintchine furent empêchés de venir et que par conséquent les conférences annoncées que voici « Théorie des nombres transcendants » et «Hauptzüge der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie » ne furent pas faites.

ORGANISATION DU CONGRÈS

Président d'honneur:

S. A. R. le Prince Héritier de Norvège.

Comité d'honneur:

M. *Nils Hjelmtveit,* Ministre du Culte et de l'Instruction Publique.
M. *Trygve Nilsen,* Président du Conseil Municipal d'Oslo.
M. *Sem Sæland,* Recteur de l'Université d'Oslo.
M. *Fr. Vogt,* Recteur de l'École Supérieure de Technique de Norvège, Trondheim.
M. *L. Loe,* Recteur de l'École Supérieure d'Agriculture de Norvège, Aas.
M. *V. Bjerknes,* Président de l'Académie des Sciences et des Lettres, Oslo.
M. *Ragnvald Iversen,* Président de la Société Royale Norvégienne des Sciences, Trondheim.
M. *B. Helland-Hansen,* Président de l'Institut Chr. Michelsen, Bergen.
M. *Carl Fred. Kolderup,* Directeur du Muséum de Bergen.
M. *H. A. Sommerfeldt,* Président de l'Association des Sociétés Norvégiennes d'assurances sur la vie.
M. *N. Rygg,* Gouverneur de la Norges Bank, Oslo.
M. *E. Sandberg,* Président de l'Association des Banques Norvégiennes.
M. *I. Johansson,* Président de l'Association Mathématique de Norvège.

Comité d'organisation:

M. le Professeur *Carl Størmer,* Oslo, Président; M. le Recteur *M. Alfsen,* Oslo; M. le Dr. *O. P. Arvesen,* Maître de conférences, Trondheim; M. le Prof. *B. H. Bjerke,* Aas; M. le Prof. *V. Bjerknes,* Oslo; M. le Prof. *V. Brun,* Trondheim; M. le Dr. *J. E. Fjeldstad,* Bergen; M. le Prof. *R. Frisch,* Oslo; M. le Prof. *P. Heegaard,* Oslo; M. le Dr. *Th. Hesselberg,* Directeur de l'Institut Météorologique, Oslo; M. le Prof. *E. A. Hylleraas,* Oslo; M. le Dr. *I. Johansson,* Oslo; M. *Fr. Lange-Nielsen,* Directeur du Bureau statistique des Cies d'assurances sur la vie, Oslo; M. le Prof. *R. Tambs Lyche,* Trondheim; M. le Prof. *B. Meidell,* Oslo; M. le Recteur *A. Næss,* Levanger; M. le Dr. *R. Gran Olsson,* Maître de conférences, Trondheim; M. le Prof. *S. Rosseland,* Oslo; M. le Prof. *E. B. Schieldrop,* Oslo; M. le Dr. *H. L. Selberg,* Maître de conférences, Oslo; M. le Dr. *Th. Skolem,* Bergen; M. le Prof. *H. Solberg,* Oslo; M. *N. Solberg,* Actuaire, Oslo; Mlle *E. Stephansen,* Dr. ès Sc., Maître de conférences, Aas; M. le Prof. *H. U. Sverdrup,* Bergen; M. le Dr. *O. M. Thalberg,* Oslo; M. le Prof. *L. Vegard,* Oslo; M. le Prof. *F. Vogt,* Trondheim; M. le Prof. *W. Werenskiold,* Oslo.

Secrétariat:

Secrétaire général: M. le Prof. *Edgar B. Schieldrop.*

Comité exécutif.

M. *Carl Størmer,* Président.
M. *Viggo Brun,* Vice-Président.
M. *Poul Heegaard.*
M. *Fr. Lange-Nielsen.*
M. *Th. Skolem.*
M. *Edgar B. Schieldrop,* Secrétaire.

Comité pour les conférences générales:

M. *Carl Størmer.*
M. *Fr. Lange-Nielsen.*
M. *Edgar B. Schieldrop.*

Comité pour les conférences de sections:

Section I. *M. V. Brun,* Professeur, Norges Tekniske Høiskole, Trondheim.
M. *R. Tambs Lyche,* Professeur, Norges Tekniske Høiskole, Trondheim.

— II. M. *C. Størmer,* Professeur, Astrofysisk Institutt, Blindern, Oslo.
M. *H. L. Selberg,* Maître de conférences, Universitetet, Blindern, Oslo.

— III. M. *P. Heegaard,* Professeur, Universitetet, Blindern, Oslo.
M. le Dr. *I. Johansson,* Universitetet, Blindern, Oslo.

— IV. M. *B. Meidell,* Professeur, Universitetet, Blindern, Oslo.
M. *R. Frisch,* Professeur, Universitetets økonomiske Institutt, Oslo.

— V. M. *V. Bjerknes,* Professeur, Astrofysisk Institutt, Blindern, Oslo.
M. *S. Rosseland,* Professeur, Astrofysisk Institutt, Blindern, Oslo.

— VI. M. *Fr. Vogt,* Professeur, Norges Tekniske Høiskole, Trondheim.
M. *Gran Olsson,* Maître de conférences, Norges Tekniske Høiskole, Trondheim.

— VII. M. le Dr. *Th. Skolem,* Chr. Michelsens Institutt, Bergen.
M. *O. P. Arvesen,* Maître de conférences, Norges Tekniske Høiskole, Trondheim.

— VIII. M. *P. Heegaard,* Professeur, Universitetet, Blindern, Oslo.
M. le Dr. *O. Thalberg,* Bjerregaards gt. 7, Oslo.

Comité des logements:

M. *J. F. Kløcker,* Ingénieur.

Comité des fêtes:

M. *Fr. Lange-Nielsen.*
M. *Tambs Lyche.*
M. *Edgar B. Schieldrop.*

Comité des publications:

M. *Fr. Lange-Nielsen.*
M. *Edgar B. Schieldrop.*
M. *Nils Solberg.*

Comité des dames:

Mmes *Guldberg, Heegaard, Lange-Nielsen, Løvenskiold, Meidell, Schieldrop, Skolem, Størmer, Tambs Lyche.*

PROGRAMME DU CONGRÈS

Lundi, 13 juillet.

20 h.: *Réception* offerte aux membres du Congrès par M. le Recteur de l'Université d'Oslo dans l'Aula. Monsieur le Recteur fut représenté par M. *Poul Heegaard,* Doyen de la Faculté des Sciences.

Mardi, 14 juillet.

8^{50}—10 h.: *Séance d'ouverture* en présence de *S. M. le Roi* dans l'Aula de l'Université. Allocution de M. *Carl Størmer,* président du Comité d'organisation, et discours de bienvenue par M. *Halvdan Koht,* ministre des affaires étrangères. Election du président et des vice-présidents du Congrès. Distribution des médailles Fields.[1]

10^{15}—11 h.: Conférence: *C. Størmer,* Programme for the quantitative discussion of electron orbits in the field of a magnetic dipole, with application to cosmic rays and kindred phenomena.

11^{15}—12 h.: Conférence: *R. Fueter,* Die Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen.

14—16^{30} h.: Conférences de Sections.

17^{30} h.: *S. M. le Roi* reçut les membres du Congrès au Palais Royal.

Mercredi, 15 juillet.

9—10 h.: Inauguration d'un buste de *Sophus Lie,* offert à l'Université d'Oslo et présenté par M. l'avocat *Georg Lous* au nom du Comité des donateurs.

On décida d'envoyer le télégramme de félicitations suivant au professeur Friedrich Engel, Giessen: La séance plénière du Congrès des mathématiciens, assemblée pour le dévoilement d'un buste de Sophus Lie, vous envoie ses félicitations cordiales en vous remerciant de votre travail si précieux pour l'édition des œuvres du maître.

Conférence: *E. Cartan,* Quelques aperçus sur le rôle de la théorie des groupes de Sophus Lie dans le développement de la géométrie moderne.

[1] Protocole de la séance d'ouverture, voir page 40.

10^{15}—11 h.:	Conférence:	*C. L. Siegel,* Analytische Theorie der quadratischen Formen.
—	—	*O. Veblen,* Spinors and projective Geometry.
11^{15}—12 h.:	Conférence:	*J. Nielsen,* Topologie der Flächenabbildungen.
15—18 h.:	Conférences de Sections. Séance de la C. I. E. M.	
20 h.:	Dîner offert par la *Ville d'Oslo* aux membres ordinaires du Congrès à l'hôtel « *Bristol* ».[1]	

Jeudi, 16 juillet.

9^{15}—10 h.:	Conférence:	*E. Hecke,* Neuere Fortschritte in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen.
10^{15}—11 h.:	Conférence:	*O. Neugebauer,* Über vorgriechische Mathematik und ihre Stellung zur griechischen.
—	—	*C. W. Oseen,* Probleme der geometrischen Optik.
11^{15}—12 h.:	Conférence:	*V. Bjerknes,* New Lines in Hydrodynamics.
—	—	*H. Hasse,* Über die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern.

15^{45}—24 h.: Excursion sur le Fiord d'Oslo avec paquebot transatlantique *Stavangerfjord* de la «Norske Amerikalinje». Le matin et pendant toute la matinée il faisait un temps assez incertain; cependant au départ du bateau de « Vippetangen » le soleil dissipa la brume et l'excursion sur le Fjord d'Oslo jusqu'au phare de Færder à l'embouchure du fjord avec le retour à Oslo, fut favorisé par un temps magnifique.

A 18 h. on servit un dîner pour 700 congressistes environ dans quatre salles à manger. M. le professeur *Carl Størmer,* dans une allocution, salua *S. A. R. le Prince Héritier,* Président d'Honneur du Congrès, et *S. A. R. la Princesse Héritière,* qui avaient honoré le Congrès de leur présence à bord du bateau. *S. A. R. le Prince Héritier* répondit par un discours en honneur des mathématiciens et des mathématiques. M. le professeur *Edgar B. Schieldrop,* au nom des mathématiciens de Norvège, rendit hommage aux congressistes étrangers.[2] M. le professeur *Emile Borel,* Paris, répondit au nom des hôtes. A l'aide de haut parleurs tous les discours furent transmis à toutes les salles à manger.

[1] Voir également: Discours, page 51.
[2] Voir aussi: Discours, page 56.

Vendredi, 17 juillet.

9^{15}—10 h.: Conférence: *G. D. Birkhoff,* On the Foundations of Quantum Mechanics.

10^{15}—11 h.: Conférence: *L. J. Mordell,* Minkowski's Theorems and Hypotheses on Linear Forms.

11^{15}—12 h.: Conférence: *L. V. Ahlfors,* Geometrie der Riemannschen Flächen.

— — *J. G. van der Corput,* Diophantische Approximationen.

15—18 h.: Conférences de Sections.

Samedi, 18 juillet.

9^{15}—10 h.: Conférence: *S. Banach,* Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis.

10^{15}—11 h.: Conférence: *M. Fréchet,* Mélanges mathématiques.

— — *N. Wiener,* Gap Theorems.

11^{15}—12 h.: — *Ø. Ore,* The Decomposition Theorems of Algebra.

14—17 h.: Conférences de Sections.

17^{15} h.: Séance de Clôture du Congrès.[1]

Conférences de sections.

Les sections suivants furent formées:

I. Algèbre et théorie des nombres. — II. Analyse. — III. Géométrie et topologie. — IV. Calcul des probabilités, statistique mathématique, mathématique d'assurances et économétrie. — V. Physique mathématique, astronomie et géophysique. — VI. Mécanique rationelle et appliquée. — VII. Logique, philosophie et histoire. — VIII. Pédagogie.

Programme spécial pour les dames.

Des arrangements divers pris pour les dames ont été réalisés d'après le programme suivant:

Mardi, le 14 Juillet, 10—14 h.: Visite en autocars au Musée de Civilisation paysanne à Bygdøy ainsi qu'aux Bateaux des Vikings. Lunch au restaurant « Dronningen ». *Mercredi,* le 15 Juillet, 10—12 h.: Visité du Musée National de Peinture et de Sculpture. 18—22^{30} h.: Excursion à Frognerseteren. Souper à 19 h. *Vendredi, le 17 Juillet,* 14^{30}—18 h.: Excursion en autocars à « Skaret ». Thé chez Mme C. O. Løvenskiold. *Samedi, le 18 Juillet,* 10—12 h.: Sightseeeing en autocars d'Oslo et banlieue.

Lors de l'excursion le 17 juillet une cotisation de reconnaissance parmi les dames étrangères a produit une somme dont bénéficierait un étudiant à l'Université suivant la décision des autorités universitaires.

[1] Protocole de la séance de clôture, page 46.

LES PRÉSIDENTS DU CONGRÈS

PRÉSIDENT D'HONNEUR:

S. A. R. le Prince Héritier de Norvège.

PRÉSIDENT DU CONGRÈS:

M. *Carl Størmer.*

PRÉSIDENTS POUR LES CONFÉRENCES GÉNÉRALES:

Mardi,	14 juillet.	Conférences de MM. C. Størmer et R. Fueter: *Erhard Schmidt.*
Mercredi,	15 juillet.	Conférence de M. E. Cartan: *J. A. Schouten.*
		Conférence de M. C. L. Siegel: *G. Julia.*
		Conférences de MM. O. Veblen et J. Nielsen: *K. Menger.*
Jeudi,	16 juillet.	Conférence de M. Hecke: *H. Bohr.*
		Conférences de MM. O. Neugebauer et V. Bjerknes: *E. T. Whittaker.*
		Conférences de MM. C. W. Oseen et H. Hasse: *E. Lindelöf.*
Vendredi,	17 juillet.	Conférence M. G. D. Birkhoff: *S. Lefschetz.*
		Conférences de MM. L. J. Mordell et J. G. van der Corput: *M. Fujiwara.*
		Conférence de M. L. Ahlfors: *T. Carleman.*
Samedi,	18 juillet.	Conférence de M. S. Banach: *T. Carleman.*
		Conférences de MM. Fréchet et Ø. Ore: *G. Pólya.*
		Conférence de M. N. Wiener: *W. Sierpiñski.*

LISTE DES PRÉSIDENTS DE SECTIONS:

Section	*I* :	Gut, Jarnik, Nagel, Rella.
Section	*II a*:	Bateman, Brelot, Mandelbrojt, Menger.
Section	*II* b:	Milloux, Saxer, Selberg, Speiser.
Section	*II c*:	Cramér, Karamata, Nörlund, Tchakaloff.
Section	*III* :	Veblen.
Section	*III a*:	Freudenthal, Newman, Nielsen, Straszewicz.
Section	*III b*:	Blaschke, Cartan, Kerékjártó, Tzitzéica.
Section	*IV* :	Bowley, Elderton, Riebesell, Steffensen.
Section	*V* :	Hartree, Lemaître, Milne, Oseen.
Section	*VI* :	Drach, Filon.
Section	*VII* :	Fraenkel, Spiess.
Section	*VIII* :	Boulad Bey, Fehr.

LISTE DES DÉLÉGUÉS

L'Union Sud-Africaine.

Gouvernement de l'Union Sud-Africaine:

M. J. P. Dalton, Professeur à University of the Witwatersrand.

M. B. de Loor, à University of Pretoria.

University of Pretoria:

M. B. de Loor, M. Sc., Ph. D. Lecturer à University of Pretoria.

Algérie.

L'Université d'Alger:

M. M. Brelot, Maître de conférences à l'Université d'Alger.

Allemagne.

Gouvernement d'Allemagne:

M. le Dr. W. Lietzmann, Oberstudiendirektor, Professeur à Universität Göttingen.

Berliner Mathematische Gesellschaft:

M. le Dr. G. Hamel, Professeur à Technische Hochschule, Berlin.

Deutsche Mathematikervereinigung, Hannover:

M. le Dr. E. Schmidt, Professeur à Universität Berlin.

M. le Dr. H. Hasse, Professeur à Universität Göttingen.

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, Berlin:

M. le Dr. W. Lietzmann, Professeur à Universität Göttingen.

Friedrich-Wilhelms-Universität, Berlin:

M. le Dr. E. Schmidt, Professeur à Universität Berlin.

Die Georg August-Universität, Göttingen:

M. le Dr. W. Lietzmann, Professeur à Universität Göttingen.

Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen:

M. le Dr. H. Hasse, Professeur à Universität Göttingen.

Königsberger Gelehrte Gesellschaft, Königsberg:

M. le Dr. E. Sperner, Professeur à Universität Königsberg.

Mathematisches Seminar der Universität Giessen:

M. le Dr. H. Geppert, Professeur à Universität Giessen.

M. le Dr. E. Ullrich, Chargé de cours à Universität Giessen.

Mathematisches Seminar der Universität Hamburg:

M. le Dr. W. Blaschke, Professeur à Universität Hamburg.

M. le Dr. E. Hecke, Professeur à Universität Hamburg.

Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin:

M. le Dr. E. Schmidt, Professeur à Universität Berlin.

Reichsverband Deutscher Mathematischer Gesellschaften und Vereine, Berlin:

M. le Dr. G. Hamel, Professeur à Technische Hochschule, Berlin.

Deutscher Verein für Versicherungswissenschaft, Berlin:

M. le Dr. P. Riebesell, Professeur à Technische Hochschule, Berlin.

Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig:

M. le Dr. P. Koebe, Professeur à Universität Leipzig.

Technische Hochschule Berlin, Institut für angewandte Mathematik:

M. le Dr. G. Hamel, Professeur à Technische Hochschule Berlin.

M. le Dr. A. Timpe, Professeur à Technische Hochschule Berlin.

Verein Deutscher Wissenschaftlicher und Leitender Praktischer Versicherungs- u. Wirtschaftsmathematiker.:

M. le Dr. P. Riebesell, Professeur à Technische Hochschule, Berlin.

Westf. Wilhelms-Universität, Münster (Westf.):

M. le Dr. G. Köthe, Professeur à Westf. Wilhelms-Universität.

Les États-Unis d'Amérique.

Gouvernement des États-Unis:

M. O. Veblen, Professeur à Princeton University, N. J.

M. G. D. Birkhoff, Professeur à Harvard University, Cambridge, Mass.

M. H. F. Blichfeldt, Professeur à Stanford University, California.

M. L. P. Eisenhart, Professeur à Princeton University, N. J.

M. S. Lefschetz, Professeur à Princeton University, N. J.

M. V. Snyder, Professeur à Cornell University, Ithaca, N. Y.

M. N. Wiener, Professeur à Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

The Actuarial Society of America, New York:

M. Solomon A. Joffe, New York.

American Mathematical Society, New York:

M. G. D. Birkhoff, Professeur à Harvard University, Cambridge, Mass.

M. H. F. Blichfeldt, Professeur à Stanford University, California.

M. L. P. Eisenhart, Professeur à Princeton University, N. J.

M. S. Lefschetz, Professeur à Princeton University, N. J.

M. M. Morse, Professeur à Princeton University, N. J.

M. V. Snyder, Professeur à Cornell University, Ithaca, N. Y.

M. O. Veblen, Professeur à Princeton University, N. J.

M. N. Wiener, Professeur à Massachusetts institute of Technology, Cambridge, Mass.

American Society of Civil Engineers, New York:

M. le Professeur Dr. F. Vogt, Recteur de l'École Supérieure de Technique de Norvège.

California Institute of Technology, Pasadena:

M. H. Bateman, Professeur à California Institute of Technology, California.

M. J. H. Wayland, Ph. D. Pasadena, Calif.

Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Penn.:

M. L. L. Dines, Professeur à Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh.

M. T. L. Smith, Professeur à Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh.

Columbia University, New York:

M. D. E. Smith, Professeur à Columbia University, New York.

Cornell University, Ithaca, N. Y.:

M. V. Snyder, Professeur à Cornell University, Ithaca, N. Y.

The Franklin Institute of the State of Pennsylvania, Philadelphia:
M. O. Veblen, Professeur à Princeton University, N. J.

Harvard University, Cambridge, Mass.:
M. G. D. Birkhoff, Professeur à Harvard University.

Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.:
M. N. Wiener, Professeur à Massachusetts Institute of Technology.

The Mathematical Association of America, Oberlin, Ohio:
M. R. E. Moritz, Professeur à University of Washington, Seattle, Wash.
M. R. W. Brink, Professeur à University of Minnesota, Minneapolis, Minn.

New York University:
M. R. Courant, Professeur à New York University.

Princeton University, N. J.:
M. L. P. Eisenhart, Professeur à Princeton University.
M. S. Lefschetz, Professeur à Princeton University.

Stanford University, California:
M. H. F. Blichfeldt, Professeur à Stanford University.

United States Naval Academy, Annapolis, Md.:
M. Th. W. Moor, Ph. D. Instructeur à U. S. Naval Academy, Annapolis.

University of California, Berkeley:
M. V. F. Lenzen, Professeur à University of California.
M. Th. Buck, Professeur à University of California.

The University of Chicago, Ill.:
Mme M. I. Logsdan, Professeur à The University of Chicago.

University of Cincinnati, Ohio:
M. I. A. Barnett, Professeur à University of Cincinnati.

University of Michigan, Ann Arbor:
M. A. H. Copeland, Professeur à University of Michigan.

The University of Richmond, Virginia:
Mlle I. Harris, Professeur à University of Richmond.

University of Virginia, Charlottesville:
M. E. J. McShane, Professeur à University of Virginia.

The University of Wisconsin, Madison:
M. J. H. Van Vleck, Professeur à Harvard University.

Washington University, St. Louis:
M. P. R. Rider, Professeur à Washington University.

Western Reserve University, Cleveland, Ohio:
M. J. R. Musselman, Professeur à Western Reserve University.

Yale University, New Haven, Conn.:
M. E. Hille, Professeur à Yale University.
M. Ø. Ore, Professeur à Yale University.

Angleterre.

Gouvernement brittanique:
M. L. N. G. Filon, C. B. E., F. R. S., Professeur à University of London.
M. E. T. Whittaker, F. R. S., Professeur à University of Edinburgh.

The British Astronomical Association, London:
M. E. A. Milne, M. A., D. Sc., F. R. S., Professeur à Oxford University.

Cambridge Philosophical Society:
M. F. P. White, M. A. ,Lecturer à University of Cambridge.

The Institute of Actuaries, London:
M. W. Palin Elderton, C. B. E., F. I. A., F. F. A., London.

The London Mathematical Society:
M. W. L. Ferrar, M. A., Lecturer à University of Oxford.
M. le Dr. J. H. C. Whitehead. Lecturer à University of Oxford.

The Mathematical Association, London:
M. E. H. Neville, M. A., B. Sc., F. R. A. S., Professeur à University of Reading.

Royal Astronomical Society, London:
M. W. H. McCrea, Professeur à Imperial College of Science and Technology, London.
M. H. C. Plummer, F. R. S., Professeur à Military College of Science, London.
M. E. A. Milne, M. A., D. Sc., F. R. S., Professeur à Oxford University.

Royal Meteorological Society, London:
M. E. A. Milne, M. A., D. Sc., F. R. S., Professeur à Oxford University.

The Royal Society, London:
M. A. W. Conway, M. A., D. Sc., F. R. S., Professeur à University College, Dublin.
M. L. N. G. Filon, C. B. E., F. R. S., Professeur à University of London.
M. E. T. Whittaker, F. R. S., Professeur à University of Edinburgh.

The University of Bristol:
M. H. R. Hassé, M. A., D. Sc., Professeur à University of Bristol.

University of Cambridge:
M. M. H. A. Newman, M. A., Lecturer à University of Cambridge.
M. W. V. D. Hodge, M. A., Professeur à University of Cambridge.

University of London:
M. L. N. G. Filon, C. B. E., F. R. S., Professeur à University of London.

The University of Oxford:
M. E. A. Milne, M. A., D. Sc., F. R. S. Professeur à University of Oxford.
M. W. L. Ferrar, M. A., Lecturer à University of Oxford.
M. le Dr. J. H. C. Whitehead, Lecturer à University of Oxford.

The University of Sheffield:
M. P. J. Daniell, Professeur à The University of Sheffield.

The Victoria University of Manchester:
M. D. R. Hartree, M. A., M. Sc., Ph. D., F. R. S., Professeur à The Victoria University of Manchester.
M. L. J. Mordell, B. A., M. Sc., F. R. S., Professeur à The Victoria University of Manchester.

Australie.

The University of Melbourne:
M. T. M. Cherry, B. A., Ph. D., Professeur à University of Melbourne.

Autriche.

Gouvernement d'Autriche:
M. le Dr. Tonio Rella, Professeur à Technische Hochschule, Wien.
M. le Dr. Karl Menger, Professeur à Universität, Wien.

Technische Hochschule in Wien:
M. le Dr. Tonio Rella, Professeur à Technische Hochschule, Wien.

Belgique.

Gouvernement Belge:
M. L. Godeaux, Professeur à l'Université de Liège.
M. E. Merlin, Professeur à l'Université de Gand.
M. A. Errera, Professeur à l'Université de Bruxelles.
M. Th. H. J. Lepage, Professeur à l'Université de Bruxelles.
M. G. Lemaitre, Professeur à l'Université de Louvain.
M. A. Delgleize, Chargé de cours à l'Université de Liège.

Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Bruxelles:

M. L. Godeaux, Professeur à l'Université de Liège.

Institut des Hautes Études de Belgique, Bruxelles:

M. A. Errera, Professeur à l'Université de Bruxelles.

M. M. Kraïtchik, Agrégé à l'Université de Bruxelles.

L'Université Catholique de Louvain:

M. G. Lemaître, Professeur à l'Université de Louvain.

Université de Liège:

M. L. Godeaux, Professeur à l'Université de Liège.

M. A. Delgleize, Chargé de cours à l'Université de Liège.

Bulgarie.

Académie Bulgare des Sciences, Sofia:

M. le Dr. L. Tchakaloff, Professeur à l'Université de Sofia.

Université de Sofia:

M. le Dr. L. Tchakaloff, Professeur à l'Université de Sofia.

M. le Dr. N. Obrechkoff, Professeur à l'Université de Sofia.

Canada.

McGill University, Montreal:

M. W. L. G. Williams, Professeur à McGill University.

The University of Alberta, Edmonton, Alberta:

M. J. W. Campbell, M. A., Ph. D., Professeur à University of Alberta.

M. E. S. Keeping B. Sc., D. I. C., Professeur à University of Alberta.

University of Toronto:

M. J. L. Synge, M. A., D. Sc., F. R. S. C., Professeur à University of Toronto.

Mlle C. C. Krieger, M. A., Ph. D.

Chine.

National Sun Yat-Sen University, Canton:

M. Liou Tsyun Hyen, Professeur à National Sun Yat-Sen University.

National Tsing Hua University, Peiping:

M. le Dr. N. Wiener, Professeur à Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

Danemark.

Gouvernement danois:

M. le Dr. N. E. Nørlund, Professeur à l'Université de Copenhague.

Association des Actuaires danois:

M. S. Kristensen, President du Conseil d'Assurances de l'État Danois.

L'École Supérieure de Technique de Danemark, Copenhague:

M. le Dr. J. Mollerup, Professeur à l'École Supérieure de Technique de Danemark.

Société Mathématique, Copenhague:

M. le Professeur Dr. D. Fog.

M. le Dr. B. Jessen, Professeur à l'École Supérieure de Technique de Danemark.

Société Royale Danoise des Sciences, Copenhague:

M. le Dr. H. Bohr, Professeur à l'Université de Copenhague.

L'Université de Copenhague:

M. le Dr. N. E. Nørlund, Professeur à l'Université de Copenhague.

Écosse.

Edinburgh Mathematical Society:

M. H. S. Ruse, M. A., D. Sc., Président de la Société.

M. D. E. Rutherford, D. Sc., Chargé de cours à St. Andrews University.

The Faculty of Actuaries in Scotland:
M. W. Palin Elderton, C. B. E., F. I. A., F. F. A., London.

Royal Society of Edinburgh:
M. E. Th. Copson, M. A., D. Sc., Professeur à University College, Dundee.
M. H. S. Ruse, M. A., D. Sc., Chargé de cours à University of Edinburgh.

The University of Edinburgh:
M. H. S. Ruse, M. A., D. Sc., Chargé de cours à University of Edinburgh.

The University of Glasgow:
M. R. A. Robb, M. A., M. Sc., Chargé de cours à University of Glasgow.

The University of St. Andrews:
M. E. Th. Copson, M. A., D. Sc., Professeur à University College, Dundee.

Égypte.

Institut d'Égypte, Le Caire:
M. F. Boulad Bey, Membre titulaire de l'Institut d'Égypte.

Université Égyptienne, Le Caire:
M. Mursi Ahmed, Maître de conférences de l'Université Égyptienne.

Espagne.

Universidad de Zaragoza:
M. le Dr. J. M. Planas Corbella, Professeur à Universidad de Zaragoza.

Esthonie.

L'Université de Tartu:
M. J. Nuut, Chargé de cours à l'Université de Tartu.

Finlande.

Gouvernement finlandais:
M. R. Nevanlinna, Professeur à l'Université de Helsingfors.
M. E. Lindelöf, Professeur à l'Université de Helsingfors.

Académie d'Åbo:
M. le Dr. G. Elfving.

Association des Actuaires finlandais, Helsingfors.
M. R. Nevanlinna, Professeur à l'Université de Helsingfors.

Université de Helsingfors.
M. E. Lindelöf, Professeur à l'Université de Helsingfors.
M. R. Nevanlinna, Professeur à l'Université de Helsingfors.

France.

Gouvernement de la République Française:
M. E. Borel, Membre de l'Institut, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, Professeur à la Sorbonne.
M. E. Cartan, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.
M. J. Drach, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.

Institut de France — Académie des Sciences, Paris:
M. E. Borel, Membre de l'Institut, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, Professeur à la Sorbonne.
M. E. Cartan, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.
M. G. Julia, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.

Institut Henri Poincaré, Paris.
M. E. Borel, Membre de l'Institut, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, Professeur à la Sorbonne.

Société Mathématique de France, Paris:
M. E. Borel, Membre de l'Institut, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, Professeur à la Sorbonne.
M. E. Cartan, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.
M. G. Julia, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.
M. J. Drach, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.
M. M. Fréchet, Professeur à la Sorbonne.
M. M. Potron, Professeur à l'Institut Catholique, Paris.

Société des Sciences Physiques & Naturelles de Bordeaux:
M. H. Milloux, Professeur à l'Université de Bordeaux.

Université d'Aix-Marseille:
M. F. Marty, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille.

Université de Caen:
M. L. Zoretti, Professeur à l'Université de Caen.
M. M. Janet, Professeur à l'Université de Caen.

Université de Clermont:
M. S. Mandelbrojt, Professeur à l'Université de Clermont.

Université de Paris:
M. E. Borel, Membre de l'Institut, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, Professeur à la Sorbonne.
M. E. Cartan, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.
M. J. Drach, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.
M. M. Fréchet, Professeur à la Sorbonne.
M. G. Julia, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.

Université de Rennes:
M. J. Le Roux, Professeur honoraire à l'Université de Rennes.

Grèce.

Société Mathématique de Grèce, Athènes:
M. N. Sakellariou, Président de la Société, Professeur à l'Université d'Athènes.
M. K. Loukas, Vice-Président de la Société, Professeur à l'Université d'Athènes.
M. Ph. Vassiliou, Professeur à l'Université de Thessalonique.

L'Université d'Athènès:
M. N. Sakellariou, Professeur à l'Université d'Athènes.
M. C. P. Papaïannou, Professeur à l'Université d'Athènes.

Université de Thessalonique:
M. Ph. Vassiliou, Professeur à l'Université de Thessalonique.

Hongrie.

L'Académie Hongroise des Sciences, Budapest:
M. F. Riesz, Professeur à l'Université de Szeged.
M. B. de Kerékjártó, Professeur à l'Université de Szeged.

Société Mathématique et Physique »Eötvös«, Budapest:
M. F. Riesz, Professeur à l'Université de Szeged.
M. B. de Kerékjártó, Professeur à l'Université de Szeged.

Inde.

Osmania University, Hyderabad:
M. R. Siddiqi, M. A., D. Sc., Professeur à Osmania University.

University of Lucknow:
M. A. N. Singh, Professeur à University of Lucknow.

Iran.

Gouvernement de l'Iran:
M. le Dr. M. Hessaby, Professeur à l'Université de Téhéran.
M. le Dr. E. Kogbetliantz, Professeur à l'Université de Téhéran.

L'Université de Téhéran:
M. le Dr. E. Kogbetliantz, Professeur à l'Université de Téhéran.

Irlande.

The National University of Ireland, Dublin:
M. A. W. Conway, M. A., D. Sc., F. R. S. Professeur à National University of Ireland.

M. A. O'Rahilly, M. A., B. Sc., Ph. D., Professeur à University College, Cork.

M. M. Power, M. A., B. Sc., Professeur à University College, Galway.

M. P. J. Browne, M. A., D. Sc., Chargé de cours á St. Patrick's College.

Royal Dublin Society:

M. A. W. Conway, M. A., D. Sc., F. R. S. Professeur à National University of Ireland.

M. A. J. McConnell, M. A., M. Sc., D. Sc., D. Sc., F. T. C. D., Professeur à University of Dublin.

Royal Irish Academy, Dublin:

M. A. W. Conway, M. A., D. Sc., F. R. S. Professeur à National University of Ireland.

M. A. J. McConnell, M. A., M. Sc., D. Sc., D. Sc., F. T. C. D., Professeur à University of Dublin.

University of Dublin:

M. A. J. McConnell, M. A., M. Sc., D. Sc., F. T. C. D., Professeur à University of Dublin.

Islande.

Gouvernement d'Islande:

M. le Dr. L. Ásgeirson, Laugar, Islande.

Japon.

Gouvernement japonais:

M. I. Shimomura, Inspecteur d'écoles au Ministère de l'Instruction publique.

M. le Dr. M. Kuniyeda, Professeur à l'Université de Tokyo.

The Imperial Academy, Tokyo:

M. le Dr. M. Fujiwara, Professeur à Tohoku Imperial University.

The Mathematical Association of Japan for Secondary Education, Tokyo:

M. le Dr. M. Kuniyeda, Professeur à l'Université de Tokyo.

National Research Council of Japan, Tokyo:

M. le Dr. M. Fujiwara, Professeur à Tohoku Imperial University.

Tohoku Imperial University, Sendai:

M. le Dr. M. Fujiwara, Professeur à Tohoku Imperial University.

Lettonie.

Gouvernement de Lettonie:

M. A. Lusis, Maître de conférences à l'Université de Lettonie, Riga.

L'Université de Lettonie, Riga:

M. A. Lusis, Maître de conférences à l'Université de Lettonie.

Mexique.

Gouvernement mexicain:

M. Th. L. Torall, Chargé d'affaires du Mexique à Oslo.

Norvège.

Association des Actuaires norvégiens, Oslo:

M. Fr. Lange-Nielsen, Président de l'Association.

M. B. Meidell, Professeur à l'Université d'Oslo.

Association des Ingénieurs norvégiens, Oslo:

M. l'Ingénieur K. F. Oppegaard, M. N. I. F.

L'École Supérieure d'Agriculture de Norvège, Ås:

M. B. Bjerke, Professeur à l'École Supérieure d'Agriculture de Norvège.

L'École Supérieure de Technique de Norvège, Trondheim:

M. le Professeur F. Vogt, Recteur de l'École Supérieure de Technique de Norvège.

Institut Chr. Michelsen, Bergen:
M. le Dr. Th. Skolem, Professeur à l'Institut.
M. le Dr. E. A. Hylleraas, Professeur à l'Université d'Oslo.

Le Musé de Bergen:
M. le Dr. J. Fjeldstad.

La Société Mathématique Norvégienne, Oslo:
M. le Recteur Dr. A. Næss, Levanger.
M. le Lecteur Dr. O. Thalberg, Oslo.
M. le Dr. I. Johansson, Oslo.

La Société Royale Norvégienne des Sciences, Trondheim:
M. V. Brun, Professeur à l'École Supérieure de Technique de Norvège.

Pays-Bas.

Gouvernement du Pays-Bas:
M. W. van der Woude, Professeur à Rijksuniversiteit te Leiden.

Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam:
M. W. van der Woude, Professeur à Rijksuniversiteit te Leiden.
M. le Dr. J. G. van der Corput, Professeur à Rijksuniversiteit, Groningen.
M. le Dr. J. A. Schouten, Professeur à Technische Hoogeschool, Delft.

Rijksuniversiteit, Groningen:
M. le Dr. J. G. van der Corput, Professeur à Rijksuniversiteit, Groningen.
M. le Dr. G. Schaake, Professeur à Rijksunversiteit, Groningen.

Technische Hoogeschool, Delft:
M. le Dr. J. A. Schouten, Professeur à Technische Hoogeschool, Delft.
M. le Dr. H. Bremekamp, Professeur à Technische Hoogeschool, Delft.

Rijksuniversiteit te Leiden:
M. W. van der Woude, Professeur à Rijksuniversiteit te Leiden.
M. le Dr. J. Droste, Professeur à Rijksuniversiteit te Leiden.

Palestine.

Gouvernement de la Palestine:
M. le Dr. A. Fraenkel, Professeur à The Hebrew University, Jerusalem.

The Hebrew University, Jerusalem:
M. le Dr. A. Fraenkel, Professeur à The Hebrew University, Jerusalem.
M. le Dr. B. Amira, Lecturer à The Hebrew University, Jerusalem.
M. le Dr. Th. Motzkin, Lecturer à The Hebrew University, Jerusalem.

Pologne.

Gouvernement polonais:
M. le Dr. W. Sierpiński, Professeur à l'Université de Varsovie.
M. le Dr. S. Dickstein, Professeur honoraire à l'Université de Varsovie.
M. le Dr. S. Zaremba, Professeur à l'Université de Cracovie.
M. le Dr. S. Banach, Professeur à l'Université de Lwów.
M. le Dr. S. Straszewicz, Professeur à l'École Polytechnique de Varsovie.

Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Cracovie:
M. le Dr. S. Zaremba, Professeur à l'Université de Cracovie.
M. le Dr. W. Sierpiński, Professeur à l'Université de Varsovie.

Société Polonaise de Mathématique:
M. le Dr. K. Borsuk.
M. le Dr. S. Eilenberg.
M. le Dr. W. Sierpiński, Professeur à l'Université de Varsovie.
M. le Dr. S. Straszewicz, Professeur à l'École Polytechnique de Varsovie.
M. le Dr. E. Szpilrajn.
M. le Dr. K. Zarankiewicz, Chargé de cours à l'Université de Varsovie.

Société des Sciences et des Lettres de Varsovie:

M. le Dr. W. Sierpiński, Président de la Société, Professeur à l'Université de Varsovie.

M. le Dr. S. Dickstein, Professeur honoraire à l'Université de Varsovie.

L'Université de Cracovie:

M. W. Wilkosz, Professeur à l'Université de Cracovie.

M. T. Wazewski, Professeur à l'Université de Cracovie.

L' Université Etienne Batory à Wilno:

M. A. Zygmund, Professeur à l'Université de Wilno.

L'Université Jean Casimir à Lwów:

M. E. Zyliński, Professeur à l'Université de Lwów.

M. le Dr. S. Banach, Professeur à l'Université de Lwów.

Université de Varsovie:

M. le Dr. W. Sierpiński, Professeur à l'Université de Varsovie.

Roumanie.

Gouvernement roumain:

M. G. Tzitzéica, Professeur à l'Université de Bucarest.

M. le Dr. V. Vâlcovici, Professeur à l'Université de Bucarest.

M. le Dr. D. Barbilian.

M. O. Onicescu, Professeur à l'Université de Bucarest.

Académie Roumaine, Bucarest:

M. G. Tzitzéica, Professeur à l'Université de Bucarest.

Institut Mathématique Roumain:

M. le Dr. R. Raclis, Professeur, Directeur de l'Institut Mathématique Roumain.

L'Université de Bucarest:

M. G. Tzitzéica, Professeur à l'Université de Bucarest.

M. le Dr. V. Vâlcovici, Professeur à l'Université de Bucarest.

M. O. Onicescu, Professeur à l'Université de Bucarest.

M. le Dr. D. Barbilian.

L'Université de Jassy:

M. C. Popovici, Professeur à l'Université de Jassy, Directeur de l'observatoire Astronomique de l'Université de Jassy.

L'Université »Regele Carol II« de Cernăuti:

M. S. Stoilow, Professeur à l'Université de Cernăuti.

Suède.

Gouvernement suédois:

M. T. Carleman, Professeur à l'Université de Stockholm.

L'Académie des Sciences Techniques, Stockholm:

M. C. W. Oseen, Professeur.

L'Académie Royale des Sciences à Stockholm:

M. C. W. Oseen, Professeur.

L'Association des Actuaires suédois, Stockholm:

M. H. Cramér, Professeur à l'Université de Stockholm.

L'Université de Stockholm:

M. F. Carlson, Professeur à l'Université de Stockholm.

L'Institut Mittag-Leffler, Djursholm:

M. T. Carleman, Professeur à l'Université de Stockholm.

La Société Mathématique, Stockholm:

M. H. Cramér, Professeur à l'Université de Stockholm.

La Société Royale des Sciences, Uppsala:

M. T. Nagell, Professeur à l'Université d'Uppsala.

La Société Royale Physiographique à Lund:
M. V. Walfrid Ekman, Professeur à l'Université de Lund.

L'Université de Lund:
M. V. Walfrid Ekman, Professeur à l'Université de Lund.
M. N. Zeilon, Professeur à l'Université de Lund.
M. M. Riesz, Professeur à l'Université de Lund.

L'Université d'Uppsala:
M. T. Nagell, Professeur à l'Université d'Uppsala.

Suisse.

Gouvernement suisse:
M. W. Saxer, Professeur à l'École Polytechnique Fédérale à Zurich.
M. R. Wavre, Professeur à l'Université de Genève, Président de la Société Mathématique Suisse.

Association des Actuaires suisses, Berne:
M. W. Saxer, Professeur à l'École Polytechnique Fédérale à Zurich.

École Polytechnique Fédérale à Zurich:
M. G. Pólya, Professeur à l'École Polytechnique Fédérale.

Université de Bâle:
M. O. Spiess, Professeur à l'Université de Bâle.

Université de Genève:
M. H. Fehr, Professeur à l'Université de Genève.
M. R. Wavre, Professeur à l'Université de Genève.

Université de Neuchâtel:
M. G. L. Du Pasquier, Professeur à l'Université de Neuchâtel.

Université de Zurich:
M. R. Fueter, Professeur à l'Université de Zurich.

Tchécoslovaquie.

Gouvernement tchécoslovaque:
M. le Dr. B. Bydžovský, Professeur à l'Université Charles à Prague.

Académie Masaryk du Travail, Prague:
M. le Dr. K. Dusl, Professeur à l'École Polytechnique de Prague.

Académie Tchèque des Sciences et des Arts à Prague:
M. le Dr. V. Hlavatý, Professeur à l'Université Charles à Prague.

La Haute École Polytechnique Tchèque, Prague:
M. le Professeur Dr. Svoboda, Recteur de la haute École Polytechnique Tchèque.

Société Royale des Lettres et des Sciences de Bohême, Prague:
M. le Dr. B. Bydžovský, Professeur à l'Université Charles à Prague.

L'Université allemande à Prague:
M. le Dr. Ph. Frank, Professeur à l'Université Allemande à Prague.

L'Université Charles à Prague:
M. le Dr. V. Jarník, Professeur à l'Université Charles.

Yougoslavie.

Gouvernement de la Yougoslavie:
M. le Dr. J. Karamata, Chargé de cours à l'Université de Beograd.

LISTE DES MEMBRES DU CONGRÈS

Aabakken, Olav, Cand. mag. (Oslo).
Mme Aabakken.
Abe, Michio (Hambourg).
Ahlfors, Lars V., Prof. (Cambridge, Mass., États-Unis).
Mme Ahlfors.
Ahmed, Mursi (Le Caire).
Akimoff, Michel (Leningrad).
Alexandroff, Paul, Prof. (Moscou).
Alt, Franz, Dr. (Vienne).
Amira, B. Dr. (Jerusalem).
Andersen, A. F., Prof. (Charlottenlund, Danemark).
Andresen, Martin, Aktuar (Oslo).
Archibald, R. C., Prof. (Providence R. I., États-Unis).
Arvesen, Ole Peder, Dosent (Trondheim, Norvège).
Asgeirsson, Leifur, Dr. (Islande).
Aude, Herman T. R., Dr. (Hamilton, N. Y. États-Unis).
Mme Aude.
Aune, Odd, Aktuar (Oslo).
Mme Aune.
Bachiller, Thomas R., Prof. (Madrid).
Badesco, Radu, Prof. (Cluj, Roumanie).
Banach, Stefan, Prof. (Lwów, Pologne).
Barbilian, Dan, Dr. (Bucarest).
Mme Barbilian.
Barnett, I. A., Prof. (Cincinnati, Ohio, États-Unis).
Mme Barnett.
Mlle Naomi Barnett.
Mlle Ethel Barnett.
Barriol, Alfred, Prof. (Paris).
Bary, Nina, Prof. (Moscou).
Bateman, Harry, Prof. Dr. (Pasadena, Calif. États-Unis).
Mme Bateman.
Mlle Margaret J. Bateman.
Beckwith, Ethelwynn R., Prof. (Milwaukee, Wisconsin, États-Unis).
Behnke, Heinrich, Prof. (Münster, Allemagne).
Behrend, Felix, Dr. phil. (Prague).
Bergström, Harald, Fil. lic. (Uppsala, Suède).
Bernstein, Serge (Leningrad).
Beurling, Arne, Docent (Uppsala, Suède).
Biernacki, Miécislas, Prof. (Poznán, Pologne).
Birkhoff, Garrett (Cambridge, Mass., États-Unis).
Birkhoff, G. D., Prof. (Cambridge, Mass., États-Unis).
Mme Birkhoff.
Bjerke, Bjarne, Prof. (Ås, Norvège).
Mme Bjerke.
Bjerknes, Vilhelm, Prof. (Oslo).
Bjørk, Fil. mag. (Ramlösabrunn, Suède).
Blakstad, Egil, Dipl. Ing. (Fredrikstad, Norvège).
Blaschke, Wilhelm, Prof. (Hambourg).
Blichfeldt, H. F., Prof. (Stanford, Calif., États-Unis).
Boehm, Carl, Dr. (Berlin).
Bohr, Harald, Prof. (Copenhague).
Borch, Fredrik, Aktuarkandidat (Oslo).
Borel, Emile, Prof. (Paris).
Borsuk, K. (Varsovie).
Boulad Bey, Farid, Prof. (Le Caire).
Bowley, Arthur L., Prof. (Haslemere, Angleterre).
Brelot, Marcel, Maître de conférences (Alger, Algérie).
Bremekamp, H., Prof. (Delft, Pays-Bas).
Mme Bremekamp.

Brink, R. W., Prof. (St. Paul, Minn., États-Unis).
Mme Brink.
Mme A. A. Phillips.
Mme L. W. Hermann.
Browne, Patrick, Prof. (Maynooth, Irlande).
Brun, Viggo, Prof. (Trondheim, Norvège).
Brune, J., lektor (Oslo).
Mme Brune.
Buch, K. R., mag. scient., cand. mag. (Copenhague).
Mme Buch.
Buck, Thomas, Prof. (Berkeley, Calif., États-Unis).
Bundgaard, Svend, cand. mag. (Copenhague).
Burkhardt, J. J., Dr. phil. (Zurich).
Mme Burkhardt.
Busemann, Herbert, Dr. phil. (Hellerup, Danemark).
Bydžovský, Bohumil, Prof. (Prague).
Mme Bydžovská.
Bøe, Olav, Aktuar (Oslo).
Mme Bøe.
Campbell, J. W., Prof. (Edmonton, Alberta, Canada).
Mme Campbell.
Mlle Campbell.
M. Campbell.
Carathéodory, C., Prof. (Munich).
Carleman, Torsten, Prof. (Djursholm, Suède).
Mme Carleman.
Mlle Britt Hamilton.
Carlson, Fritz, Prof. (Älsten, Suède).
Mme Carlson.
Cartan, Elie, Prof. (Paris).
Mme Cartan.
Mlle Helene Cartan.
Cartwright, M. L., Mlle Dr. (Cambridge, Angleterre).
Cavaillès, Jean (Paris).
Mme Ferrières.
Cerf, Georges, Prof. (Strasbourg).
Cesarec, Rudolf, Prof. (Zagreb, Yougoslavie).
Chern, Shiing-shen, Dr. (Hambourg).
Cherry, T. M., Prof. (Melbourne, Australie).
Christiansen, C. C., Aktuar (Oslo).
Mme Christiansen.
Cole, Nancy, Dr. (Sweet Briar, Virginia, États- Unis).
Colpitts, Julia T., Prof. (Ames, Iowa, États-Unis).
Conway, A. W., Prof. (Dublin, Irlande).
Mlle May Conway.
Mlle Norah Greene.
Cooper, Ralph, Dr. (Belfast, Irlande).
Copeland, Arthur H., Prof. (Ann Arbor, Michigan, États-Unis).
Mme Copeland.
M. Arthur Copeland.
Copeland, Lennie P., Prof. (Wellesley, Mass., États-Unis).
Copson, E. Th., Prof. (Dundee, Écosse).
Corput, J. G. van der, Prof. (Groningen, Pays-Bas).
Courant, Rich., Prof. (New York).
Cowley, Elizabeth B., Dr. (Pittsburgh, Pa., États-Unis).
Coxeter, H. S. M. (Cambridge, Angleterre).
M. Harold S. Coxeter.
Cramér, Harald, Prof. (Djursholm, Suède).
Mme Cramér.
Mlle Marie-Louise Cramér.
Dahlgren, Thorild, Fil. Dr. (Malmö, Suède).
Dalton, John P., Dr. (Johannesburgh).
Daniell, P. J., Prof. (Sheffield, Angleterre).
Mme Daniell.
Dantzig, D. van, Dr. (Wassenaar, Pays-Bas).
Davenport, Harold, Dr. (Cambridge, Angleterre).
Dehn, Max, Prof. (Frankfort-sur-le-Mein, Allemagne).
Delens, Paul, Prof. (Le Havre, France).
Mme Delens.
Mlle Jeanne Delens.
Delgleize, A., Chargé de cours (Liège).
Denizot, Alfred, Prof. (Poznán, Pologne).

Derksen, J. B. D., Dr. (La Haye).
Detchebarne, Suzanne, Prof. (Paris).
Mlle Ledoux.
Devisme, Jacques, Prof. (Tours, France).
Devisme, Odette, Dr. (Clermont-Ferrand, France).
Dickstein, S., Prof. (Varsovie).
Dines, Lloyd L., Prof. (Pittsburgh, Pa., États-Unis).
Douglas, Jesse, Prof. (Cambridge, Mass., États-Unis).
Drach, Jules, Prof. (St. Hilaire, France).
Droste, J., Prof. (Leiden, Pays-Bas).
Drumaux, P., Prof. (Gand, Belgique).
Dunnington, G. Waldo (Illinois, États-Unis).
Dusl, Karel, Prof. (Prague).
Ehresmann, Ch. (Paris).
Ehrnst, Fredrik, Fil. lic. (Stjärnhov, Suède).
Eilenberg, Samuel, Dr. (Varsovie).
Eisenhart, Churchill (Princeton, N. J., États-Unis).
Eisenhart, L. P., Prof. (Princeton, N. J., États-Unis).
Mme Eisenhart.
Mlle Anna Eisenhart.
Mlle Katharine Eisenhart.
Ekman, V. Valfrid, Prof. (Lund, Suède).
Elderton, W. Palin (Londres).
Elfving, Gustav, Dr. Phil. (Åbo, Finlande).
Engström, Howard, Prof. (New-Haven, États-Unis).
Erdös, Paul, Dr. (Budapest).
Errera, Alfred, Prof. (Uccle, Belgique).
Mlle Elisabeth Errera.
Mlle Denise Errera.
Fabricius-Bjerre, Fr., Dr. (Copenhague).
Mme Fabricius-Bjerre.
Fairthorne, Robert Arthur, Dr. (Farnborough, Hants, Angleterre).
Mme Doris Mona Hirst (Mme Fairthorne).
Fasciotti, Ernestina, Prof. (Milan, Italie).
Fehr, Henri, Prof. (Genève).
Feller, Willy, Dr. (Stockholm).
Fenchel, Werner, Dr. phil. (Copenhague).
Mme Fenchel.
Ferrar, W. L., Dr. (Oxford, Angleterre).
Filon, L. N. G., Prof. (Londres).
Finsler, Paul, Prof. Dr. (Zurich).
Fjeldstad, J. Ekman, Dr. (Bergen, Norvège).
Mme Fjeldstad.
Flamant, Mme, Prof. (Strasbourg),
Flamant, Paul, Prof. (Strasbourg).
Flores, Antonio I., Dr. (Madrid).
Földes, Stefan, Stipendiat (Berlin).
Fog, David, Lektor Dr. phil. (Copenhague).
Fraenkel, Adolf, Prof. (Jerusalem).
Frank, Philipp, Prof. (Prague).
Fréchet, Maurice, Prof. (Paris).
Mme Fréchet.
Freudenthal, Hans, Dr. phil. (Amsterdam).
Mme Freudenthal.
Frisch, Ragnar, Prof. Dr. (Oslo).
Frostman, Otto, Docent, Fil. Dr. (Lund, Suède).
Mme Frostman.
Fueter, Rud., Prof. (Zurich).
Mme v. Schulthess-Bodmer.
Fujiwara, Matsusaburô, Prof. (Sendai, Japon).
Færden, Fredrik, Major (Oslo).
Gandz, Solomon, Prof. (New York).
Geppert, Harald, Prof. (Giessen, Allemagne).
Gillis, Joseph, Dr. (Sunderland, Angleterre).
Givens, Wallace (Princeton, N. J., États-Unis).
M. C. M. Hughes.
Godeaux, Lucien, Prof. (Liège)
Golab, Stanislaw, Dr. phil. (Cracovie, Pologne).
Gran, Olaf, Direktør (Oslo).
Mme Gran.
Gran Olsson, R., Dosent (Trondheim, Norvège).
Mme Gran Olsson.
Graustein, Mme (Cambridge, Mass., États-Unis.

Graustein, William C., Prof. (Cambridge, Mass., États-Unis).
Grossmann, K. H., Dr. (Zurich).
Grotdal, Ivar, Sekretær (Oslo).
Mme Grotdal.
Grunsky, Helmut, Dipl. Ing. Dr. (Berlin).
Grünbergs, E., cand. math. (Riga, Lettonie).
Guldberg, Elisabeth, Mme (Oslo).
Guldberg, Sven, Stud. act. (Oslo).
Gumbel, E. I., Prof. (Lyon).
Gustafson, Torsten, Docent (Lund, Suède).
Mme Gustafson.
Gut, Max, Dr. phil. (Zurich).
Haantjes, Johannes, Dr. (Delft, Pays-Bas).
Haenzel, Gerhard, Prof. (Karlsruhe, Allemagne).
Hagstroem, Karl-Gustav, Dr. phil. (Saltsjöbaden, Suède).
Mme Hagstroem.
Hall, Philip, Dr. (Cambridge, Angleterre).
Halpern, Ada, Lic. ès Sc. Math. (Genève).
Hamel, Georg, Prof. (Berlin).
Harbitz, Georg, Aktuarkandidat (Oslo).
Harris, Isabel, Prof. (Richmond, Va., États-Unis).
Hartree, D. R., Prof. (Manchester, Angleterre).
Mme Hartree.
Mlle K. Grunwell.
Hasse, Helmut, Prof. (Göttingen, Allemagne).
Hassé, H. R., Prof. (Bristol, Angleterre).
Mme Hassé.
Haugland, Arne, Student (Oslo).
Hecke, Erich, Prof. (Hambourg).
Heegaard, Poul, Prof. (Oslo).
Mme Heegaard.
Heilbronn, Hans, Dr. phil. (Cambridge, Angleterre).
Heisig, Herbert, Dr. Ing. (Leipzig).
Hessaby, Mahmoud, Prof. (Téhéran, Iran).
Hesselberg, H. T., Dr. phil. (Oslo).
Mme Hesselberg.
Hesselberg, Ivar, Direktør (Oslo).
Mme Hesselberg.
Heywood, H. B., Dr. (North Harrow, Middlesex, Angleterre).
Higman, Graham (Oxford, Angleterre).
Hille, Einar, Prof. (New Haven, Conn., États Unis).
Hirsch, Kurt A., Dr. phil. (Cambridge, Angleterre).
Mme Hirsch.
Hlavatý, Václav, Prof. (Prague).
Mme Hlavatý.
Hoborski, Antoni, Prof. Dr. (Cracovie, Pologne).
Hodge, William, Lecturer, (Cambridge, Angleterre).
Hoel, Trygve, Aktuar (Oslo).
Hofgaard, Else, Mlle (Oslo).
Hofreiter, Nikolaus, Dr. (Vienne).
Horák, Zdenek, Dr. (Prague).
Hostinský, Bohuslav, Prof. (Brno, Tchécoslovaquie).
Hurewicz, Witold, Dr. phil. (Amsterdam).
Hyen, Liou Tsyun, Prof. (Canton, Chine).
Hylleraas, Egil A., Prof. (Oslo).
Mme Hylleraas.
Hössjer, Gustav, Docent (Malmö, Suède).
Idtse, Theodora, Mlle (Chicago).
Institut Mathématique, Faculte des Sciences, Nancy.
Inverarity, William Moffat, Dr. (Renfrewshire, Écosse).
Jaccottet, Charles, Dr. phil. (Lutry, Suisse).
Janet, Maurice, Prof. (Paris).
Mme Janet.
Jarník, Vojtěch, Prof. (Prague).
Mme Jarníková.
Jebsen, G. S., Cand. mag. (Oslo).
Jelitai, József, Dr. (Budapest).
Mme Mária Lajos.
Jessen, Børge, Prof. (Copenhague).
Mme Jessen.
Joffe, Solomon A. (New York).
Mme Joffe.

Johansson, Ingebrigt, Dr. (Oslo).
Johnson, Marie M., Prof. (Oberlin, Ohio, États-Unis).
Mme Ellen Johnson.
Jouravsky, André, Prof. (Leningrad).
Julia, Gaston, Prof. (Paris).
Junnila, Arvo, Mag. phil. (Helsingfors).
Jørgensen, Aage, Cand. mag. (Copenhague).
Kaczmarz, Stefan, Dozent Dr. (Lwów, Pologne).
Kantz, Georg, Prof. (Graz, Autriche).
Karamata, Jovan, Dozent (Zemun, Yougoslavie).
Mme Karamata.
Mlle Nada Stefanović.
Kaufmann, Boris, Dr. phil. (Cambridge, Angleterre).
Keeping, Ernest S., Prof. (Edmonton, Alberta, Canada).
Mme Keeping.
Kerékjártó, B. de, Prof. (Szeged, Hongrie).
Khintchine, A., Prof. (Saratow, U. R. S. S.).
Kivikoski, Ensio, Prof. (Helsingfors).
Kloosterman, H. D., Dr. (Leiden, Pays-Bas).
Knudsen, Arne, Aktuarkandidat (Oslo).
Koebe, Paul, Prof. (Leipzig).
Köthe, Gottfried, Dozent Dr. (Münster, Allemagne).
Kogbetliantz, Ervand, Prof. (Téhéran, Iran).
Mme Kogbetliantz.
Kolmogoroff, André, Prof. (Moscou).
Korínek, Vladimír, Prof. (Prague).
Kraïtchik, Maurice (Bruxelles).
Mme Kraïtchik.
Krieger, Cypra C., Mlle Dr. (Toronto, Canada).
Kristensen, Sigurd, Cand. mag., Président du Conseil d'Assurances de l'État (Copenhague).
Mme Kristensen.
Krygowski, Z., Prof. (Poznán, Pologne).
Kryloff, M. Nicolas, Prof. (Kieff, U. R. S. S.).
Kuniyeda, Motoji, Prof. (Tokyo, Japon).
Lange-Nielsen, Fr., Direktør (Oslo).
Mme Lange-Nielsen.
Larsson, Levin Julius, Ingénieur (Tösse, Suède).
Lauritzen, Svend, Mag. scient. (Copenhague).
Lefschetz, Solomon, Prof. (Princeton, N. J., États-Unis).
Leimanis, Eugène, Chargé de Cours (Riga, Lettonie).
Leja, Francois, Prof. Dr. (Varsovie).
Lemaitre, Georges, Prof. (Louvain, Belgique).
Lenzen, Victor F., Prof. (Berkeley, Calif., États-Unis).
Mme Lenzen.
Lepage, Th. H. J. (Bruxelles).
Lietzmann, Walter, Prof. (Göttingen, Allemagne).
Lindelöf, Ernst, Prof. (Helsingfors).
Linder, Arthur, Dr. phil. (Berne, Suisse).
Livens, G. H., Prof. (Cardiff, Angleterre).
Ljunggren, Wilhelm, lektor, (Bergen, Norvège).
Locher, Louis, Prof. (Winterthur, Suisse).
Lochs, Gustav, Dr. (Kennelbach, Vorarlberg, Autriche).
Logsdon, M. I., Prof. Dr. (Chicago).
Mlle Marie Plapp.
Loor, Barend de, Dr. (Pretoria, Afrique du Sud).
Mme de Loor.
Lorch, E., Dr. phil. (New York).
Loukas, Kessar, Prof. (Athénes).
Lubelski, S., Administrant, (Varsovie).
Lukács, Eugen, Dr. (Vienne).
Luse, Eva May Dr. (Cedar Falls, Iowa, États-Unis).
Mlle Clara Luse.
Lusis, Arveds, Maître de Conférences (Riga, Lettonie).
Mme Lusis.

Løvenskiold, Henny, Mme (Oslo).
McConnell, A. J., Prof. (Dublin, Irlande).
Mme McConnell.
McCrea, W. H., Prof. Dr. (Londres).
Mme McCrea.
McShane, E. J., Prof. (Charlottesville, Va., États-Unis).
Magennis, A. T., Prof. (Cork, Irlande).
Mahler, Kurt, Dr. (Krefeld, Allemagne).
Mandelbrojt, S., Prof. (Clermont-Ferrand, France).
Marke, P. W., Mag. scient. (Copenhague).
Martin, W. T., Dr. (Princeton, N. J., États-Unis).
Marty, Fréderic, Prof. (Marseille).
Mason, Ruth G., Dr. (Frederick, Md., États-Unis).
Matthiesen, Regner S., Cand. mag. (Copenhague).
Mayr, Karl, Prof. Dr. (Graz, Autriche).
Mazur, Stanislaw, Dr. (Lwów, Pologne).
Meidell, Birger, Prof. (Oslo).
Mme Meidell.
Menger, Karl, Prof. (Vienne).
Merlin, Emile, Prof. (Gand, Belgique).
Métral, A., Prof. (Paris).
Mme Métral.
Milicer-Gruzewska, M., Dr. phil. (Varsovie).
Milloux, Henri, Prof. (Bordeaux).
Mme Milloux.
Milne, E. A., Prof. (Oxford, Angleterre).
Molina, Edward C., Switching Theory Engineer (New York).
Mme Molina.
Mollerup, J., Prof. (Copenhague).
Moore, Thomas W., Dr. (Annapolis, Md., États-Unis).
Mordell, L. J., Prof., (Manchester, Angleterre).
Mme Mordell.
Mlle Mordell.
Morenus, Eugenie M., Prof. (Sweet Briar, Va., États-Unis).
Moritz, Robert E., Prof. (Seattle, Wash., États-Unis).
Morley, Frank, Prof. (Baltimore, Md., États-Unis).
Mme Morley.
Morse, Marston, Prof. (Princeton, N. J., États-Unis).
Motzkin, Theodor, Dr. (Jerusalem).
Mme Motzkin.
Mulholland, H. P., Dr. (Newcastle/Tyne).
Mullemeister, Hermance, Mlle (Seattle, Wash., États-Unis).
Mme J. Prins.
Munshower, C. W., Prof. (Hamilton, N. Y., États-Unis).
Mme Munshower.
Musselman, J. R., Prof. (Cleveland, Ohio, États-Unis).
Mme Musselman.
Nagell, Trygve, Prof. (Uppsala, Suède).
Naudy, Marthe, Mlle (Paris).
Nemenyi, Paul, Dr. Ing. (Copenhague).
Neugebauer, Otto, Prof. (Copenhague).
Neumann, Bernhard H., Dr. phil. (Cambridge, Angleterre).
Nevanlinna, Rolf, Prof. (Helsingfors).
Mme Nevanlinna.
Neville, E. H., Prof. (Reading, Angleterre).
Mme Neville.
Mme M. Neville.
Newman, Maxwell, Dr. (Cambridge, Angleterre).
Mme Newman.
Nielsen, Jakob, Prof. (Hellerup, Danemark).
Noether, Fritz, Prof. (Tomsk, U. R. S. S.).
Nordgaard, Martin A., Prof. (East Orange, États-Unis).
Nordlund, J. O., Dr. Fil. (Hudiksvall, Suède).
Norman, Kai, Aktuarkandidat (Bergen, Norvège).
Northrop, E. P., Dr. (Lakeville, Conn., États-Unis).
Mme Northrop.
Nuut, J., Dozent (Tartu, Estonie).
Nyström, E. J., Docent (Helsingfors).
Næss, Almar, Rektor Dr. (Levanger, Norvège).
Nørlund, N. E., Prof. (Copenhague).
Obrechkoff, N., Prof. (Sofia).

Odhnoff, Waldemar, Fil. Lic. (Stockholm).
Offord, Albert Cyril, Dr. (Cambridge, Angleterre).
Oldenburger, Rufus, Dr. (Chicago).
Omara, Mohamed Ali, Dr. (Le Caire).
Onicescu, Octav, Prof. (Bucarest).
Mme Onicescu.
Oppegaard, K. F., Dipl. Ing. (Oslo).
Ore, Øystein, Prof. (New Haven, Conn., États-Unis).
Mme Ore.
Orloff, Chr. (Kieff, U. R. S. S.).
Oseen, C. W., Prof. (Stockholm).
Oss, S. L. van, Dr. phil. (Oegstgeest, Pays-Bas).
Ottestad, Per, Dr. phil. (Oslo).
Pál, S. F., Docent Dr. (Copenhague).
Paatero, Veikko, Dr. phil. (Helsingfors).
Palazzo, Elena, Prof. (Rome).
Mme Palazzo.
Mme Livia de Angelis.
Palmström, Henrik, Aktuar (Oslo).
Mme Palmstrøm.
Pantazi, Alexandre, Prof. (Bucarest).
Mme Pantazi.
Papaïannou, C. P., Prof. (Athénes).
du *Pasquier*, Louis Gustav, Prof. (Neuchâtel, Suisse).
Mme du Pasquier.
Paxton, Mary S. (Fort Maine, Ind., États-Unis).
Perkins, F. W., Prof. (Hanover, New Hampshire, États-Unis).
Mme Perkins.
Mlle G. Perkins.
Perrin, M. Louis (Reims, France).
Persson, K. F. E., Fil. Lic. (Stockholm).
Peschl, Ernst, Dr. (Münster, Allemagne).
Péter, Rózsa, Dr. (Budapest).
Petersen, Richard, Docent Dr. (Copenhague).
Petterson, Erik L., Fil. Lic. (Hässelby, Suède).
M. Curt Laudon.
Mme I. Laudon.
Pfeiffer, Georg, Prof. (Kieff, U. R. S. S.).
Philip, Erik, Civiling. (Stockholm).
Piccard, Sophie, Dr. (Neuchâtel, Suisse).
Mme Piccard.
Piene, Kay, Lektor (Oslo).
Pirenean, Zareh. M., Prof. (Gainsville, Fla., États-Unis).
Planas Corbella, J. M., Prof. (Zaragoza, Espagne).
Pleijel, Åke, Fil. Cand. (Stockholm).
Plummer, H. C., Prof. (Londres).
Mme Plummer.
Pohlhausen, E., Recteur, Prof. Dr. (Danzig).
Poiter, Rey (Madrid).
Pólya, Georg, Prof. (Zurich).
Mme Pólya.
Popken, Jan, Dr. (Groningen, Pays-Bas).
Popovici, Constantin, Prof. (Jassy, Romaine).
Potron, Maurice, Prof. (Paris).
Potter, H. S. A., Dr. phil. (Howdon-on-Tyne, Angleterre).
Power, Michael, Prof. (Galway, Irlande).
Przibram, Hans, Prof. (Vienne).
Mlle Elisabeth Fröhlich.
Raclis, Rodolphe, Prof. (Bucarest).
Rado, Richard, Dr. (Sheffield, Angleterre).
Mme Rado.
Rafael, Henri, Dr. (Liège).
O'Rahilly, Alfred, Prof. (Cork, Irlande).
Ratib, Ismail (Le Caire).
Rees, Mina, Prof. (New York).
Reinhardt, Karl, Prof. (Greifswald, Allemagne).
Reissner, Erich, Dr. Ing. (Berlin).
Rella ,Tonio, Prof. (Vienne).
Mme Rella.
Relton, Frederic Ernest, Prof. (Watford, Angleterre).
Richardt, Thv., Direktør (Oslo).
Rider, Paul R., Prof. (St. Louis, États-Unis).
Mme Rider.
M. W. Rider.
Mlle Peggy Rider.
Riebesell, Paul, Prof. (Berlin).
Riesz, Frédéric, Prof. (Szeged, Hongrie).
Riesz, Marcel, Prof. (Lund, Suède).
Mlle Dr. Mi Holmström.

Robb, Richard, Lecturer, Dr. (Glasgow).
Mlle L. Robb.
Roberts, Maria M., Prof. (Ames, Iowa, États-Unis).
Rosengarten, Adeline, Mlle (Penfield, Pa., États-Unis).
Rosenthal, A., Prof. (Heidelberg, Allemagne).
Rosseland, Svein, Prof. (Oslo).
Mme Rosseland.
Rothberger, Fritz, Dr. phil. (Vienne).
Le Roux, Jean, Prof. (Rennes, France).
Ruse, Harold Stenley, Dr. (Southampton, Angleterre).
Rutherford, D. E., Dr. (Edinburgh).
Mme Rutherford.
Ruud, Ingolf, Dipl. Ing. (Oslo).
Mme Ruud.
Saens, Clemente, Prof. (Madrid).
Sakellariou, Nilos, Prof. (Athénes).
San Juan, Ricardo, Prof. (Madrid).
Saxer, Walter, Prof. (Zurich).
Mme Saxer.
Mlle Anne Nageli.
Schaake, Gerrit, Prof. (Groningen, Pays-Bas).
Schauder, Julius, Dr. (Lwów, Pologne).
Schieldrop, Edgar B., Prof. (Oslo).
Mme Schieldrop.
Schmidt, Erhard, Prof. (Berlin).
Schouten, J. A., Prof. (Delft, Pays-Bas).
Mme Schouten Bacher.
Scire, Pietro, Dr. (Palermo, Italie).
Seifert, Herbert, Prof. (Dresden).
Selberg, Henrik L., Dosent Dr. (Oslo).
Selberg, O. M. L., Rektor, Dr. phil. (Gjøvik, Norvège).
Shimomura, Ichiro, School Superintendent (Tokyo, Japon).
Shover, Grace, Dr. (Bryn, Mawr, Penn., États-Unis).
Siddiqi, M. A., Prof. (Hyderabad, Inde).
Siegel, Carl L., Prof. (Francfort-sur-le-Mein, Allemagne).
Sierpiñski, W., Prof. (Varsovie).
Simons, Lao Genevra, Dr. (New York), Mlle Aurelia B. Simons.
Singh, A. N., Dr. (Lucknow, Inde).
Skolem, Th., Dr. phil. (Bergen, Norvège).
Mme Skolem.
Smith, Clara E., Prof. (Wellesley, Mass., États-Unis).
Smith, D. E., Prof. (New York).
Mme Clara Jewet.
Smith, Percey F., Prof. (New Haven, Conn., États-Unis).
Mme Smith.
Smith, Turner L., (Pittsburgh, Pa., États-Unis).
Snyder, Virgil, Prof. (Ithaca, N. Y., États-Unis).
Mme Snyder.
Solberg, Nils, Aktuar (Oslo).
Mme Solberg.
Sparrow, C. M., Prof. (Charlottesville, Virg., États-Unis).
Mme Sparrow.
Speiser, Prof. (Zurich).
Mme Speiser.
Sperner, Emanuel, Prof. (Königsberg, Allemagne).
Spiess, Otto, Prof. (Bâle, Suisse).
Stafford, Anna, Dr. (Lincoln, Nebr., États-Unis).
Mlle Constance C. Baker.
Steffensen, J. E., Prof. (Hellerup, Danemark).
Stephansen, Elisabeth, Dr. (Ås, Norvège).
Sternberg, Wolfgang, Prof. (Jerusalem).
van Stockum, Wilhelm Jacob, Dr. (Edinburgh).
Stoïlow, Simon, Prof. (Cernauti, Roumanie).
Mme Stoïlow.
Størmer, Carl, Prof. (Oslo).
Mme Størmer.
Stone, Marshall H., Prof. (Cambridge, Mass., États-Unis).
Mme Stone.
Straszewics, Stefan, Prof. (Varsovie).
Stridsberg, Erik, Docent Dr. Fil. (Stockholm).
Stähelin, Helene, Dr. phil. (Zug, Suisse).

Svoboda, Jindrich, Prof. (Prague).
Mme Svoboda.
Synge, John L., Prof. (Toronto, Canada).
Szász, Otto, Prof. (Cambridge, Mass., États-Unis).
Szpilrajn, E., Dr. phil. (Varsovie).
Tambs Lyche, Ralph, Prof. (Trondheim, Norvège).
Mme Tambs Lyche.
Tanaka, Masao (Tokyo, Japon).
Taussky, Olga, Dr. (Cambridge, Angleterre).
Tchakaloff, Lubomir, Prof. (Sofia).
Technische Hochschule (Danzig).
Terradas, Illa, Prof. (Barcelone).
Thalberg, Olaf M., Dr. phil. (Oslo).
Mme Thalberg.
Thébault, Victor, Prof. (Le Mans, France).
Mme Thébault.
Thesen, Gudbrand, Aktuarkandidat (Oslo).
Thompson, John H. C., Dr. (Oxford, Angleterre).
Mme Thompson.
Threlfall, William, Prof. (Dresden).
Thurmann-Moe, Jan, Aktuarkandidat (Oslo).
Mme Thurmann-Moe.
Timms, Geoffrey, Dr. (St. Andrews, Écosse).
Timpe, Aloys, Prof. (Berlin).
Mme Timpe.
Todd, John Arthur, Dr. (Liverpool).
Todd, John, Dr. (Belfast, Irlande).
Torrance, Charles Chapman, Dr. (Cleveland, Ohio, États-Unis).
Mme Torrance.
Torroja, Antonio, Prof. (Barcelone).
Tortorici, Pietro, Prof. (Palermo).
Trier, Gunnar, Cand. act. (Oslo).
Mme Trier.
Tuominen, Jaakko, Mag. phil. (Helsingfors).
Tyler, H. W., Prof. (Washington, États-Unis).
Mme I. H. Phillips.
Tzitzéica, Georges, Prof. (Bucarest).
Tächlind, Sven, Fil. lic. (Uppsala, Suéde).
Ullrich, Egon, Dr. (Giessen, Allemagne).
Vâlcovici, Victor, Dr. (Bucarest).
Mme Vâlcovici.
Vallarta, M. S., Prof. (Cambridge, Mass., États-Unis).
Mme Vallarta.
Vasmoen, Per, Aktuar (Oslo).
Vassiliou, Philon, Prof. (Thessalonique, Gréce).
Veblen, Oswald, Prof. (Princeton, N. J., États-Unis).
Mme Veblen.
Vijayaraghavan, T., Dr. phil. (Dacca, Inde).
van Vleck, J. H., Prof. (Cambridge, Mass., États-Unis).
Mme van Vleck.
Völlm, Ernst Dr. (Zurich).
Mme Völlm,
Vogel, Kurt, Dozent Dr. (Munich).
Vogt, Fredrik, Prof. (Trondheim, Norvège).
Vojtěch, Jan, Prof. (Prague).
Mme Vojtěch.
M. Ing. Jaromir Vojtěch.
Volterra, Vito (Rome).
Voogd, Leen (Hillegersberg, Pays-Bas).
Wackers, Britta, Cand. mag. (Copenhague).
Waddel, Mary E. G., Lecturer (Toronto, Canada).
Walker, Buz. M., Dr. (Starkville, Miss., États-Unis).
Mme Walker.
Walmsley, Charles, Prof. (Halifax, Canada).
Mme Walmsley.
Wavre, Rolin, Prof. (Genève).
Wayland, James H., Dr. (Pasadena, Calif., États-Unis).
Mme Wayland.
Ważewski, Tadeusz, Prof. (Cracovie, Pologne).
Weinstein, Alexander, Dr. (Genève-Cologny, Suisse).
Weyl, Hermann, Prof. (Princeton, N. J., États-Unis).
Mme Weyl.

Wheeler, Anna Pell, Prof. (Bryn Mawr, Penn., États-Unis).
White, Francis P., Dr. (Cambridge, Angleterre).
Whitehead, J. H. C., Dr. phil. (Oxford, Angleterre).
Mme Whitehead.
Whittaker, E. T., Prof. (Edinburgh).
Mlle Helen Whittaker.
Wiancko, Frances H. (Ontario, Canada).
Widder, D. V., Prof. (Cambridge, Mass., États-Unis).
Wiener, Norbert, Prof. (Cambridge, Mass., États-Unis).
Mme Wiener.
Wilkosz, W., Prof. (Cracovie, Pologne).
Williams, W. L. G., Prof. (Montreal, Canada).
Mme Williams.
Mlle Hester Williams.
Mlle Christine Williams.
Williamson, John, Dr. (Dundee, Écosse).
Mme Williamson.
Wilson, Albert H., Prof. (Haverford, Penn., États-Unis).
Mme Wilson.
Wold, Herman, Fil. Lic. (Stockholm).
van der Woude, Willem, Prof. (Leiden, Pays-Bas).
Mme van der Woude.
Wu, Ta-Jen, Prof. (Hambourg).
Young, Mabel M., Prof. (Wellesley, Mass., États-Unis).
Zarankiewicz, K., Docent (Varsovie).
Zaremba, Stanislas Christian (Wilna, Pologne).
Zaremba, Stanislas, Prof. (Cracovie, Pologne).
Mme Zaremba.
Zoretti, Ludovic, Prof. (Caen, France).
Zygmund, A., Prof. (Wilna, Pologne).
Zylinski, E., Prof. (Lwów, Pologne).

RÉPARTITION DES MEMBRES DU CONGRÈS PAR DIFFÉRENTS PAYS

	Participants:	Personnes adhérentes:
L'Union Sud-Africaine	2	1
Algérie	1	—
Allemagne	35	2
Australie	1	—
Autriche	10	2
Belgique	9	3
Bulgarie	2	—
Canada	7	6
Chine	1	—
Danemark	22	5
Égypte	3	—
Espagne	8	—
Esthonie	1	—
États-Unis	86	56
Finlande	8	1
France	28	13
Grande-Bretagne	48	18
Grèce	4	—
A transporter	276	107

	Participants:	Personnes adhérentes:
Transporté	276	107
Hongrie	5	1
Inde	3	—
Iran	2	1
Irlande	6	3
Islande	1	—
Italie	5	2
Japon	4	—
Lettonie	3	1
Norvège	59	25
Pays-Bas	15	4
Palestine	5	1
Pologne	25	4
Roumanie	9	6
Suède	26	10
Suisse	20	11
Tchécoslovaquie	10	3
U. R. S. S.	11	—
Yougoslavie	2	3
Total	487	182

PROTOCOLE DE LA SÉANCE D'OUVERTURE

dans l'Aula de l'Université, mardi, 14 juillet, 9 heures.

Monsieur le Professeur *Carl Størmer,* président du comité d'organisation, ouvrit le Congrès par l'allocution suivante:

Votre Majesté, Mesdames, Messieurs.

J'ai l'honneur au nom du comité d'organisation de vous souhaiter la bienvenue à tous, à ce congrès.

C'est une grande joie pour les mathématiciens norvégiens de voir qu'un si grand nombre de nos collègues ont répondu à notre appel de venir à Oslo prendre part au travail du Congrès, et renouveler de vieilles amitiés et en créer de nouvelles par-delà les obstacles qu'opposent les différents pays, nations et races.

Environ 500 mathématiciens sont venus ici de presque tous les pays du monde.

Nous espérons que la fatigue du voyage que tant des membres de ce congrès aura dû subir pour y prendre part, sera compensée par le résultat qui ressortira pour eux du riche programme scientifique de ce congrès. Et nous ferons tout notre possible pour qu'aussi bien les membres actifs du congrès que ceux de leurs parents qui les auront accompagnés gardent un souvenir agréable de leur séjour à Oslo.

Plus peut-être que dans aucun autre domaine de la culture les résultats acquis par les sciences sont internationaux. Les découvertes scientifiques faites par les hommes de sciences d'un pays peuvent être aussitôt utilisées dans le monde entier. Ceci s'applique tout particulièrement aux mathématiques. Les vérités mathématiques sont en effet universelles et ses moyens d'expressions internationaux. En conséquence la collaboration par delà les frontières devraient être plus naturelle pour les mathématiciens que pour tous les autres savants. Nous voyons aussi que nos congrès ont toujours obtenu un succès qui témoigne clairement du désir de collaboration internationale des mathématiciens.

Évidemment un mathématicien qui fait une découverte peut en faire part au monde entier en la publiant, mais en en faisant part de vive voix dans un congrès il dispose des moyens plus favorables d'atteindre à un public spécialement interessé. De ceci témoigne le très grand nombre de conférences qui auront lieu à ce congrès.

Et pourtant il se peut que l'œuvre la plus importante d'un congrès comme celui-ci n'est pas celle qui résulte de ces conférences, mais de la conversation familière entre mathématiciens des différentes parties du monde. L'échange direct d'idées sous forme de conversation a une importance qui sans qu'on puisse encore en trouver la trace dans les comptes-rendus du congrès, se manifestera pourtant dans la littérature mathématique des années qui vont suivre.

C'est surtout pour les jeunes mathématiciens que de telles rencontres ont de l'importance, grâce à l'orientation qu'elles leur donnent et à la stimulance qu'ils acquièrent en entendant des paroles encourageantes de vieux et illustres collègues.

Nous savons tous qu'à notre époque on se spécialise en tout et on connaît fort bien le danger qui en résulte, mais c'est justement là que le congrès aura une grande importance, en faisant connaître la manière de formuler et résoudre les problèmes dans d'autres branches des mathématiques. Le congrès contribuera de cette facon à donner aux membres du congrès une vue plus large de la place de leur travaux dans l'ensemble des sciences mathématiques.

Et justement à notre époque il est d'une importance toute particulière de pouvoir rassembler tant de savants éminents du monde entier. Il n'y a guère eu auparavant dans l'histoire un tel besoin d'échange intellectuel libre entre les différents peuples, en même temps que se dresse comme obstacle à cette collaboration internationale le danger de vastes et menaçants problèmes politiques et sociaux. Ce qui est de la plus haute importance c'est que c'est justement dans ce domaine de la mathématique que tous, indépendamment de la race ou nationalité, ont seulement un but: d'élargir nos connaissances et d'atteindre aux vérités les plus absolues.

On entend si souvent les gens demander quelle est l'utilité de telle ou telle découverte scientifique. Mais ce ne sont pas des considérations d'utilité qui portent les mathématiciens à s'occuper de ses problèmes. La mathématique est un domaine à part, si plein de surprises merveilleuses pour celui qui y penètre, que ces considérations d'utilité deviennent secondaires comparées à la joie de découverte qu'il sent à résoudre les problèmes, et à voir la lumière de la vérité rayonner sur les domaines d'une beauté merveilleuse. Et, come le poète norvégien Bjørnstjerne Bjørnson l'ecrivit en 1902 à l'occasion du jubilé de Abel:

Impassible comme le temps
est la science des nombres.
Leurs combinaisons sont
dans une eternelle aurore
plus pures que la neige,
plus subtiles que l'air,
mais plus fortes que le monde,
qu'elles pèsent sans balances,
qu'elles éclairent sans rayons.

Conservons toujours ce noble enthousiasme pour notre science et gardons la pure de tout mélange de motifs étrangers à elle.

Ce fut au dernier congrès international des mathématiciens à Zurich que les mathématiciens norvégiens résolurent d'émettre le projet que le prochain congrès se réunirait à Oslo. C'est notre collègue, le regretté Alf Guldberg, qui en prit l'initiative, et qui depuis s'est occupé inlassablement à assurer le succès du congrès, et surtout à l'établir sur une base économique solide. Nous avions espéré que Guldberg pourrait ouvrir le Congrès comme président. Mais, comme le savent tous les membres du congrès, une mort prématurée vint l'arracher à son œuvre.

Personne mieux que nous qui avons dû achever son travail, ne peut savoir quelle perte ce fut pour le congrès que d'être contraint à ce passer de notre éminent ami, qui savait si bien se gagner des amis et connaissait l'art de fréquenter ses semblables.

En rappellant ici le nom de Alf Guldberg, je désire aussi mentionner que pour notre Université de vieilles traditions se rattachent à ce nom de Guldberg. Il y a cent ans à présent que naquît l'oncle de Alf Guldberg, Cato Maximilian Guldberg, qui pendant des années occupa la place de professeur dans les mathématiques appliquées, et dont le nom, comme nous savons tous, est attaché à la célèbre loi de l'action chimique des masses.

Comme président du comité d'organisation je me fais un devoir et un plaisir de remercier ici tous ceux qui par des dons pécuniaires ou d'autre manière ont contribué à rendre possible ce congrès.

Je remercie tout d'abord Votre Majesté d'avoir par sa présence ici aujourd'hui donné plus d'éclat à cette réunion d'ouverture.

Je me permets ensuite d'adresser nos remerciements et au gouvernement norvégien pour son appui économique, et à la municipalité de Oslo pour son acceuil hospitalier; à l'Université qui a mis ses locaux à notre disposition, et à la Compagnie des Tramways de Oslo qui a offert gracieusement le transport gratuit de tous les membres pendant la durée du congrès, aux banques qui par des dons pécuniaires ont montré leur intéret pour le congrès, et tout particulièrement enfin aux Sociétés norvégiennes d'assurances sur la vie, sans la générosité desquelles il nous aurait été presque impossible de tenir ce congrès.

Par ces mots, je me permettrai de nouveau ici de souhaiter à tous nos chèrs collègues la bienvenue à cette réunion à Oslo, espérant que nous retirerons un excellent résultat aussi bien scientifique que personnel de notre réunion dans les jours qui vont suivre.

Eure Majestät, meine Damen und Herren.

Mit diesen Worten wünsche ich Sie, meine lieben Kollegen, herzlich willkommen zu diesem Kongreß in Oslo, und ich hoffe, daß die Ausbeute für Sie nicht nur in wissenschaftlicher, sondern auch in persönlicher Hinsicht recht reichhaltig in diesen kommenden Tagen wird.

With these words I would wish you, Dear Colleagues, welcome to this meeting here in Oslo, and in doing so I would express the hope that, both scientifically and personally, a happy outcome will arise from our association these days.

Votre Majesté, Mesdames, Messieurs, j'ai l'honneur de déclarer par là que le Congrès International des Mathématiciens à Oslo en dixneufcenttrentesix est ouvert.

M. *Halvdan Koht,* Ministre des Affaires Étrangères, prit la parole ensuite et déclara:

Your Majesty, Ladies and Gentlemen,

In the name of the Norwegian Government I have the honour and great pleasure to wish you all heartily welcome to the capital of Norway and to our national University.

We Norwegians are perhaps excessively proud of having produced in our country some of the great mathematical geniuses of the world. But when, as an historian, I have tried to define the qualities that might have made the Norwegian nation in some particular way useful to the rest of humanity, I have found them in mathematics and music.

You know, even better than I do, that since the days of Pythagoras these two arts have been closely connected, and I remember very well what a vivid impression I gained in this respect when, thirty four years ago, another assembly of eminent mathematicians had gathered here in Oslo and in this University in order to celebrate the centenary of our great Abel.

On that occasion a great English mathematician gave an eloquent address in honour of his science, and although I did not understand much of what he actually said, his speech, to my ears, sounded like angelic music coming from heaven. I think it was not so much because of the English language, but rather because he spoke on a celestial subject.

You certainly have had the experience that, when politicians and other practical people talk about the merits of mathematical work, they point to the great services that these studies render to many technical inventions which, in fact, would have been unthinkable without mathematics. Indeed, I shall not blame you for having been of practical and even economic utility to the rest of mankind. But I prefer to lay stress upon another aspect of your studies. Though not, myself, belonging to the initiates, I venture to praise your science as leading in the expansion of the human mind.

Is it not one of the greatest and most alluring aims of all human effort to make ourselves spiritual masters of the whole world, to compress in the small brain of man all the laws and forces of life and matter? And is it not true that the visions and logics of mathematical thinking are opening up even larger vistas of ever new realms of perception and comprehension? Are you not instinctively enjoying the strength of your mental powers when you discover and conquer new fields of life for human thought?

I congratulate you upon your work, and I want to assure you that in the Norwegian people you will find strong sympathy for your ideals.

Some decenniums ago it happened that there was in this country a member of parliament — a simple farmer — with no more education than the poor elementary school of his day could give, but yet intimately devoted to mathematical studies. When his colleagues of the opposite party did not want him to speak on a question, they induced a university professor of mathematics, who was also a member of parliament, to put some mathematical problem or other before him. This farmer member thereupon became so absorbed in solving the problem that he actually forgot everything going on around him — even his dearest political issues!

I would not affirm that all members of parliament in this country are similarly equally interested in mathematics, but this simple farmer may give you a glimpse of the spiritual yearnings of our people, and he affords me the right to wish you welcome here in the name of the whole Norwegian nation. I trust that you may find here a true home for your studies and your discussions.

M. le Professeur *R. Fueter,* Président du Congrès de Zurich 1932, propose M. Carl Størmer élu président du Congrès, proposition que l'assemblée approuve par acclamations. M. *Carl Størmer* remercie l'assistance de l'honneur qui lui a été montré et prend la présidence.

D'après la proposition de M. le président sont élus vice-présidents MM. *H. Bohr, T. Carleman, M. Fujiwara, G. Julia, S. Lefschetz, E. Lindelöf, K. Menger, G. Pólya, E. Schmidt, J. A. Schouten, W. Sierpiński, E. T. Whittaker.*

Comme secrétaire général on élit — d'après la proposition de M. le Président — M. le Professeur *Edgar B. Schieldrop.*

Cela fait, M. le Professeur *E. Cartan* prend la parole et déclare:

Dans sa séance de clôture du 12 septembre 1932, le Congrès international des mathématiciens de Zurich avait décidé d'accepter le legs du regretté Professor Fields permettant de décerner, à chaque congrès international, deux médailles d'or à deux jeunes mathématiciens qui se seraient distingués par des travaux particulièrement remarquables. Il avait en même temps nommé une commission chargée de désigner les deux lauréats pour le Congrès d'Oslo, et composée de MM. Birkhoff, Carathéodory, Cartan, Severi, Takagi. Cette commission était présidée par M. Severi; mais celui-ci, empêché de venir au Congrès d'Oslo, m'a demandé de le remplacer à la présidence. La commission s'est mise d'accord pour désigner, comme les deux premiers titulaires des médailles Fields, M. LARS AHLFORS de l'Université d'Helsinki, et M. JESSE DOUGLAS de l'Institut de Technologie de Cambridge, Massachusetts. M. Carathéodory a bien voulu se charger du rapport sur les travaux des deux lauréats; il va vous donner lecture de son rapport.

M. le Professeur *C. Carathéodory* lit son rapport, publié in extenso parmi les conférences générales du Congrès.

Après la lecture du rapport de M. Carathéodory, M. *Cartan* remercie le président du Congrès d'Oslo, M. Størmer, d'avoir bien voulu lui laisser l'honneur de remettre les deux premières médailles Fields aux deux lauréats. Il regrette que M. Douglas fatigué ne puisse pas venir recevoir lui même la médaille qui lui est destinée. Il remet deux médailles à M. Lars Ahlfors et à M. Wiener remplacant M. Douglas.

M. le Président prie le Congrès de l'autoriser à envoyer un télégramme de felicitations à S. A. R. le Prince Héritier *Olav,* Président d'Honneur du Congrès, proposition approuvée par le Congrès avec enthousiasme.

Le secrétaire général fait savoir que messieurs Gelfond et Khintchine, inscrits au programme du Congrès comme conférenciers, regrettaient d'être obligés de s'excuser.

Exprimant l'espoir que les jours suivants — avec le profit d'une collaboration scientifique riche et fructueuse — donneraient l'occasion de fortifier et de multiplier les rapports d'ordre purement humain qui lient tous les mathématiciens du monde entier, *M. le Président* declara la séance d'ouverture levée.

PROTOCOLE DE LA SÉANCE DE CLÔTURE

dans l'Aula de l'Université samedi, 18 juillet, 17 heures.

A la demande du Président du Congrès, le secrétaire général, M. *Edgar B. Schieldrop,* prend la présidence pendant la première partie de la séance.

1. Le secrétaire général lit des télégrammes de *S. M. la Reine* et de *S. A. R. la Princesse Héritière,* à qui le Congrès avait envoyé des fleurs. Le Congrès autorisa par acclamations les organisateurs du Congrès d'envoyer des lettres de remerciement à *S. M. le Roi* et *S. M. la Reine* aussi bien qu'à *S. A. R. le Prince Héritier* et *S. A. R. la Princesse Héritière* pour la grande bienveillance qu'ils avaient montré à l'égard du Congrès.

Le secrétaire donna ensuite lecture d'un télégramme de M. le Professeur Engel a Giessen, en remerciement du télégramme de félicitations envoyé par la séance plénière du mercredi, 15 juillet, lors du dévoilement du buste de Sophus Lie.

Le Congrès applaudit chaleureusement à l'idée d'envoyer des télégrammes a MM. *D. Hilbert, E. Picard* et *V. Volterra.*

2. *L'Union Internationale Mathématique.*

Le secrétaire général du Congrès donne la parole à M. *G. Julia,* qui rend compte de l'activité de la Commission chargée par le Congrès de Zurich d'étudier la question d'une organisation internationale des mathématiciens.

Au sein de cette commission avait été choisi à Zurich un Comité Exécutif présidé par M. Severi, et comprenant en outre MM. Julia, H. Weyl, W. Blaschke et C. Carathéodory.

Le Comité, chargé de préparer le travail de la Commission, se réunit à Rome en mars 1934, puis à Paris en février 1935. Les travaux du Comité, dont les procès-verbaux, transmis à tous les membres de la Commission, sollicitaient l'avis de tous ces membres, ont fait constater des difficultés de plus en plus grandes à la constitution d'une organisation internationale des mathématiciens. À la suite de sa 2me réunion, le comité a ajourné ses travaux jusqu'à la veille du Congrès d'Oslo, dans l'espoir qu'une réunion plenière de la Commission compétente, prévue par le Congrès de Zurich, permettrait de trouver une solution. La Commission s'est réunie deux fois à Oslo, le 13 et le 15 juillet. En l'absence de M. Severi, la présidence a été assumée par M. Julia, à qui M. Severi avait transmis ses pouvoirs.

Au cours d'une discussion approfondie, il est apparu que les circonstances étaient moins favorables encore qu'en fevrier 1935 à l'organisation d'une Union internationale, aucune formule n'ayant pu réaliser l'accord au sein de la Commission.

La Commission a donc pensé qu'il convenait d'exposer purement et simplement cet échec à la séance de clôture du Congrès. Elle a chargé MM. Julia et Carathéodory de rédiger un texte, unanimement approuvé, destiné à être lu à cette séance de clôture. Elle a décidé aussi de remettre à un représentant de chaque nation présente au Congrès le procès-verbal des réunions du Comité Exécutif et de la Commission.

M. Julia donne lecture du texte adopté par la Commission:

« *La Commission nommée par le Congrès de Zurich a vivement regretté l'absence de son président, Severi. Elle n'a pu, pour diverses raisons, arriver à un accord unanime sur la question d'une organisation internationale des mathématiciens. Elle souhaite que dans l'avenir la question posée puisse recevoir une solution.* »

Avec le dépot de ce texte au bureau du Congrès, la Commission nommée par le Congrès de Zurich considère sa mission comme terminée.

Parlant ensuite en son nom personnel, M. Julia exprime son espoir persistant que soit réalisée dans l'avenir une organisation internationale des mathématiciens, qu'il considère comme très utile aux Mathématiques et aux Mathématiciens.

La résolution fut adopté à l'unanimité.

3. *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique.*

La parole est donnée à M. *H. Fehr,* qui déclare:

Au nom de la Section VIII du Congrès, j'ai l'honneur de soumettre à votre approbation une résolution tendant à renouveler le mandat de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique pour une nouvelle période de quatre ans.

La Commission a été constituée à Rome, en 1908, à la suite d'une résolution du 4^{me} Congrès International des Mathématiciens; elle a été confirmée en 1912 à Cambridge, en 1928 à Bologne et en 1932 à Zurich. Présidée successivement par FÉLIX KLEIN, MM. D.-E. SMITH et J. HADAMARD, elle a publié de nombreuses études d'un grand intérêt sur l'enseignement des mathématiques dans les principaux pays. Au moment où, dans d'autres domaines, la coopération internationale rencontre encore des obstacles, nous sommes heureux de pouvoir faire constater ici que les travaux de la Commission ont pu se poursuivre dans un excellent esprit de compréhension et de collaboration.

A l'ordre du jour de la réunion d'Oslo figurait la présentation, par les délégations nationales, des rapports sur les tendances actuelles de l'enseignement mathématique. Après avoir pris connaissance de ces rapports, la section VIII a décidé, à l'unanimité, de soumettre la résolution suivante à l'approbation du Congrès:

Le Congrès invite la Commission internationale de l'enseignement mathématique à poursuivre ses travaux; les objets à mettre à l'étude seront fixés par le Comité central.

Der Kongreß bittet die Internationale Mathematische Unterrichtskommission, ihre Arbeiten fortzusetzen. Es bleibt dem Zentralkomitee überlassen, den Gegenstand der neu in Angriff zu nehmenden Arbeiten festzulegen.

The Congress requests the International Commission on the Teaching of Mathematics to continue its work, prosecuting such investigations as shall be determined by the Central Committee.

La résolution fut adopté à l'unanimité.

4. *Conférence de Topologie.*

M. *S. Lefschetz* donne la communication suivante:

At the Topology Conference which took place in Moscow in September 1935, there was constituted a committee to organize a Topology Conference in 1939. The members of the Committee present at Oslo [Freudenthal, Heegaard, Lefschetz, Sierpinski, also Nielsen by invitation] met and considered a very cordial invitation extended by Professor Sierpinski in his own name, that of his colleagues and his government, to meet in Warsaw in 1939. This was unanimously accepted with thanks and it was agreed that the Conference would meet in Warsaw at that time if circumstances made it at all possible.

5. *Médaille Fields.*

D'après une proposition faite par le Comité exécutif du Congrès en collaboration avec MM. Cartan, Carathéodory et Birkhoff, membres de la commission antérieure, la novelle Commission de la Médaille Fields eut les membres suivants: M. *Hardy*, président, et MM. *Alexandroff, Hecke, Julia, Levi-Civita;* suppléants MM. *Lefschetz* et *Nevanlinna.*

Malheureusement M. Hardy, dans une lettre du 7 août 1936, a fait part au secrétaire général de ce qu'il ne peut accepter cette tâche, tandis que les autres ont promis leur concours. M. *Lefschetz* prendra donc la place de M. Hardy.

La commission doit désigner deux candidats pour la distribution de la Médaille Fields lors du Congrès.

6. *Lieu du prochain Congrès.*

M. *Carl Størmer* prend la présidence de la séance et donne la parole à M. *L. P. Eisenhart* qui, parlant au nom de l'« American Mathematical Society », invite le Congrès à venir aux États-Unis en 1940, le choix de la ville étant laissé aux soins de la Société Mathématique Américaine:

The American Mathematical Society hereby extends to the International Congress of Mathematicians now in session in Oslo an invitation to hold the next congress in the United States of America, the place of meeting to be determined later by the Society. This invitation is presented by the official delegates of the Society in accordance with action taken by the Council of the Society, viz.:

G. D. Birkhoff, H. F. Blichfeldt, S. Lefschetz, M. Morse, V. Snyder, O. Veblen, N. Wiener, L. P. Eisenhart, chairman.

Cette invitation est acceptée par acclamations, et le Président remercie en termes chaleureux « The American Mathematical Society » et les mathématiciens américains pour leur aimable initiative.

Puis M. *J. A. Schouten* prit la parole:

Im Namen aller ausländischen Gäste gab er den Gefühlen Ausdruck, die in diesen letzten Augenblicken des Kongresses in allen vorherrschten, die Wehmut der Scheidungsstunde, die Freude am vollbrachten gemeinsamen Schaffen, insbesondere in dieser unserer Zeitepoche so intensiv, weil wieder einmal demonstriert wurde, was gut organisierte internationale Zusammenarbeit zu leisten vermag, die Dankbarkeit schließlich aller Kongreßteilnehmer für die ihnen in so reichem Maße entgegengebrachte Gastfreundschaft.

In erster Linie dankte er dem Staate Norwegen für seine großzügige Gastfreiheit und erwähnte dabei insbesondere, welche große Ehre und Freude allen Kongreßmitgliedern zuteilgeworden sei durch das lebhafte Interesse, das das norwegische Fürstenhaus dem Kongresse entgegenbrachte.

Sodann dankte er der Behörde der Stadt Oslo für alles was sie zur Förderung des Kongresses beigetragen hat.

Besonderen Dank sprach er den Herren des Exekutivkomitees aus für die mustergültige Organisation des Kongresses, sowie den Damen des Damenkomitees, die in so ausgezeichneter Weise dafür zu sorgen wußten, daß der Aufenhalt in Oslo auch für die Damen in unvergeßlicher Erinnerung bleiben wird.

Zum Schlusse wies er darauf hin, daß Wissenschaft nur dann wirklich Wissenschaft ist, wenn sie international ist und bat die norwegischen

Kollegen die Versicherung entgegenzunehmen, daß alle, die hier zusammen waren und jetzt auseinandergehen werden, niemals vergessen werden, was das kleine Land Norwegen durch Organisation dieses internationalen Mathematikerkongresses für die Förderung der internationalen Wissenschaft geleistet hat.

M. *le Président* remercie M. Schouten et déclare le Congrès terminé de la façon suivante:

Au nom du Comité d'Organisation et de tous les mathématiciens norvégiens, j'ai la tâche à la fois difficile et agréable de chercher à exprimer comment nous avons été emus par les éloges de notre cher confrère sur le succès de notre congrès.

Mais ce succès, chers collègues, n'est que pour une infime partie, dû a nous. C'est la collaboration de tous les congressistes qui a pu assurer au congrès un programme de la plus haute valeur.

Notre travail en commun est fini. Le grand nombre de conférences qui ont été données est le témoin manifeste des découvertes mathématiques qui ont été faites pendant les derniers années par les mathématiciens de tous les pays.

Les sciences mathématiques deviennent de plus en plus une des bases les plus fondamentales de la civilisation humaine, et nous donnent le sentiment que notre travail n'est pas inutile.

Mesdames et messieurs, je vous souhaite des bonnes années de travail assidu, jusqu'a ce que nous nous retrouverons au prochain Congrès.

Par ces mots je déclare terminé le Congrès International des Mathématiciens à Oslo.

Ladies and Gentlemen, I wish you successfull years of good work until we all meet at the next congress.

With these words I declare the International Congress of Mathematicians at Oslo closed.

Meine Damen und Herren, ich wünsche Ihnen erfolgreiche Arbeitsjahre bis wir wieder am nächsten Kongresse zusammenkommen.

Mit diesen Worten erkläre ich den internationalen Mathematikerkongreß in Oslo für beendet.

DISCOURS

Dîner offert par la Ville d'Oslo à l'hôtel « Bristol », Mercredi, 15 juillet, à 20 heures.

Discours de félicitations par M. S. Gann, Directeur des Places et Marchés représentant de la Municipalité d'Oslo.

Mesdames, Messieurs.

Au nom de la Ville d'Oslo, j'ai le grand honneur de souhaiter à toutes et à tous la bienvenue dans la capitale norvégienne, la bienvenue en Norvège.

Lorsqu'un profane comme moi se trouve devant un aréopage de savants aussi éminents, il est sans doute facile d'exprimer les souhaits conventionnels que l'on adresse en pareille occasion, mais il est plus difficile à ce profane de rendre hommage à la science que vous représentez ici, Mesdames et Messieurs.

Pour nous dilettantes, les mathématiques sont comme une cristallisation de ce qui est pur, de ce qui est clair dans le cerveau humain; nous croyons assez facilement que les mathématiques constituent en elles-mêmes la traduction en technique de la pensée, mais je ne crois pas me tromper en disant que les plus grands progrès qui aient été réalisés en mathématiques, sont le résultat d'un élan imaginatif, du génie incompréhensible de l'intuition, de ces observations vécues, intensives qui sont du domaine de l'inspiration.

Mon impression personnelle basée sur l'expérience que j'ai de la vie, m'amène à croire que toutes nos pensées portent l'empreinte de notre esprit et de nos sentiments. C'est dans une vibration nerveuse physiologique que nous trouvons la source de toutes nos pensées, des plus simples comme des plus géniales. C'est précisément parce que les mathématiques les plus supérieures qui soient, sont nées de l'inspiration, de l'imagination, de l'intuition qu'elles sont en fin de compte ancrées dans le domaine des sentiments, et c'est pourquoi aussi, ce ne sont pas seulement des savants et des profanes qui se recontrent à cette table, ce sont avant tout et surtout des hommes. La langage de la sciences est international et il en est de même du langage des sentiments; sciences et sentiments détruisent tous les préjugés, abattent toutes les frontières de langues et de races et nous obligent à reconnaître ce qu'il y a de plus noble dans la vie, la grandeur dans le sentiment, le génie dans la pensée.

Lorsqu'au nom de la Ville d'Oslo je prie le Congrès d'agréer mes hommages et exprime mes meilleurs voeux pour le progrès de la science qui l'anime et à qui l'humanité doit tant, c'est avec l'espoir que la science libre et la pensée libre aient droit de cité et que l'une et l'autre répandent leurs bienfaits partout et pour tous.

Discours de M. E. Schmidt, Professeur à l'Université de Berlin.

Meine Damen und Herren!

Im Namen der deutschsprechenden Teilnehmer des Kongresses habe ich die Ehre, dem Organisationskomitee des Kongresses, an der Spitze unserem verehrten Präsidenten Professor STØRMER, und der Stadt *Oslo,* die uns so freundlich aufgenommen hat, und deren Gastlichkeit uns den heutigen Abend schenkt, unsern tiefempfundenen Dank auszusprechen für die wissenschaftlich wie menschlich gleich gehaltvollen Tage, die wir hier verleben dürfen, und deren reiche Eindrücke wir als dauernden Gewinn mit heimnehmen werden.

Norwegen mit seinen Schluchten und Buchten, seinen Felsen und Sagen, mit seinen großen Dichtern, bei denen die Macht der Phantasie mit der Gewalt der heimatlichen Natur zu wetteifern scheint, ist für jeden Deutschen ein Land der Sehnsucht. Wir deutschen Mathematiker aber fühlen noch ein besonderes Band in dem Bewußtsein, daß zwei der Großen unserer Wissenschaft, SOPHUS LIE, dessen Büste heute enthüllt wurde, und NIELS HENRIK ABEL Norweger waren, welche nahe Beziehungen mit dem deutschen Geistesleben verknüpften. LIE wirkte durch lange Jahre an der Universität Leipzig, und ABEL stand in aussichtsreichen Verhandlungen wegen Annahme eines Rufes an die Berliner Universität, als ihn ein zu früher Tod dahinraffte.

Als ich Berlin verließ, hallte und schallte dort alles von den freudigen Vorbereitungen für die Olympischen Festspiele. Alles schickte sich an, die zusammenströmenden Völker würdig zu empfangen und das Schauspiel ihres friedlichen Wettbewerbes zu feiern.

Nun — ist das, was uns hier zusammenführt, nicht auch ein Olympia im Geiste! ein freundschaftlicher Wettbewerb aller Völker auf dem Gebiete der Wissenschaft, und insbesondere der Mathematik, welche zwar viele tausend Jahre alt ist, aber zu ihrem Selbstbewußtsein als reine Wissenschaft, d. h. als Erkenntnis um der Erkenntnis willen, erst im klassischen Lande von Olympia, in Griechenland, erwacht ist.

Hier freut sich jeder an den Fortschritten des andern. Denn in der lichten und reinen Atmosphäre des Geistes versteht der Mensch leichter, daß der Reichtum und der Aufstieg des einen Volkes keinen Nachteil, sondern nur ein hohes Glück für alle andern Völker bedeutet.

Was uns an dem nordischen Sommer, der uns hier umfängt, vor allem bezaubert, das sind die hellen, klaren, sich scharf gegeneinander abhebenden Farben und die langen Tage, wo Abendglühen und Morgenröte sich die Hände reichen.

Das, wofür wir alle unsere Lebensarbeit einsetzen, ist auch ein Tag — ein Tag des Geistes. Möge er so hell und klar sein, so lange währen, so sieghaft die Schatten der Nacht überwinden, wie wir es alle hier in *Oslo* in der Natur und in dem lichtstrebigen Sinn der Bevölkerung dankbaren und beglückten Herzens erleben.

Die Gastfreundschaft, die uns hier zu teil wird, läßt sich in allen Hinsichten, vom Geistigen bis zum Mateıiellen, am besten durch einen alten deutschen Spruch charakterisieren:

Nie Mangel des Gefühls —
Und nie Gefühl des Mangels!

Unter diesem Motto rufe ich in Dankbarkeit:

»Unsere hohe Gastgeberin die Stadt *Oslo* — hoch!«

Discours de M. L. P. Eisenhart, Professeur à l'Université de Princeton.

Mr. Chairman, Ladies and Gentlemen:

An unusual honor has been conferred upon me in requesting me to say a few words at this dinner for the English speaking countries represented at this Congress. These countries have made great contributions to mathematics, but after all we do not think of mathematics as developed along national lines. When one observes that at this Congress there are representatives of at least thirty nations, and all of them are interested in the history and development of the same science, one realizes that mathematics is international. As such, it does not recognize national boundaries; these have to do with political and economic considerations. Perhaps it is because maps deal with national contours and mathematicians are international in their way of thinking that mathematicians have never been able to solve the four-colour map problem.

The layman thinks that mathematics deals with facts and that thus there can possibly be no differences of opinion among mathematicians. We know that this is not the case. However, there are several fundamental propositions to which I think all those present will agree. The first of these is that, because of the very fine contributions which Norwegians have made to mathematics, it is very appropriate that a Mathematical Congress should be held at Oslo. Another proposition is that we have been most cordially and graciously entertained during our sojourn in Oslo. We appreciate greatly all the opportunities for the meetings and for informal intercourse which have been provided by the University of Oslo and the entertainments which the members of its staff have arranged for us. This applies equally well to those members of our families who have accompanied us to the Congress and who do not even pretend to understand the lectures. We appreciate the cordial reception extended to us by the King and Queen, and the generous contributions which have been made toward the success of this meeting by the representatives of business in this community. Throughout our stay here we have been conscious of the courtesies which have been extended to us by the Municipality of Oslo, which tonight acts as our host at this dinner. I have the honor to propose a toast to the Municipality of Oslo.

Discours de M. G. Julia, Professeur à la Sorbonne.

Mesdames, Messieurs.

Le Comité d'Organisation du Congrès a voulu qu'à la réunion de ce soir se fît entendre une voix française. Celui qui vous parle en ce moment est tout ému qu'on l'ait prié de faire entendre cette voix.

Il éspère que son cœur en la circonstance, lui suggerera les mots propres à exprimer les sentiments de tous ses compatriotes.

Le beau pays qui nous accueille aujourd'hui à bras ouverts est d'abord, pour un Français, un pays de neige et de montagne, un pays des marins, le pays des Vikings, de Nansen et d'Amundsen, où ont pris corps ces récits légendaires d'exploits héroiques, qui bercent l'enfant et l'homme, qui l'enflamment aussi. Il n'ignore pas, ce Français, qu'il est le cousin du Nordique, et que sa belle Normandie fut autrefois terre où abordèrent les Normands, les hommes d'ici.

À parcourir votre littérature, le Français apprend aussi quelles vertus vos poètes exaltèrent. Ce sont des vertus auxquelles il s'efforce, et que nos propres poètes ont exaltées. Notre Lugné Poe lui a fait connaître et apprécier Bjørnson et Ibsen. Laissez-moi vous dire notamment quelle flamme d'enthousiasme le magnifique « Brand » d'Ibsen alluma dans l'âme d'un jeune homme que j'ai bien connu. Laissez-moi vous dire aussi que son « Agnes » a des sœurs généreuses et douloureuses dans le théâtre de notre Racine.

Si le Français dont je parle est un mathématicien, la parenté se fait plus étroite encore. Il sait que votre Abel et notre Galois sont deux frères géniaux et douloureux, dont l'histoire, toute simple, triste et si peu connue qu'elle soit, vaut bien une légende. Il sait, et on le lui a rappelé ce matin, que votre Sophus Lie, héritier et continuateur de ces deux illustres adolescents, a voulu les unir dans un commun témoignage d'admiration, en dédiant à l'École Normale Supérieure de Paris son ouvrage sur les Groupes de transformations.

Il y a, dans cette salle, nombre de mathématiciens français issus de cette École Normale; je suis sûr qu'ils sont heureux de m'entendre exprimer l'admiration que nous éprouvons pour vos deux gloires mathématiques: pour Abel et pour Sophus Lie.

Il sait enfin, le Français dont nous parlons, que ce pays-ci est une patrie de l'art, et, pour ne parler que de la musique, personne chez nous qui ne se berce ou ne s'exalte aux œuvres de votre Grieg.

A cette évocation des liens qui attachent tout Français à ce beau pays d'hommes énergiques et volontaires, de femmes belles et tendrement humaines, de savants illustres, de poètes et d'artistes généreux, permettez-moi, en ajoutant un souvenir personnel, de vous exprimer l'émotion que je ressens ce soir à évoquer la gratitude particulière que je dois à la Norvège.

Il y a vingt ans, on ramena un soir dans sa chambre un jeune officier blessé qu'on venait d'opérer. Il s'endormait déjà lorsque le sang, coulant à flots dans sa bouche, le réveilla: une artère venait de se rouvrir. Il eut le temps de prévenir avant de perdre conscience.

Lorsqu'il reprit ses esprits, il reconnut près de lui la silhouette rassurante de l'infirmière-major du service. En l'absence du chirurgien, qui avait quitté l'hôpital, et du médicin de garde occupé ailleurs, le temps pressant, elle avait, sans hésiter, d'une main sûre, tamponné et arrêté l'hémorragie, et finalement ranimé ce corps qui défaillait. Lorsque le médecin accourut, il reconnut que tout avait été bien fait, — il loua sa décision et son habileté.

De crainte que l'accident ne se renouvelât, et d'un geste aussi spontané que charitable, cette généreuse fille décida qu'elle passerait toute la nuit d'épreuve au chevet du blessé. Pour moi, je n'oublierai jamais cette longue nuit, où, ne pouvant plus parler que très difficilement, rompu par l'hémorragie, et dans l'impossibilité de dormir, je me sentais rassuré par la présence de cette femme assise près de moi, cousant sans bruit dans le rond discret de la lampe, écoutant à intervalles réguliers ma respiration, prenant mon pouls et scrutant mes yeux qui, d'un regard, lui exprimaient mon ardente reconnaissance.

Mesdames, Messieurs, — cette femme généreuse, cette femme forte, était une fille de Norvège. Vous comprendrez sans peine que je me sente lié à ce pays-ci par une dette de gratitude particulière.

Ayant accepté de prendre la parole dans cette enceinte au nom de mes compatriotes, je suis doublement heureux de pouvoir ici rendre hommage à la vaillance, à l'énergie légendaires des hommes de la Norvège, à la sagesse, au dévouement de ses femmes, à la beauté du pays tout entier, à l'accueil cordial de la ville d'Oslo.

Excursion sur le Fiord d'Oslo avec «Stavangerfjord», Jeudi, 16 juillet.

Discours en l'honneur des mathématiciens étrangers par M. Edgar B. Schieldrop, secrétaire général du Congrès.

Vos Altesses Royales!

Mes chers collègues!

Il y a quelques jours M. Carl Størmer a exprimé le sentiment de joie et de reconnaissance qu'éprouvent les mathématiciens de Norvège à vous voir réunis à Oslo, à vous savoir ici pour une semaîne toute entière. Monsieur le président, à ce moment-là, fut l'interprète parfaît de nos sentiments à tous. Or, dans un discours de bienvenu, on est obligé — vous, le savez bien — de former des jugements à priori, d'exprimer des espoirs, de hasarder des anticipations.

Un discours de ce genre a beau être inspiré de sentiments sincères, d'expressions aimables et flatteuses pour l'audience — il faut plutôt qu'il en soit comblé — il n'en est pas moins vrai que l'orateur doit rester dans le domaine des vagues, étant donné qu'il n'a encore aucune expérience, aucun résultat définitif sur lesquels il pourrait se baser. Devant lui il y a un avenir qui, pour être proche, n'en a pas encore révélé son secret.

Moi, par contre, j'ai l'avantage, en vous adressant la parole aujourd'hui, de me trouver sur un terrain plus sûr.

Trois journées se sont écoulées, appartiennent déjà au passé. Nous autres mathématiciens norvégiens, nous savons d'or et déjà que ces trois jours-lá seront, grâce à vous, quelque chose dont nous parlerons et reparlerons pendant des années.

Si l'on envisage le domaine du monde civilisé, la Norvège est bien ce que nous avons l'habitude d'appeler « un point sur le contour ». Et vous savez par expérience profesionelle combien il faut être prudent en s'approchant d'un tel point. Au fait, nous l'avouons franchement, nous avons fait preuve de peu de modestie, de peu de sens des proportions en vous convoquant ici. Nous sommes peu nombreux et nous habitons un pays périphérique. Cependant, c'est précisément en soulignant ces deux vérités fatales, que nous espérons, mes chers collègues, mériter votre indulgence et votre pardon.

Nous avons tellement besoin de vous ! Nous avons besoin de vous parler, d'avoir des rapports directs, personnels avec vous, de profiter de l'immense somme de connaissances que vous représentez dans votre totalité, enfin de vous sentir près de nous, ne fut ce que pour quelque jours. C'est le désir d'établir des rapports de ce genre, de subir le charme de votre présence, qui nous a donné l'idée de vous réunir ici, dans l'espace restreint de ce bateau dont la densité mathématique doit atteindre une valeur extraordinaire, difficile à calculer numériquement, mais certainement un maximum dans l'histoire maritime.

Mes chers collègues. Vous voyez devant vous des confrères norvégiens, pleins de gratitude. Nous sommes reconnaissants parce que vous êtes venus afin que le sang pur de votre savoir abreuve nos sillons mathématiques, et nous sommes fiers puisque une assemblée aussi illustre a pu se réunir sur notre sol, manifestant ces efforts communs de tous les peuples, faisant preuve de cette coopération intellectuelle dont notre monde troublé et inquiet, notre civilisation menacée ont tellement besoin ces temps-ci, une assemblée dont les travaux ont un seul but, celui de faire progresser la pensée humaine et de servir à l'humanité tout entière

Mathématiciens de tous les pays, vos confrères norvégiens vous saluent !

CONFÉRENCES GÉNÉRALES

PROGRAMME FOR THE QUANTITATIVE DISCUSSION OF ELECTRON ORBITS IN THE FIELD OF A MAGNETIC DIPOLE, WITH APPLICATION TO COSMIC RAYS AND KINDRED PHENOMENA

By CARL STØRMER, Oslo

In applied mathematics one is very often led to the problem of integrating a system of ordinary differential equations. For the application, a complete qualitative and quantitative study of all the integrals for values of the independent variable from $-\infty$ to $+\infty$ may be desirable. But, in general, this is such a vast problem that all the resources of contemporary mathematical methods are unable to solve it.

From the standpoint of a pure mathematician, only proofs of the existence and behaviour of the integrals in the neighbourhood of given values, together with some qualitative properties of the integrals, are generally all that is to be obtained.

But, for the applications, such results are generally of very little use. What is wanted is a quantitative study of the integrals for real values of the independent variable, and over as large an interval as possible.

It seems that both pure mathematicians and physicists generally neglect to pay enough attention to the fact that for an approximate quantitative study of the integrals, there exist methods sufficiently effective for the applications, and also of great importance in pure mathematics as heuristic means to suggest new facts.

Among the methods most important in this respect, I may first mention the use of the new integrating machine invented by V. Bush (1)* and by him called "differential analyzer". As far as I know, only a few of these machines have hitherto been built.

At the expense of the Rockefeller Foundation, an improved Bush machine is now being built here for the Institute of Theoretical Astrophysics by Gundersen and Løken under the supervision of Professor Rosseland.

We hope that this machine will be ready for use within a year, for its capacity will be so great that it may be able to integrate even a system of 12 simultaneous differential equations of the first order.

If such a machine, however, is not available, the work can nevertheless be done by methods of numerical integration. Of such methods, there

* The numbers refer to the bibliography at the end of the paper.

exist several, but those which use series of differences corresponding to equidistant values of the independent variable are to be preferred, also because errors in the calculations are then easy to discover by reason of the corresponding irregularities of the series of differences of the highest orders.

Such methods have been used by astronomers in the theory of planetary perturbations, and especially by Darwin (2) and Strömgren (3) and their assistants in the problem of the three bodies.

For a system of differential equations of the second order of the form: second derivatives equal to given functions of the variables, I elaborated in 1904 a very practical method which has since been used for about 18000 hours of work (4). At that time I did not know that a similar method for differential equations of the first order had already been given by Adams in 1883 (5).

By such numerical methods the integrals of the differential equations can be followed as far as one likes with an accuracy quite sufficient for the applications. One only needs enough time and sufficient money for paying the assistants.

In this lecture I shall mention a case where extended numerical integrations during a series of years have thrown much light upon all the integrals of a certain system of differential equations of the sixth order. This system is very interesting in itself, because we here meet types of orbits treated by Poincaré, such as periodic and asymptotic trajectories. But its chief importance lies in the applications, because two of the most interesting phenomena in nature, the polar aurora and the cosmic rays, both lead to this system.

The system in question is that of the equations of motion of an electron in the field of a magnetic dipole. In cartesian coordinates it has the form (6)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left[\frac{3yz}{r^5}\frac{dz}{dt} - \frac{3z^2-r^2}{r^5}\frac{dy}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\left[\frac{3z^2-r^2}{r^5}\frac{dx}{dt} - \frac{3xz}{r^5}\frac{dz}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a\left[\frac{3xz}{r^5}\frac{dy}{dt} - \frac{3yz}{r^5}\frac{dx}{dt}\right]$$

where a is a constant, $r^2 = x^2+y^2+z^2$, and where t is the time.

The general integral contains 6 arbitrary constants. As I have shown in 1904, one easily finds two "first integrals" by which the integration is reduced to a differential equation of the second order and two quadratures.

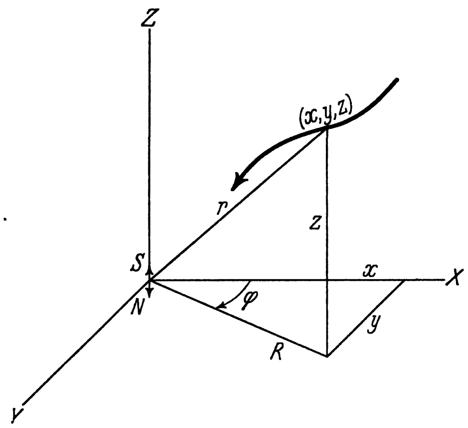


Fig. 1. System of coordinates.

The first of the two integrals is, that the velocity is constant. From this is seen that every trajectory can be obtained from a corresponding trajectory in the case where $a=1$ and $t=s=$ the arc of the trajectory, by enlarging all dimensions in the same ratio. Using this, the second integral can be written (Fig. 1):

$$R^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{R^2}{r^3} + 2\gamma$$

where $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ and where γ is a constant of integration. Further we find (7):

$$\frac{d^2 R}{ds^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial R}, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = Q$$

where

$$Q = 1 - \left(\frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3}\right)^2.$$

The motion of the particle can then be described in the following manner: We imagine a plane E through the z-axis which follows the motion of the particle in such a way that the particle is always situated in that plane. The motion can then be decomposed in the following two separate motions:

1. The motion in the plane E (R, z as functions of s).
2. The motion of the plane E (φ as a function of s).

The first motion is the motion of a particle moving under the action of a force depending on the force function Q, s being considered as the

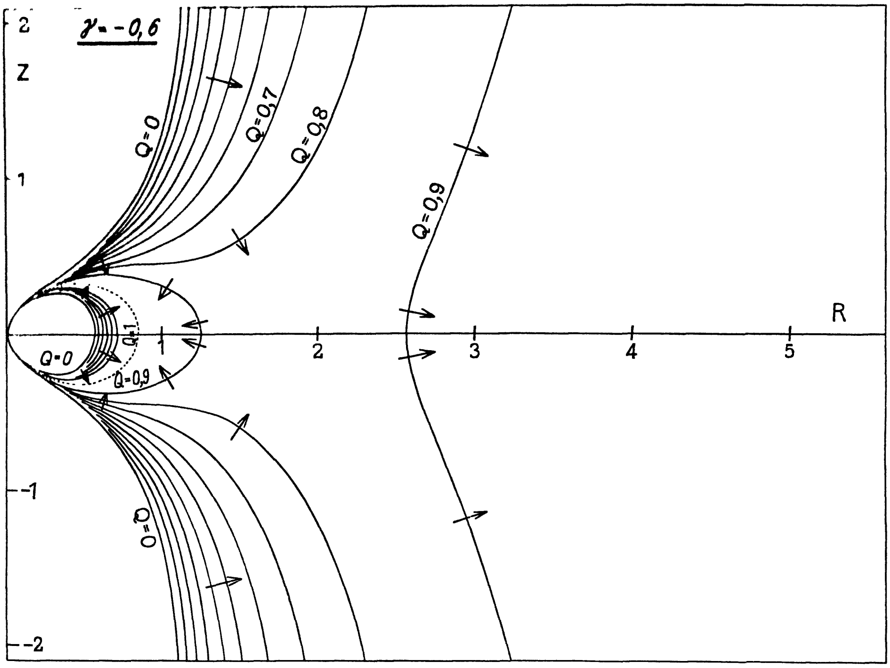


Fig. 2. Field of force Q = constant, in the plane E.

time. If we draw the level lines $Q=$ constant, we get for each γ such a field of force as seen in figure 2, with arrows pointing in the direction of the force.

The field can be interpreted as a map of a landscape with the lines $Q=$ const. going through all points of equal height over the sea level. The orbits in this field resemble, then, the orbits of a little sphere rolling in this landscape.

The point cannot get out of the region limited by the branches of the level line $Q=0$.

Another important interpretation is obtained in the following manner (8): Suppose γ negative and $=-\gamma_1$, and put

$$x=\frac{1}{2\gamma_1}R_1\cos\varphi,\quad z=\frac{1}{2\gamma_1}z_1$$

$$y=\frac{1}{2\gamma_1}R_1\sin\varphi,\quad r=\frac{1}{2\gamma_1}r_1$$

$$ds=\left(\frac{1}{2\gamma_1}\right)^3 d\tau\,.$$

Then

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{R_1^2}$$

$$\frac{d^2 R_1}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial R_1}, \quad \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial z_1}$$

$$\left(\frac{d R_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d z_1}{d\tau}\right)^2 = U + w_0^2$$

where

$$w_0 = \left(\frac{1}{2\gamma_1}\right)^2$$

and the force function U does not contain the constant γ_1 any longer, because

$$U = -\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_1}{r_1^3}\right)^2.$$

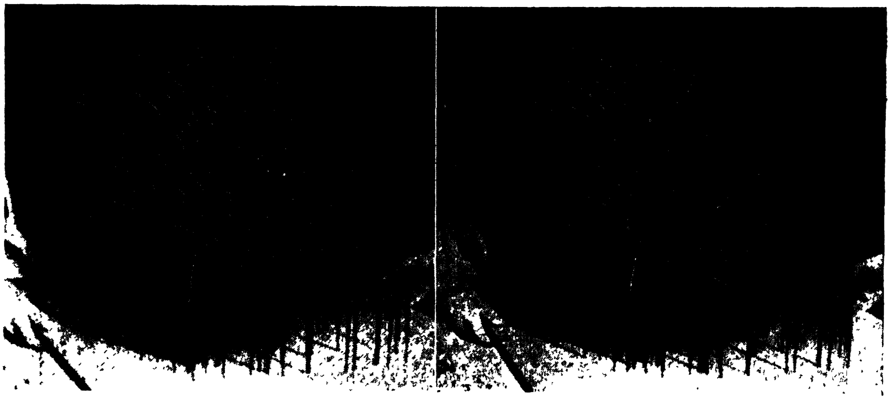


Fig. 3. Stereoscopic picture of a bundle of trajectories from infinity towards the dipole and with asymptotes parallel to the magnetic equatorial plane.

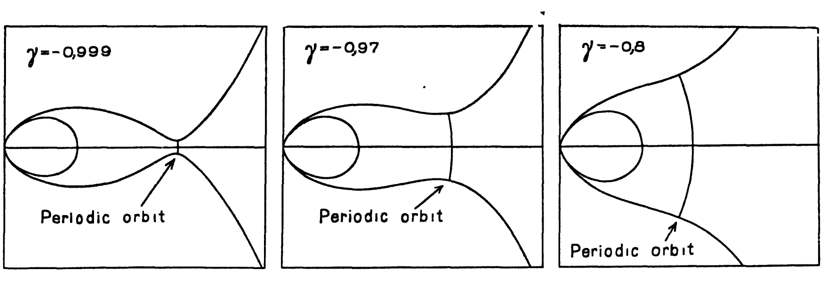


Fig. 4. Periodic orbits in the E plane for $\gamma = -0{,}999$, $\gamma = -0{,}97$ and $\gamma = -0{,}8$, calculated by numerical integration.

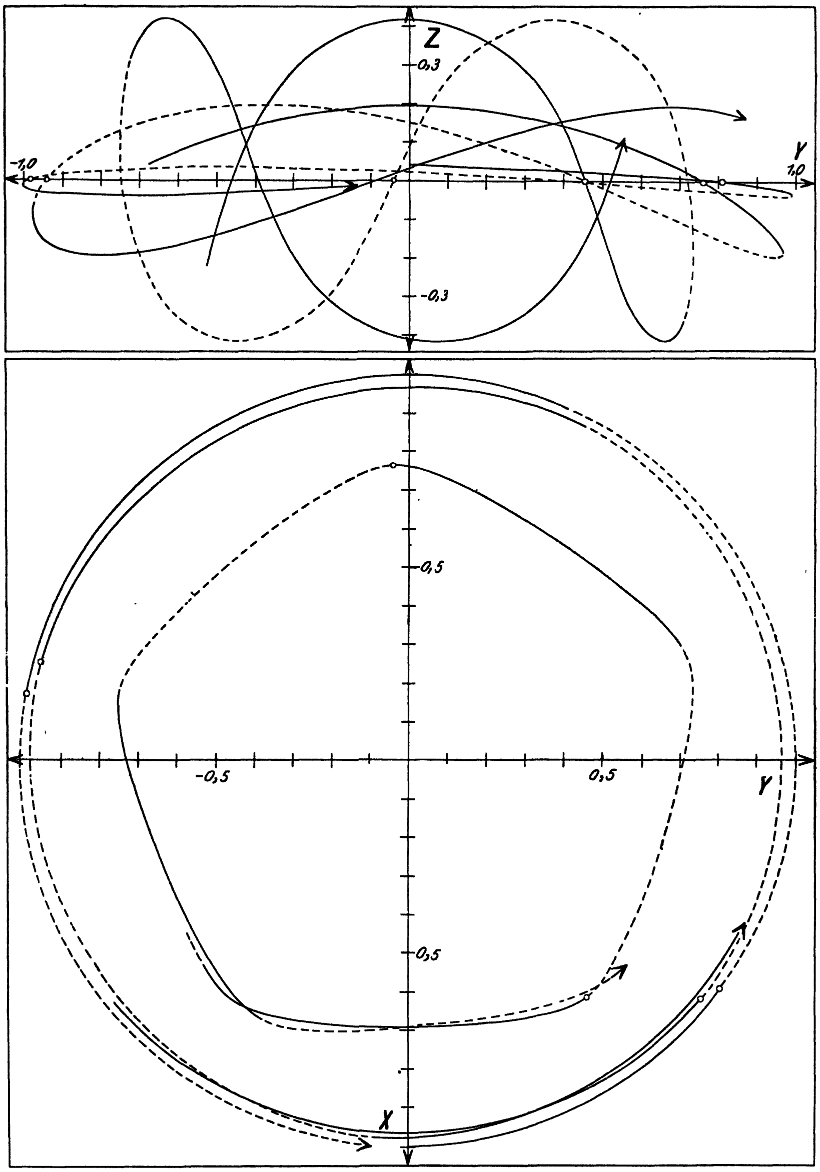


Fig. 5. Corresponding periodic orbits in space.

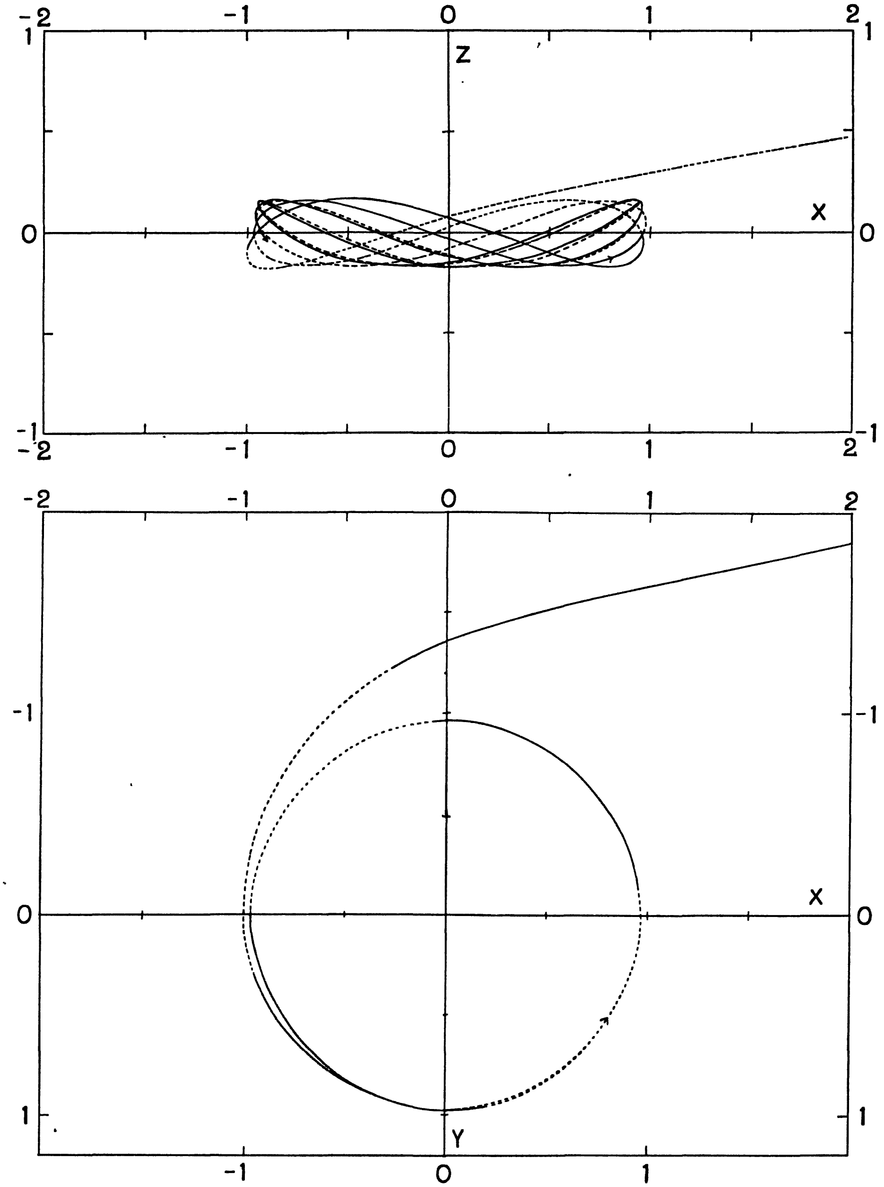


Fig. 6. An asymptotic trajectory in space seen from the side and from above (here some loops only are drawn).

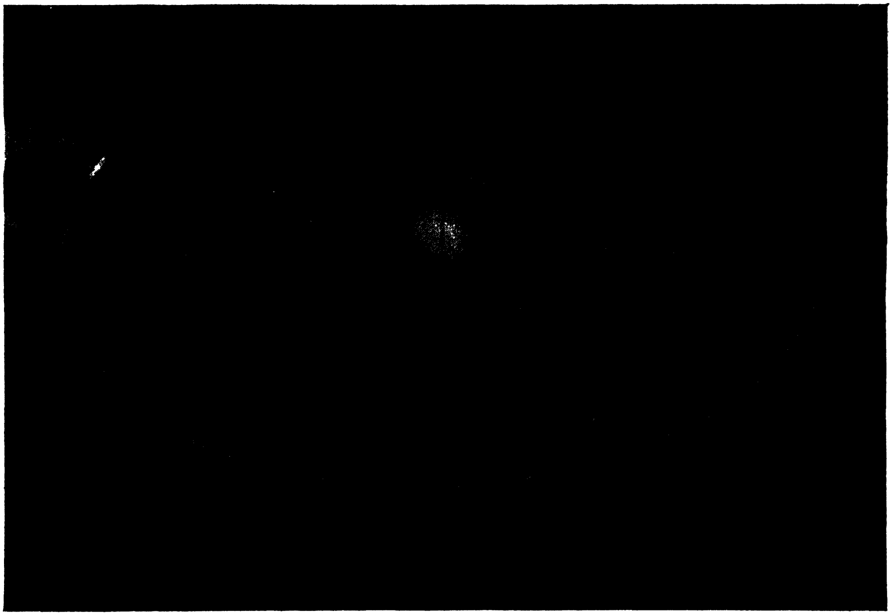


Fig. 7. Periodic orbit in space round a magnetic dipole (in the centre of the sphere). The circle (with radius unity) is also a periodic orbit.

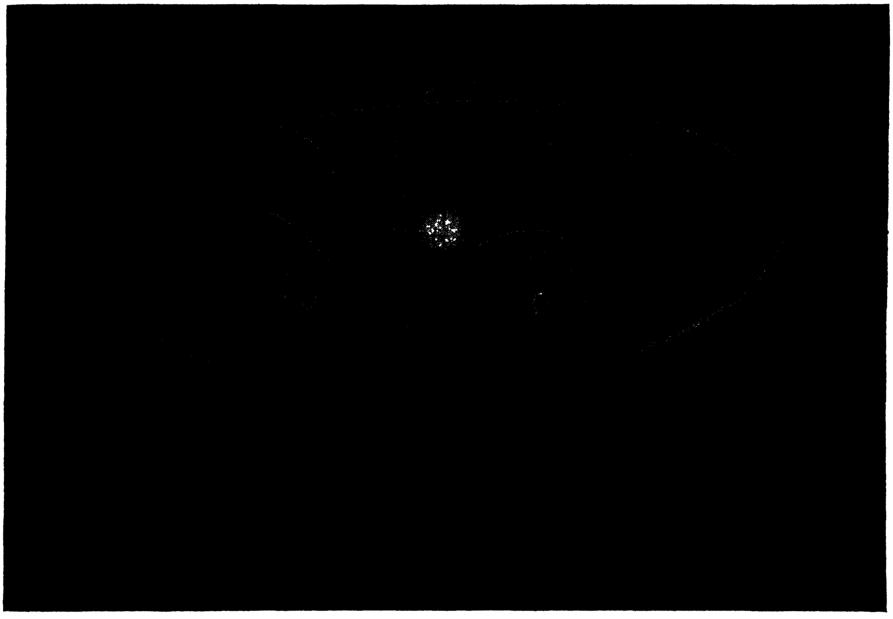
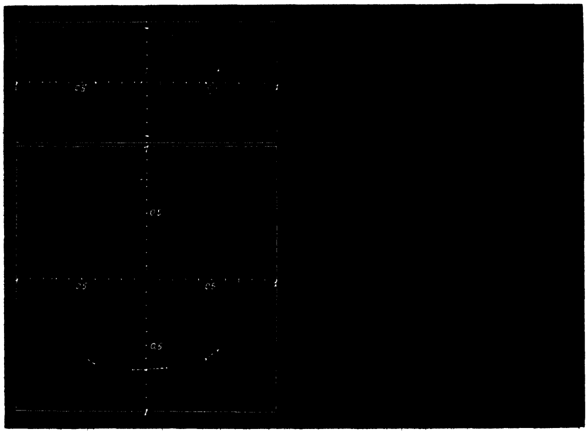
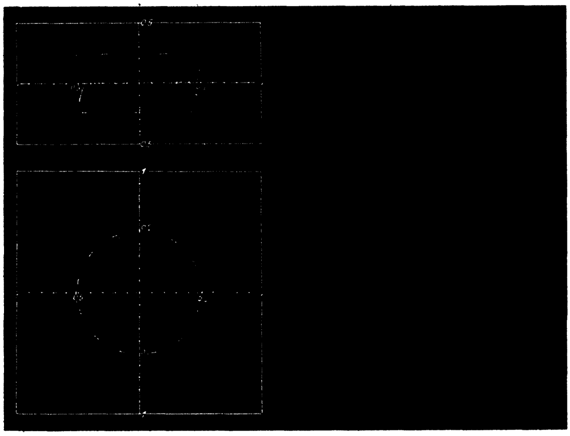


Fig. 8. Another periodic orbit.





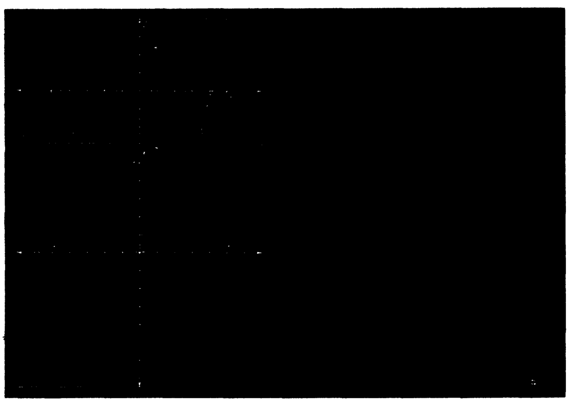


Fig. 9, 10, 11. Periodic orbits calculated by numerical integration and verified by the physical experiments of Brüche.

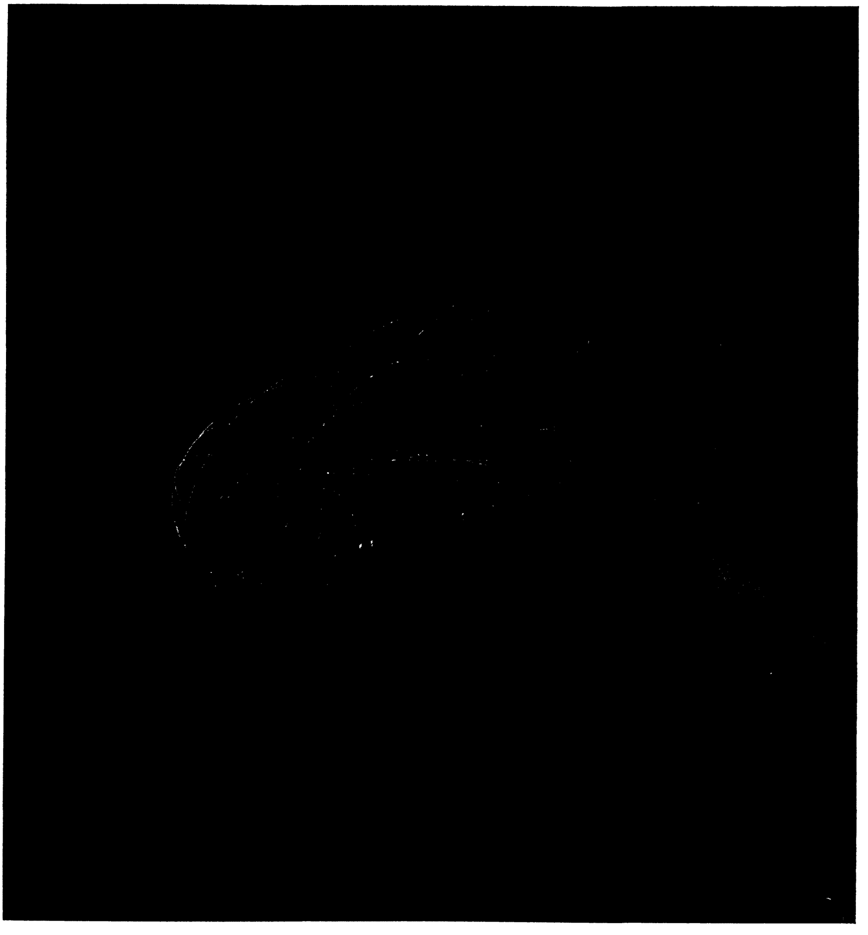


Fig. 12. Series of trajectories coming from infinity and going straight to the dipole, calculated in 1904—1907.

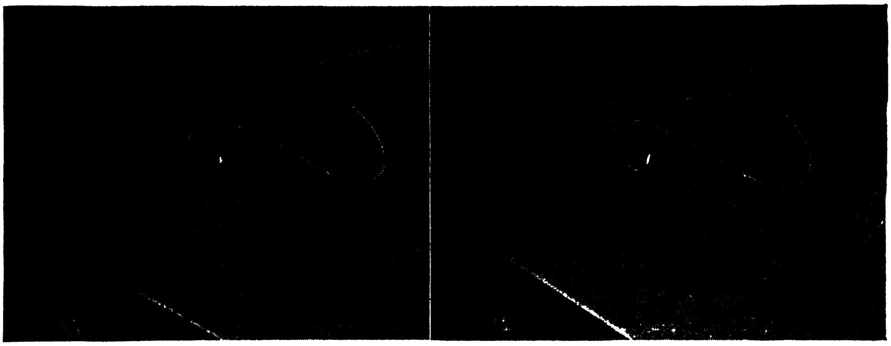


Fig. 13. Stereoscopic picture of a more complicated trajectory of the same kind as those in fig. 12.

Fig. 14. Another similar trajectory. Note the spiral towards the dipole and the big loops.

(Similar reductions are obtained for γ positive). Here the particle is moving in the field $U=$ const., and has the velocity w_0 each time it passes the level line $U=0$. The same field can thus be used for all *negative values* of γ and we have not one new field for each γ as in the former case.

We shall return to this field later. We now pass over to the programme for a complete quantitative study of the orbits in space.

It is, then, natural to begin with trajectories having infinite branches, and follow these trajectories from infinity towards the dipole. This is also very important for the application to cosmic radiation. We have here adopted the big programme (9) to calculate 10 bundles, each containing about 150 trajectories and with asymptotes making angles from 90° to 180° degrees with the z-axis. Two such bundles are calculated (10) and a wire-model of the first of them corresponding to 90° is seen in fig. 3.

For the application to cosmic radiation, a long series of further calculations have been made (10) giving the points of precipitation of these trajectories on the earth, the dipole being in the earth's centre.

For the discussion of the orbits in the inner part where $r < 1$, interesting families of periodic and asymptotic orbits are of fundamental importance.

In the field of force $Q =$ const., such periodic orbits are seen in fig. 4 and in space we have the corresponding ones in fig. 5. We will call these orbits in the plane E, *periodic orbits in the pass* (11). We have also in the plane E asymptotic orbits which approach to them asymptotically. They have been studied in a paper I published in 1911 (12), and more in detail, by Lemaitre and Vallarta, in a newly-published paper where several hundreds of them have been traced by the Bush-machine (13).

They are very similar to the asymptotic orbits seen in fig. 6, where the field $Q =$ const. has been replaced by a little simpler field chosen as a fairly good approximation. This picture is taken from a paper I published in 1934 (14).

The importance of these asymptotic orbits is that their envelopes separate regions from which trajectories can or cannot, penetrate the periodic trajectory in the pass.

There is also an infinity of other families of periodic trajectories (15). In figs. 7 and 8 are seen some wire-models of these orbits.

The calculation of these orbits has later been verified by some most striking experiments on cathode rays by the German physicist Brüche (16). As you see in figs. 9—11, the verification is most satisfactory.

Among the orbits coming from infinity there are series going straight to the dipole. These orbits are of outstanding importance for the theory of the polar aurora and several thousand hours have been sacrificed to calculate them (17). The corresponding orbits in the field $U =$ const. have a very simple meaning. They are the orbits of a point shot out from the dipole with velocity w_0 (18).

Some of the corresponding orbits in space are shown in figs. 12, 13 and 14. By means of these orbits it has been possible to explain a great many peculiarities of the aurora borealis (19).

Other interesting families of orbits are on the programme, for instance, orbits cutting a sphere with centre in the dipole at right angles.

From the theory of the cosmic radiation the following problem may be mentioned. At a given moment a cosmic particle with given energy comes down at a given place and from a given point of the sky. Find the regions among the stars from which the particle comes.

This problem can be solved by numerical or mechanical integration. On the film will be shown a case where such rays were coming down from zenith in Friedrichshafen and in Bergen, according to the experience by Ehmert and Trumpy (20).[1]

I hope you will agree with me, that the methods of numerical and mechanical integration of differential equations are very important not only in the applications but also in pure mathematics.

Bibliography.

1. V. BUSH: "The differential analyzer. A new machine for solving differential equations" (Massachusetts Inst. of Techn. Cambridge U. S. A.). J. Franklin Inst. *212*, 447—448 (1931), and Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, *3*, p. 65 (1932).

2. G. H. DARWIN: "Periodic Orbits", Acta mathematica *21*, p. 99 – 242.

3. ELIS STRÖMGREN: "Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps", Bulletin Astronomique, Deuxième série, Tome IX, Fasc. 2.

4. CARL STØRMER: "Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre avec applications aux aurores boréales", Arch, d. Scien. phys. et nat. *24*, Genève 1907, — and GÜNTHER SCHULZ: "Fehlerabschätzung für das Størmersche Integrationsverfahren", Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. B. 14, 1934.

5. F. BASHFORTH and J. C. ADAMS: "An attempt to test the theory of Capillary Action". Cambridge 1883, E. Y. Nyström: "Über die numerische Integration von Differentialgleichungen", Acta Soc. Scient. Fennicæ *L*, No. 13, 1925. — and ERNST LINDELÖF: "Differentiali- ja Integralilasku", III, p. 315, Helsinki 1935.

6. CARL STØRMER: "Sur le mouvement d'un point matériel portant une charge d'électricité sous l'action d'un aimant élémentaire", Vid.-Selsk. Skr., Math.-naturv. Kl. 1904, No. 3, Christiania.

7. CARL STÖRMER: "On the trajectories of electric corpuscles in space under the influence of terrestrial magnetism applied to aurora borealis and to magnetic disturbances", Arch. f. Math. og Naturv. *28*, No. 2, 1906, — and "Sur les trajectoires" etc., mentioned under (4).

8. CARL STØRMER: "Sur une classe de trajectoires remarquables dans le mouvement d'un corpuscule électrique dans le champ d'un aimant élémentaire", Arch f. Math. og Naturv. *31*, No. 1911, — et "Sur le mouvement de corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire et la forme de leur trajectoire à leur arrivé à l'aimant", Arch. des Sc. phys. et Natur., Genève 1913.

9. CARL STØRMER: "On the trajectories of electric particles in the field of a magnetic dipole with applications to the theory of cosmic radiation, III", Astrophysica Norvegica I, No. 1, 1934.

10. CARL STØRMER: The same, V, 1936, and "Résultats des calculs numériques des trajectoires de corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire, IV et V", Skrifter, utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, 1936.

11. CARL STØRMER: "Sur les trajectoires périodiques des corpuscules électriques dans l'espace sous l'influence du magnétisme terrestre avec application aux perturbations magnétiques", Comptes Rendus, Paris 1906, — and G. LEMAITRE: "Trajectoires périodiques", Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles, Série A, t. LIV, p. 162 – 207.

---

[1] After the lecture a moving picture was shown of a series of wire models of interesting trajectories. Some of the pictures of this film have been combined to stereoscopic pictures in figs. 3, 13, and 14.

12. Carl Størmer: "Sur une classe etc.", mentioned under (8).

13. G. Lemaitre et M. S. Vallarta: "On the Geomagnetic Analysis of Cosmic Radiation", Physical Review *49*, p. 719 and On the Allowed Cone of Cosmic Radiation, ibid. *50*, p. 493.

14. Carl Størmer: "On the trajectories of electric particles in the field of a magnetic dipole with applications to the theory of cosmic radiation, II", University Observatory publication No. 12, Oslo 1934.

15. Carl Størmer: „Periodische Elektronenbahnen im Felde eines Elementarmagneten und ihre Anwendung auf Brüches Modellversuche und auf Eschenhagens Elementarwellen des Erdmagnetismus", Zeitschr. f. Astroph. I, — 1930, and "On pulsations of terrestrial magnetism and their possible explanation by periodic orbits of corpuscular rays", Terr. Magn. and Atmos. Elec., Washington 1931.

16. Ernst Brüche: "Experimente zu Størmers Polarlichttheorie", Phys, Zeitschr. 31, 1930, "Modellversuche mit sichtbaren Elektronenstrahlen zu Størmers Theorie etc.", Die Naturw. 18, p. 1085—1093, — and "Some new theoretical and experimental Results on the Aurora Polaris", Terr. Magn. and Atmos. Elec., Washington 1931.

17. Carl Størmer: "Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire I". Vid.-Selsk. Skr., Math.-naturv. Kl. 1913, No. 4, Kristiania, — and "How the horse-shoe-formed auroral curtains can be explained by the corpuscular theory", Terr. Magn. and Atmos. Elec. Washington 1931.

18. Ibid.

19. Carl Størmer: "Über die Probleme des Polarlichtes", Ergebnisse der kosmischen Physik, I, Leipzig 1931.

20. Carl Størmer: On the trajectories of electric particles in the field of a magnetic dipole with applications to the theory of cosmic radiation, VI, Astrophysica Norvegica II, 1936.

DIE THEORIE DER REGULÄREN FUNKTIONEN EINER QUATERNIONENVARIABLEN

Von RUD. FUETER, Zürich.

Einleitung.

In der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen kann man folgende, auch historisch wichtigen Etappen konstatieren:

1) Zunächst wurde die aus der Mechanik entsprungene LAPLACE'sche Gleichung:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1'}$$

einer reellen Funktion $u=u(x, y)$ der beiden reellen Variablen x, y betrachtet.

2) Hierauf wurde die Verbindung von zwei Lösungsfunktionen u, v der Gleichung (1') durch die schon EULER[1] bekannten Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2'}$$

hergestellt.

3) Schließlich wurde mittels der komplexen Einheit die Zusammenfassung:

$$z = x + iy, \quad w = u + iv, \tag{3'}$$

bewerkstelligt, aber erst, nachdem die komplexen Zahlen Bürgerrecht erhalten hatten. Dieser letzte Schritt ist deshalb so bedeutungsvoll, weil einmal die Gleichungen (2') durch die völlig gleichwertige und überaus praktische Bedingung der Existenz des Differentialquotienten dw/dz ersetzt werden können; des weitern aber, und dies scheint mir viel entscheidender zu sein, weil man dadurch in die Lage versetzt war, *rein algebraisch* Lösungen von (2') zu berechnen, da elementare Funktionen wie z^n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Real- und Imaginärteile besitzen, die (2') befriedigen.

Definition der regulären Funktionen.

Gehen wir aus R_2 in R_4, und sind x_k, $k=0, 1, 2, 3$ die vier reellen Variablen, so kann die klassische Theorie folgendermaßen verallgemeinert werden (was zugleich die einzige bekannte Verallgemeinerung bildet): Wir betrachten in R_4 einen endlichen, nicht degenerierten Raum H, und in

[1] Siehe STÄCKEL: Bibl. Math. (3), 1, 1900, S. 109.

demselben stetige, zweimal stetig differentierbare Funktionen u, die der Gleichung:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1}$$

genügen. Sind u_k, $k=0, 1, 2, 3$, vier solche Funktionen, so verknüpfen wir sie wieder durch lineare homogene Differentialgleichungen. Um dieselben einfach anschreiben zu können, müssen wir gleich den dritten Schritt tun, hyperkomplexe Zahlen einzuführen. Für (1) sind es die HAMILTON'schen Quaternionen $i_0=1$, i_1, i_2, i_3 [1]. Wir setzen:

$$z = \sum_{(k)} x_k i_k, \quad w = \sum_{(k)} u_k i_k. \tag{3}$$

z heiße Quaternionenvariable, w Quaternionenfunktion. Kürzt man den partiellen Differentialquotienten $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_h}$ mit $u_k^{(h)}$ ab, und setzt $w^{(h)} = \sum\limits_{(k)} u_k^{(h)} i_k$, so gibt es für die Gleichungen (2) zwei Möglichkeiten. Sie lauten:

$$\text{I.} \quad \sum_{(h)} w^{(h)} i_h = 0,$$

oder: (2)

$$\text{II.} \quad \sum_{(h)} i_h w^{(h)} = 0.$$

Funktionen, die I genügen, heißen *rechtsregulär* in H, diejenigen, die II genügen, *linksregulär* in H. Man setzt $w=f(z)$. Im reellen ausgeschrieben, lauten die Gleichungen I und II:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \pm \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \mp \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x_2} \mp \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_0} \pm \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x_3} \pm \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \mp \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_0} = 0.
\end{aligned} \tag{2a}$$

(oberes Zeichen im Falle I, unteres im Falle II).

---

[1] Siehe zur Bezeichnung und das Rechnen mit Quaternionen: A. HURWITZ: Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen, Berlin, 1919. W. R. HAMILTON, Lectures on Quaternions, Dublin, 1853.

Man sieht sofort, daß (2) die Gleichung (1) für alle u_k zur Folge hat. Differenziert man nämlich (2) nach x_l partiell, multipliziert von rechts (links) mit $\bar{i}_l$ und summiert über alle l, so wird:

$$\sum_{(h,l)} w^{(hl)} i_h \bar{i}_l = \Delta w = 0, \text{ resp. } \sum_{(h,l)} \bar{i}_l i_h w^{(hl)} = \Delta w = 0,$$

da in $w^{(hl)}$ h und l vertauscht werden dürfen, und $i_h \bar{i}_l + i_l \bar{i}_h = 0$, außer wenn $h = l$.

Satz 1: *Die Komponenten der rechts- oder linksregulären Funktionen genügen der Gleichung* (1).

Was berechtigt zur Definition durch die Gleichungen (2)? Einen eindeutigen Differentialquotienten können bekanntlich die Funktionen nicht besitzen.[1] An seine Stelle tritt die Funktionaldeterminante:

$$D = |u_k^{(h)}|, \qquad k = \text{Zeile}, \ h = \text{Spalte}.$$

Ist r der größte Wert, den der Rang von D in einem Punkte von H annehmen kann, so heiße $w = f(z)$ *vom Range* r. Es gibt Funktionen vom Range 4, 3, 2, nicht dagegen 1. Funktionen 0-ten Ranges sind nur die Konstanten.

Dagegen können wir uns wieder algebraisch reguläre Funktionen verschaffen.[2] Das ist die entscheidende Begründung der Bedingung (2). Zwar ist nicht z^n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ regulär, dagegen ist die Delta-ableitung Δz^n, eine leicht berechenbare rationale Form der x_k vom Grade $n-2$, eine rechts- und linksreguläre Funktion.

Ich schreibe wegen später nur den Fall $n = -1$ hin:

$$\Delta z^{-1} = -4\, n(z)^{-1} z^{-1},$$

wo $n(z)$ die Norm von z ist. Wegen Satz 1 genügt z^n der Gleichung $\Delta \Delta z^n = 0$. Man kann leicht jeder analytischen Funktion einer komplexen Variablen rechts- und linksreguläre Funktionen zuordnen.

Ich bemerke noch, daß man umgekehrt *jede* Potentialfunktion u von vier reellen Variablen als Realteil einer rechts- und linksregulären Funktion auffassen kann, falls der zugehörige Bereich H topologisch vom Zusammenhang der Hyperkugel ist.[3]

[1] Siehe G. Scheffers: Berichte kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 45, S. 828.

[2] Siehs Fueter: 1, S. 314, u. ff.

[3] Siehe Fueter: 1, S. 312.

Spezialfälle.

Nimmt man in H eine der vier Funktionen u_k identisch gleich null, und hängen die übrigen u nur von drei Variablen x ab, so erhält man eine Funktion vom Range 3, die man im R_3 deuten kann. Ist z. B. $u_0 \equiv 0$, und hängen u_k, $k = 1, 2, 3$ nur von x_1, x_2, x_3 ab, so lauten die Gleichungen (2 a):

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3}.$$

Solche Funktionen sind schon viel studiert worden.[1]

Setzt man dagegen 2 Funktionen u identisch gleich null, so erhält man Funktionen vom Range 2; z. B. sei $u_2 \equiv 0$, $u_3 \equiv 0$. Hängen u_0 und u_1 nur von x_0, x_1 ab, so setzte man $z_1 = x_0 + i_1 x_1$. $w = f(z)$ ist dann eine analytische Funktion der komplexen Variablen z_1. Die analytischen Funktionen einer komplexen Variablen sind daher ein Spezialfall der regulären Funktionen. Sind dagegen $u_2 \equiv u_3 \equiv 0$, und hängen u_0 und u_1 von allen vier Variablen ab, so setze man:

$$z_1 = x_0 + i_1\, x_1, \quad z_2 = x_2 + i_1\, x_3;$$

dann ist wegen (2 a) $w = f(z)$ als rechtsreguläre Funktion von z eine *analytische Funktion der beiden komplexen Variablen* z_1 *und* z_2.[2] Die Theorie der analytischen Funktionen zweier komplexer Variablen ist daher ebenfalls ein Spezialfall der Theorie der rechtsregulären Funktionen. Sind w_1 und w_2 zwei analytische Funktionen der beiden komplexen Variablen (in $k(i_1)$) z_1 und z_2, so ist auch das durch w_1, w_2 vermittelte *Abbildungsproblem* von H in R_4 auf ein H^* in R_4 ebenfalls in unserer Theorie enthalten. Denn die Funktion:

$$w = w_1 + i_2\, w_2, \text{ oder } w = w_1 + i_3\, w_2,$$

[1] Man braucht nur den Vektor mit den Komponenten u_k, $k = 1, 2, 3$ gleich dem Gradient von U zu setzen, wo

$$\Delta\, U = 0$$

ist, so genügen die u_k den 4 Gleichungen. Ein besonders interessantes Beispiel ist

$$U = \tfrac{1}{2}\, lg \frac{x_3 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}};$$

$$\text{es wird: } w = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \left\{ - \frac{x_1\, x_3}{x_1^2 + x_2^2}\, i_1 - \frac{x_2\, x_3}{x_1^2 + x_2^2}\, i_2 + i_3 \right\}.$$

[2] Siehe die Anzeige von Behnke: Zentralblatt, Bd. 12, S. 17.

ist eine rechtsreguläre Funktion, die die Abbildung vermittelt. Dieses w ist im allgemeinen vom Range 4; denn ihre Funktionaldeterminante D hat den Wert:

$$D = n\left(\begin{vmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & \frac{\partial w_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial w_2}{\partial z_1} & \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \end{vmatrix}\right),$$

wo n ( ) die Norm der komplexen Zahl ist.

Integralsätze.

Die Überlegenheit der Theorie der regulären Funktionen gegenüber z. B. der Theorie der analytischen Funktionen zweier Variabler scheint mir vor allem darin zu bestehen, daß die wirklichen Analogien zu den *beiden Cauchy'schen Sätzen* gelten. Es sei ein endlicher zusammenhängender Raum H in R_4 gegeben, und R die ihn begrenzende (dreidimensionale) Hyperfläche. R sei etwa durch vier stetige, und stückweise stetig differentierbare reelle Funktionen der reellen Variablen t_h, $h = 1, 2, 3$ gegeben:

$$x_k = x_k(t_1, t_2, t_3), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Die t durchlaufen einen bestimmten Teil von R_3. Es sollen auch in keinem Punkte alle dreigliedrigen Unterdeterminanten der Matrix $\left(\frac{\partial x_k}{\partial t_h}\right)$ zugleich verschwinden. Dann besitzt R in jedem Punkte eine ins Innere von H gerichtete Normale. Sind ξ_k deren Richtungskosinusse, und dr das Element von R in diesem Punkte, so setze man:

$$dZ = \sum_{(k)} \xi_k i_k \, dr.$$

Man kann dZ aus den obigen Funktionen berechnen:

$$dZ = \pm \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial x_0}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_0}{\partial t_3} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{vmatrix} dt_1 \, dt_2 \, dt_3, \tag{4}$$

wo die Determinante nach der ersten Zeile entwickelt gedacht ist. Ist jetzt w rechts-, v linksregulär, so gilt als Folge des Gauss'schen Integralsatzes in R_4:[1]

[1] FUETER: 1, S. 312.

Satz 2: *Ist w in H und auf der Begrenzung von H rechtsregulär, v linksregulär, und R die H begrenzende Hyperfläche, so ist:*

$$\int\limits_{(R)} w\, d\, Z\, v = 0.$$

Aus diesem Satze kann man all die bekannten Folgerungen und Erweiterungen herleiten, die aus der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen bekannt sind.

Genügen H, R und $w = f(z)$ den vorigen Bedingungen, und ist ζ der variable Punkt von R, z ein Punkt im Innern von H, so nehme man für v die sicherlich linksreguläre Funktion:

$$v = \Delta\left((\zeta - z)^{-1}\right) = -4\, n\, (\zeta - z)^{-1}\, (\zeta - z)^{-1};$$

die Delta-ableitung kann man nach z oder ζ nehmen, da man beide Male dasselbe erhält. Dann gilt:[1]

Satz 3: *Ist $w = f(z)$ in H und auf der Begrenzung von H rechtsregulär, und z ein Punkt im Innern von H, so wird:*

$$w = f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(R)} f(\zeta)\, d\, Z\, \Delta\left((\zeta - z)^{-1}\right),$$

wo R die Begrenzung von H ist.

Ist H eine Hyperkugel K um O, so enthält dieser Satz die Poisson'sche Integralformel für vier Variable:

$$w = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{(K)} f(\zeta)\, \frac{r^2 - n(z)}{n(\zeta - z)^2}\, \frac{dr}{r}$$

wo $r = |\zeta|$ der Radius der Kugel ist. Ebenso folgt aus ihm das Analogon zum Liouville'schen Satze, daß eine überall rechtsreguläre und *beschränkte* Funktion konstant ist.[2]

Analytische Darstellung.

Die wichtigste Folgerung aus Satz 3 ist, daß der analytische Ausdruck aller regulären Funktionen aufgestellt werden kann. Man kann sie nämlich um jeden Punkt, in dem sie regulär sind, in absolut und gleichmäßig konvergente Reihen entwickeln.

---

[1] Fueter: 1, S. 318. Ich beschränke mich von jetzt an auf rechtsreguläre Funktionen. Für die linksregulären gilt alles entsprechend.

[2] Fueter: 2, S. 71 und 72.

Ist O in H, so ist für alle Bereiche von z, in denen $|z| < |\zeta|$ ist,[1]

$$\Delta\left((\zeta - z)^{-1}\right) = \zeta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\left((z\,\zeta^{-1})^{n+2}\right)$$

eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe. Dabei ist die Deltaableitung nach z zu nehmen; sie ist eine ganze rationale Form n-ten Grades in den 4 reellen Variablen x_k, und läßt sich so entwickeln:[2]

$$\zeta^{-1} \Delta\left((z\,\zeta^{-1})^{n+2}\right) = \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, p_{n_1 n_2 n_3}(z),$$

wo über *alle* Darstellungen von n als Summe von drei ganzen, rationalen, nicht negativen Zahlen n_k summiert wird. q hängt nur von ζ, p nur von z ab; q ist eine leicht angebbare rationale Funktion von ζ, die in jedem, $\zeta = 0$ nicht enthaltenden Bereich linksregulär ist; $p(z)$ ist eine ganze rationale Form n-ten Grades der x_k, ist rechts- und linksregulär und wird so definiert:

$$p_{n_1 n_2 n_3}(z) = \frac{1}{n!} \sum_{(k_r)} x_{k_1} - x_0\, i_{k_1})(x_{k_2} - x_0\, i_{k_2}) \cdots (x_{k_n} - x_0\, i_{k_n}),$$

wo alle k_r eine der Zahlen 1, 2, 3 bedeuten, und unter ihnen genau n_1 mal 1, n_2 mal 2 und n_3 mal 3 vorkommen. Die Summe ist über die $n!/n_1!\, n_2!\, n_3!$ *verschiedenen* Permutationen der k_r erstreckt. Die einfachsten p sind:

$$p_{000}(z) = 1,\; p_{100}(z) = x_1 - x_0\, i_1,\; \cdots$$

$$p_{200}(z) = \frac{1}{2!}(x_1 - x_0\, i_1)^2,\; p_{110}(z) = x_1 x_2 - x_0 x_1 i_2 - x_0 x_2 i_1,\; \cdots$$

$$p_{300}(z) = \frac{1}{3!}(x_1 - x_0\, i_1)^3,$$

$$p_{210}(z) = \tfrac{1}{2}\left(x_1^2 x_0 - x_0^2 x_2 - 2\, x_0 x_1 x_2 i_1 + (-x_1^2 x_0 + \frac{1}{3} x_0^3)\, i_2\right)$$

$$p_{111}(z) = x_1 x_2 x_3 - x_0 x_2 x_3 i_1, - x_0 x_1 x_3 i_2 - x_0 x_1 x_2 i_3,\; \cdots$$

. . . .

Daher wird:

$$\Delta\left((\zeta - z)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\, p_{n_1 n_2 n_3}(z).$$

[1] Fueter: 1, S. 323. Der Einfachheit halber sind alle Entwicklungen um den Nullpunkt genommen. Eine Translation ergibt ohne weiteres den allgemeinen Fall.

[2] Fueter: 3, S. 373, u. ff.

Ist nun $w = f(z)$ in h rechtsregulär, so läßt es sich nach Satz 3 darstellen. Unter dem Integral setzt man die eben gefundene absolut und gleichmäßig konvergente Reihe ein und darf gliedweise integrieren:[1]

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z), \qquad \text{I.}$$

wo:

$$c_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta)\, dZ q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta), \qquad \text{II.}$$

ist. Da q linksregulär ist, darf man nach Satz 2 statt K im Integral wieder R setzen. Man bemerke daß die Reihe in Diagonalform summiert ist, und im Innern jeder Hyperkugel um O absolut und gleichmäßig konvergent ist, deren Radius kleiner ist als der dem Punkt O zunächstgelegene singuläre Punkt von $w = f(z)$. Außerdem ist die Reihenentwicklung eindeutig, d. h. die c müssen den Wert II haben.

Im Falle, daß w eine analytische Funktion zweier komplexer Variablen ist, ist I. die bekannte Potenzreihenentwicklung.

Dieses Resultat läßt sich umkehren. Da $p(z)$ rechtsregulär ist, stellt jede in einer Hyperkugel konvergente Reihe I. eine rechtsreguläre Funktion dar.

Satz 4: *Jede in $z = 0$ rechtsreguläre Funktion $w = f(z)$ läßt sich um O in eine absolut und in einer Hyperkugel um O gleichmäßig konvergente Reihe I. entwickeln; und umgekehrt stellt jede in einer Hyperkugel um O gleichmäßig und absolut konvergente Reihe I. eine rechtsreguläre Funktion dar.*

Damit ist der Ausgangspunkt für die Aufstellung aller rechtsregulärer Funktionen gegeben. Man geht von einem Element I. aus, und findet durch die *analytische Fortsetzung* die ganze Funktion.

Statt durch die Integralformel II. kann man die Koeffizienten c auch als partielle Differentialquotienten darstellen:[2]

$$c_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\partial^{n_1+n_2+n_3} f(z)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}}, \quad \text{für } z = 0.$$

Daraus wird die Analogie mit der Taylor'schen Reihe noch augenscheinlicher.

[1] Fueter: 3, S. 374.
[2] Fueter: 3, S. 375.

Speziell folgt hieraus auch, daß die Komponenten einer regulären Funktion sich in jedem Punkt, in dem die Funktion regulär ist, in eine konvergente Potenzreihe nach den vier reellen Variablen x_k, $k = 0, 1, 2, 3$, entwickeln lassen (reelle analytische Funktionen).

Wertverteilung der regulären Funktionen.

Die rechtsregulären Funktionen bilden einen *Modul*; d. h. sind w_1, $w_2, \cdot\cdot, w_n$ rechtsregulär und $c_1, c_2, \cdot\cdot, c_n$ beliebige konstante Quaternionen, so ist auch:

$$w = \sum_{k=1}^{n} c_k w_k$$

rechtsregulär. Dagegen bilden die rechtsregulären Funktionen keinen Körper und erfüllen nicht die Gruppeneigenschaft, da im allgemeinen die reguläre Funktion einer regulären Funktion nicht mehr regulär ist. Die weitgehendsten Resultate, die ich in dieser Beziehung aussprechen kann, sind die folgenden: Ist w rechtsregulär und q ein konstantes Quaternion, so ist $w^* = q^{-1} w q$ eine rechtsreguläre Funktion von $z^* = q^{-1} z q$.[1] Ist $w = f(z)$ in H rechtsregulär, so ist $w = f\left((zc + d)^{-1}(za + b)\right) n\,(zc + d)^{-1}(zc + d)^{-1}$ rechtsregulär in H', wo $a, b, c \neq 0, d$ konstante Quaternionen sind, und H' der H entsprechende Bereich ist.

Es scheint mir eine bemerkenswerte Erscheinung, daß trotzdem alle tiefen Eigenschaften der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen auch für die regulären Funktionen erfüllt sind. In erster Linie gilt der grundlegende Satz:

---

[1] Denn setzt man $z^* = \sum_{(k)} x_k^* i_k$, $q\, i_k\, q^{-1} = \sum_{(h)} \mathcal{Q}_{hk}\, i_h$, so muß:

$$\sum_{(k)} \mathcal{Q}_{lk}\, \mathcal{Q}_{hk} = 0, \quad h \neq l; \quad = 1, \quad l = h,$$

sein, und:

$$\frac{\partial x_l}{\partial x_k^*} = \mathcal{Q}_{lk}.$$

Somit ist:

$$\sum_{(k)} \frac{\partial w^*}{\partial x_k^*}\, i_k = q^{-1} \sum_{(l,k)} w^{(l)}\, \mathcal{Q}_{lk}\, q\, i_k$$

$$= q^{-1} \Big[\sum_{(l,k,h)} w^{(l)}\, \mathcal{Q}_{lk}\, \mathcal{Q}_{hk}\, i_h \Big] q = q^{-1} \sum_{(l)} w^{(l)}\, i_l\, q = 0.$$

Satz 5: *Eine rechtsreguläre Funktion ist durch ihre Werte auf einem beliebig kleinen (dreidimensionalen) Hyperflächenstück ihres Bereiches eindeutig bestimmt.*[1]

Zum Beweise haben wir nur zu zeigen, daß wenn $w = f(z)$ in einem Hyperflächenstück R null ist, sie überall null ist. Seien $\xi_k^{(h)}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $h = 1, 2, 3$, die Richtungskosinusse von drei nicht in einer (zweidimensionalen) Ebene liegenden Richtungen in einem Punkte von R. Die Richtungen sind so gewählt, daß in der Umgebung des Punktes auf ihnen noch unendlich viele Punkte von R liegen. Da w in R null ist, müssen auch die partiellen Differentialquotienten nach diesen drei Richtungen null sein, oder:

$$\sum_{(k)} w^{(k)} \xi_k^{(h)} = 0, h = 1, 2, 3.$$

Nimmt man noch die Definitionsgleichung:

$$\sum_{(k)} w^{(k)} i_k = 0,$$

hinzu, so folgt, daß $w^{(k)} = 0$ in R ist, für jedes $k = 0, 1, 2, 3$. Nun ist aber auch $w^{(k)}$ rechtsregulär, also sind auch seine Differentialquotienten null, u. s. f. Nach Satz 4 ist daher $w = 0$.

Wegen Satz 5 nimmt eine rechtsreguläre Funktion einen vorgeschriebenen Wert nicht nur in einem Punkt an, sondern sie kann ihn auch auf einer Kurve oder (zweidimensionalen) Fläche annehmen, falls die Funktionaldeterminante in jenen Punkten null ist. Z. B. nimmt die Funktion:

$$p_{111}(z) = x_1 x_2 x_3 - x_0 x_2 x_3 i_1 - x_0 x_1 x_3 i_2 - x_1 x_1 x_2 i_3,$$

die die Funktionaldeterminante $D = 3 x_0^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2$ besitzt, den Wert 0 auf allen Koordinatenebenen $x_k = 0$, $x_l = 0$, $k \neq l$, an. Oder die Funktion:

$$\varDelta z^4 = -4(3 z^2 + 2 n(z) + \bar{z}^2), \quad D = 2^{16} x_0^2 (3 x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

nimmt den Wert 1 an auf der Kugelfläche:

$$x_0 = 0, \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{8}.$$

Dagegen nimmt sie den Wert 0 nur in dem Punkte 0 an, trotzdem hier $D = 0$ ist.[2]

Nehmen wir dagegen den Fall der Funktionen vom Range 3, so gilt der

---

[1] Fueter: 2, S. 74.

[2] Wenn man in der weiter unten angegebenen Weise Ordnungszahlen einführt, kann man durch Rechnung zeigen, daß der Wert 0 von der Ordnung 2 angenommen wird; ebenso der Wert 1 auf der ganzen Kugelfläche.

Satz 6: *Ist $w = f(z)$ in H vom Range 3, so gibt es in jedem Punkte von H, in dem die Funktionaldeterminante vom Range 3 ist, eine und nur eine Kurve, längs der w denselben Wert annimmt.*

Die Kurve nenne ich *Verzweigungskurve*. Zum Beweis nehmen wir an, die Funktionaldeterminante D sei in $z = c$ vom Range 3 null. Eine dreigliedrige Unterdeterminante von D ist dann in $z = c$ nicht null. Wir legen durch c eine Kurve, die durch

$$x_k = x_k(t), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

gegeben sei, wo t eine reelle Variable ist. Wir denken uns dieselbe bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{dw}{dt} = \sum_{(h)} w^{(h)} \frac{dx_h}{dt} = 0, \text{ oder reell ausgeschrieben:}$$

$$\sum_{(h)} u_k^{(h)} \frac{dx_h}{dt} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{a}$$

Da $z = c$ ein regulärer Punkt von w ist, so sind alle $u_k^{(h)}$ in $z = c$ in konvergente Potenzreihen nach den x_k entwickelbar. Da außerdem eine Unterdeterminante von D in $z = c$ nicht null ist, so können wir aus (a) drei Differentialquotienten durch den vierten, etwa dx_l/dt ausrechnen. Nehmen wir noch x_l für t, so erhält man drei Gleichungen:

$$\frac{dx_k}{dx_l} = \varphi_k(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad k \neq l, \tag{b}$$

wo φ_k konvergente Potenzreihen um $z = c$ sind. Nach dem Existenztheorem der Differentialsysteme gibt es dann eine und nur eine Lösung:

$$x_k = x_k(x_l), \quad k \neq l,$$

die durch $z = c$ geht und (b) erfüllt. Da auf derselben $dw/dx_l = 0$ ist, nimmt w denselben Wert in jedem ihrer Punkte an. Aus Satz 6 folgt, daß *durch Funktionen vom Range 3 in H letzteres auf ein dreidimensionales Gebilde abgebildet wird.*

Entsprechend gilt für Funktionen vom Range 2:

Satz 7: *Ist $w = f(z)$ in H vom Range 2, so gibt es in jedem Punkt von H, in dem die Funktionaldeterminante vom Range 2 ist, eine und nur eine Fläche, längs der w denselben Wert annimmt.*

Die Fläche heißt *Verzweigungsfläche.* Ist wieder $z = c$ ein Punkt, in dem D vom Range 2 ist, so ist dort eine zweireihige Unterdeterminante $\neq 0$, dieselbe enthalte *nicht* die l- und m-Spalte. Man lege durch $z = c$ eine Fläche: $x_k = x_k(x_l, x_m)$, k die beiden Zahlen unter 0, 1, 2, 3, für die $k \neq m$, $k \neq l$, die den Bedingungen genügt:

$$\frac{\partial w}{\partial x_l} = 0, \frac{\partial w}{\partial x_m} = 0;$$

daraus folgt wegen der Annahme über die zweireihige Unterdeterminante von D in $z = c$, daß für die beiden k unter 0, 1, 2, 3, die $\neq l$, $\neq m$ sind,

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \varphi_k(x_0, x_1, x_2, x_3), \frac{\partial x_k}{\partial x_m} = \psi_k(x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{c}$$

ist. Somit folgt wieder, daß es eine und nur eine Fläche gibt, die durch $z = c$ geht, und (c) befriedigt,[1] da φ_k und ψ_k in $z = c$ in konvergente Potenzreihen nach den x_k entwickelbar sind. Wegen der obigen Bedingung ist w nicht von x_l, x_m abhängig, falls man die gefundenen Funktionen für die x_k einsetzt; also hat w in allen Punkten der Fläche denselben Wert.

Satz 7 ist im Falle, daß $w = f(z)$ eine analytische Funktion zweier Variabler ist, ein bekannter wichtiger Satz, der somit für alle Funktionen vom Range 2 gilt.[2]

Aus Satz 7 folgt, daß *die durch eine Funktion vom Range 2 vermittelte Abbildung zweidimensional ist.*

---

[1] Wegen der Erzeugung der Diffenrentialgleichungen (*c*) lassen sich

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial x_l\, \partial x_m}, \quad k \neq l, \ \neq m.$$

nur auf eine Weise aus ihnen berechnen. Denn wegen:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_l\, \partial x_m} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_m\, \partial x_l}$$

müssen die beiden möglichen Arten denselben Wert ergeben. Dies ist aber die einzige Bedingung dafür, daß das überbestimmte System (*c*) eine Lösung hat. Siehe Engel-Faber: *Die Lie'sche Theorie der part. Diff. gleichungen 1. Ord.* 1932, S. 44.

[2] Siehe etwa Behnke-Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer Variablen (Ergebnisse der Math. Bd. 3, Heft 3), Berlin 1934.

Funktionen vom Range 1 kann es nicht geben; denn nach dem eben entwickelten Verfahren müßte die Funktion jeden Wert auf einer (dreidimensionalen) Hyperfläche annehmen, was dem Satze 4 widerspricht.

Um nun das grundlegende *Abbildungsproblem* eines z-Raumes H auf einen w-Raum H' in Angriff zu nehmen, d. h. die Werteverteilung der Funktion $w = f(z)$ zu studieren, beweist man zunächst den Satz:

Satz 8: *Ist $w = f(z)$ in und auf der Begrenzung von H regulär (und nicht konstant), so kann $|f(z)|$ seinen maximalen Wert nur auf der Begrenzung von H annehmen.*[1]

Außerdem ist es notwendig, *Ordnungszahlen* einzuführen. *Zu welcher Ordnung nimmt w in $z = c$ den Wert $f(c)$ an?*

Hierzu denken wir uns $z = c$ als inneren Punkt eines beliebig kleinen Hyperraumes H mit der Begrenzungsfläche R. H und R bilden wir durch $w = f(z)$ auf den w-Raum ab. Die Bilder seien H' und R'. Nehmen wir an, daß $f(c)$ nicht auf R' liegt, so setzen wir:

$$n = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R')} dZ' \, \Delta_w \left((w - f(c)\right)^{-1} \tag{4}$$

wo dZ' das dZ entsprechende Element von R' im w-Raume ist. Das Integral ist jedenfalls von R' unabhängig, so lange $f(c)$ im Innern bleibt. Ist in $z = c : D \neq 0$, so wähle man H so klein, daß w den Wert $f(c)$ nur in $z = c$ annimmt. Dann ist R' topologisch der Hyperkugel gleich, und nach Satz 3 $n = 1$. Dasselbe gilt, wenn D im isolierten $z = c$ null wird. Man macht jetzt in (4) die Substitution rückwärts in den z-Raum. *Der Realteil von (4) ist dann das Kronecker'sche Integral für 4 Dimensionen,*

---

[1] Beweis von Satz 8: Nähme $w = f(z)$ das Maximum des Betrages in einem Innern Punkte $z = c$ von H an, so lege man um c eine Hyperkugel K mit dem Radius r. Dann ist, falls r genügend klein ist, nach Satz 3:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{(K)} f(\zeta) \, dr, \quad \text{und} \quad |f(c)| \leqq \frac{1}{2\pi^2} \int_{(K)} |f(\zeta)| \, dr.$$

Ist aber r genügend klein und $|f(z)|$ in K nicht konstant, so ist das Mittel der Werte $|f(\zeta)|$ kleiner als $|f(c)|$, was einen Widerspruch ergibt. Ist aber $|f(z)|$ in K konstant, so differenziere man $|f(z)|^2$ zweimal nach x_k und addiere über alle k, so folgt, da $\Delta u_k = 0$ ist:

$$2 \sum_{(h,k)} \left(u_h^{(k)}\right)^2 = 0, \text{ oder } u_h^{(k)} = 0, \quad h, \; k = 0, 1, 2, 3$$

d. h. w ist konstant.

der Imaginärteil ist null. n ist daher stets eine ganze rationale Zahl, *die Kronecker'sche Ordnungszahl.* Unsere Annahme, daß $f(c)$ nicht auf R' liegt, ist nur für Funktionen vom Range 4 erfüllbar, da sonst Kurven oder Flächen durch $z = c$ hindurchgehen, die sich ins unendliche erstrecken. Wir setzen somit voraus, daß w vom Range 4 sei. Ferner gehe durch $z = c$ keine Verzweigungskurve oder Verzweigungsfläche hindurch. Dann kann man in (4) die Substitution durchführen:

$$n = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(R)} \left(\sum_{h,k} D_k^h \xi_h i_k \right) \Delta_w \left((w - f(c) \right)^{-1} dr$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{(R)} \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \\ u_0^{(0)} & u_0^{(1)} & u_0^{(2)} & u_0^{(3)} & 1 \\ u_1^{(0)} & u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & u_1^{(3)} & i_1 \\ u_2^{(0)} & u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & u_2^{(3)} & i_2 \\ u_3^{(0)} & u_3^{(1)} & u_3^{(2)} & u_3^{(3)} & i_3 \end{vmatrix} n \left(w - f(c) \right)^{-1} \left(w - f(c) \right)^{-1} dr, \tag{5}$$

wo D_k^h die zu $u_k^{(h)}$ gehörige dreigliedrige Unterdeterminante von D ist, ξ_h die Richtungskosinusse der ins Innere von R gerichteten Normalen und dr das Element in einem Punkte von R ist. Man kann von (5) den Realteil nehmen; setzt man $f(c) = \sum\limits_{(l)} C_l i_l$, so wird:

$$n = -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{(R)} \left[\sum_{(h,k)} D_k^h \xi_h (u_k - C_k) \right] \left(\sum_{(l)} (u_l - C_l)^2 \right)^{-2} dr$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{(R)} \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \\ u_0^{(0)} & u_0^{(1)} & u_0^{(2)} & u_0^{(3)} & u_0 - C_0 \\ u_1^{(0)} & u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & u_1^{(3)} & u_1 - C_1 \\ n_2^{(0)} & u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & u_2^{(3)} & u_2 - C_2 \\ u_3^{(0)} & u_3^{(1)} & u_3^{(2)} & u_3^{(3)} & u_3 - C_3 \end{vmatrix} \left[\sum_{(l)} (u_l - C_l)^2 \right]^{-2} dr \tag{5 a}$$

Ist $n \neq 0$, so ist auch der Bildpunkt $f(c)$ innerer Punkt von R' und der Satz der Gebietstreue gilt, d. h. durch w werden innere Punkte in innere Punkte abgebildet.[1]

[1] Siehe zu den topologischen Fragen: ALEXANDROFF-HOPF: *Topologie* 1935, Bd. 1, Kap. XII, S. 457 u. ff. spez. S. 467 zum Kroneckerschen Integral. Herrn Hopf bin ich für manche Hilfe zu großem Dank verpflichtet.

Singularitäten. Der erweiterte Raum R_4.

Betrachtet man zuerst die isolierten Singularitäten, so kann man in deren Umgebung die der Laurent'schen Entwicklung entsprechende Reihe aufstellen,[1] falls die Funktion dort eindeutig ist. Ist die Anzahl der Glieder mit negativen Indizes unendlich groß, wird man von einer wesentlichen Singularität sprechen, sonst von einem Pol. Bei letzterm gilt die Tatsache, daß es keine Pole 1. und 2. Ordnung gibt, sondern nur solche 3. oder höherer Ordnung. Z. B. hat:

$$w = \Delta(z^{-1}) = -4\,n(z)^{-1}\,z^{-1}$$

in $z=0$ einen Pol 3. Ordnung. Man kann sagen, daß wenn eine Funktion in einem Punkte wie z^{-1} oder z^{-2} für $z=0$ unendlich wird, die Singularität entweder nicht isoliert ist, oder die Funktion in der Umgebung nicht eindeutig ist.

Während man diesen Fall beherrscht, kann ich über den Fall singulärer Kurven, Flächen und Hyperflächen noch nichts aussagen. Wie Beispiele lehren, gibt es schon rationale Funktionen (d. h. Funktionen, deren Komponenten rationale Funktionen der x_k sind), die in allen Punkten von Flächen unendlich werden. Ein solches Beispiel ist die reguläre Funktion:

$$w = \Delta\left((z^2+1)^{-1}\right)$$
$$= -8n(z(z^2+1)^{-1})(z^2+1)^{-1} - 4(z^2+1)^{-2}(z^2(z^2+1)^{-1}+(\bar{z}^2+1)^{-1}\bar{z}^2-1),$$

die auf der Kugelfläche $x_0=0,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ überall unendlich wird.

Dies gibt uns Anhaltspunkte über die Einführung des Unendlichen. Bei der Erweiterung von R_4 muß man die größte Vorsicht walten lassen. Will man zunächst festsetzen, wann eine Funktion im unendlichen *regulär* ist, so muß man folgende Forderungen stellen: a) *$w=f(z)$ ist für alle z, für die $|z| \geqq r$ ist, rechtsregulär und eindeutig*; b) *$|f(z)|$ ist für alle $|z| \geqq r$ beschränkt.* Diese Forderungen führen unmittelbar dazu, das Unendliche punktförmig anzusehen. Ist $w=f(z)$ in H rechtsregulär, so ist $w'=f(z^{-1})\,n(z)^{-1}\,z^{-1}$ rechtsregulär in H', wo H' der durch z^{-1} vermittelte Bildbereich von H ist. Daraus folgt unmittelbar aus Satz 4, daß $w=f(z)$, falls es a) und b) befriedigt, um Unendlich in die konvergente Reihe:

$$w = f(z) = d_{000} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3}\, p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1})\, n(z)^{-1}\, z^{-1} \quad \text{III.}$$

entwickelt werden kann. Umgekehrt stellt jede konvergente Reihe III. eine rechtsreguläre Funktion dar, die den Forderungen a) und b) genügt.

---

[1] Siehe FUETER: 1, S. 326 und FUETER: 3, S. 378, sowie die demnächst erscheinende Arbeit Com. Math. Helv. vol. 9, fasc. 4, 1937.

Die c werden durch die Integrale gegeben:

$$c_{n_1 n_2 n_3} = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(R)} f(\zeta)\, dZ\, n(\zeta)^{-1} \zeta^{-1} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta^{-1}), \qquad \text{IV.}$$

wo R eine geschlossene Hyperfläche ist, für deren Punkte ζ die Ungleichung gilt $|\zeta| \geqq r$.[1]

Solche regulären Punkte ∞ können nur für Funktionen vom Range 4 auftreten.[2] Entsprechend den Sätzen 6 und 7 wird man das Unendliche für Funktionen vom Range 3 als Kurve, für Funktionen vom Range 2 als (zweidimensionale) Flächen auffassen. Man kann allgemein sagen, daß *in der Theorie der regulären Funktionen das Unendliche eine (zweidimensionale) Fläche ist, die sich in einen Punkt oder eine Kurve zusammenziehen kann.* Auch im Falle der analytischen Funktionen zweier Komplexer Variablen ist die Frage übrigens noch keineswegs gelöst.

Meine Ausführungen bilden nur einen Anfang. Ich glaube aber, man darf ihn als vielversprechend bezeichnen. Gegenüber der Theorie der analytischen Funktionen zweier Variablen hat sie den Vorzug größerer Allgemeinheit. Manche Anomalien der letztern Theorie scheinen mir nur von der Spezialisierung herzurühren; sie verschwinden im allgemeinen Fall.

---

[1] Der Beweis gestaltet sich so: Ist K die Hyperkugel mit dem Radius $r = R^{-1}$, so ist $w' = f(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1}$ in und auf K rechtsregulär mit Ausnahme von $z = 0$, läßt sich also nach FUETER: 3. S. 378 in die Reihe II entwickeln. Wegen (9) ist:

$$\left| d_{n_1 n_2 n_3} \right| \leqq \frac{M}{8\pi^2} \int\limits_{(K)} \left| n(\zeta)^{-1} \zeta^{-1} p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) \right| dr$$

wo M nach b der Maximalwert von $|f(z^{-1})|$ auf K ist. Setzt man hier statt ζ die Größe $r\zeta$, so ist über die Einheitskugel K_1 zu integrieren. Anderseits ist $p_{n_1 n_2 n_3}$ eine Form vom Grade n, somit ist:

$$\left| d_{n_1 n_2 n_3} \right| \leqq \frac{M r^n}{8\pi^2} \int\limits_{(K_1)} \left| n(\zeta)^{-1} \zeta^{-1} p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) \right| dr.$$

Da man d mit r beliebig klein machen kann, falls $n > 0$ ist, so sind alle $d = 0$ mit Ausnahme von d_{000}. Daher ist:

$$f(z^{-1})\, n(z)^{-1} z^{-1} = d_{000}\, q_{000}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n = n_1 + n_2 + n_3)} c_{n_1 n_2 n_3}\, p_{n_1 n_2 n_3}(z)$$

woraus durch die Substitution von z durch z^{-1} die Reihe III. sofort hervorgeht, da $q_{000}(z) = -4\, n(z)^{-1} z^{-1}$.

[2] Denn w kann nicht überall rechtsregulär sein, somit wird es auch längs einer Kurve (Satz 6) oder Fläche (Satz 7) nicht regulär sein, die sich ins Unendliche erstrecken muß.

Siehe zum folgenden auch FUETER: 1, S. 320. Dort wurde das Unendliche als Punkt definiert.

Wenn ein Bild erlaubt ist, so verhalten sich die beiden Theorien wie die allgemeine Galois'sche Theorie der algebraischen Gleichungen zur Theorie der Abel'schen Gleichungen.[1]

Bemerkenswert ist in der Theorie der regulären Funktionen, daß all die schönen klassischen Eigenschaften der analytischen Funktionen für sie wieder gelten, trotzdem die regulären Funktionen weder einen Differentialquotienten noch eine inverse Funktion besitzen; trotzdem sie weder einen Körper noch eine Gruppe bilden. Man sieht daraus, daß diese Eigenschaften wohl eine bequeme, aber keine wesentliche Charakterisierung der analytischen Funktionen sind. Und da auch das kommutative Gesetzt nicht gilt, kann man von einer Besitznahme der Funktionentheorie durch die hyperkomplexen Systeme sprechen.

[1] Wie mir Herr Behnke brieflich mitteilt, hat Dr. Ulm (Münster) bewiesen, daß die analytischen Funktionen zweier Variablen eine Gruppe bilden, die innerhalb der rechtsregulären Funktionen maximal ist.

Literatur:

1. Rud. Fueter: Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen. Comm. Math. Helv. Vol. 7, S. 307.
2. Rud. Fueter: Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Monatshefte f. Math. & Phys., Bd. 43, S. 69.
3. Rud. Fueter: Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Comm. Math. Helv. Vol. 8, S. 371.

LE RÔLE DE LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE DANS L'ÉVOLUTION DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE

PAR ELIE CARTAN, Paris.

C'est un très grand honneur pour moi d'être appelé à prendre le premier la parole devant le buste du grand mathématicien norvégien SOPHUS LIE, dans cette Université où, déjà entouré d'une renommée universelle, il avait été appelé par ses concitoyens à enseigner la théorie des groupes. Avant d'aborder le sujet de ma conférence, je désirerais dire quelques mots au nom de l'École Normale Supérieure.

A la première page du troisième volume de sa «Theorie der Transformationsgruppen», paru en 1893, S. LIE avait réuni dans un triple hommage trois noms, celui d'un pays, d'un homme et d'une institution. Le pays était son pays natal, la Norvège, dont la libéralité lui avait permis de se consacrer tout entier, à l'abri de tout souci matériel, à la science dans le culte de laquelle, grâce au génie d'Abel, la Norvège s'était placée au premier rang. L'homme était son collègue, FRIEDRICH ENGEL, dont la collaboration infatigable lui avait permis la diffusion de ses théories, qui, on peut le dire maintenant, a consacré toute sa vie au culte de son maître et qui lui a élevé un monument digne de lui, l'édition de ses Œuvres complètes. L'institution, à qui il faisait l'honneur de dédier son œuvre, était l'École Normale Supérieure, «dont l'immortel élève, EVARISTE GALOIS, avait le premier reconnu l'importance de la notion de groupe discontinu, et dont les maîtres éminents Darboux, Picard, Tannery avaient envoyé leurs meilleurs élèves s'initier à Leipzig aux théories nouvelles». Deux ans plus tard, S. LIE avait tenu à assister aux fêtes du centenaire de l'École Normale et avait écrit pour son Livre d'or une notice pleine d'aperçus profonds sur l'œuvre de GALOIS. L'École Normale n'a pas oublié l'honneur qui lui a été fait par S. LIE et dont elle est restée fière; par ma voix elle adresse aujourd'hui son hommage à la mémoire du grand mathématicien norvégien.

Un des plus grands hommages qu'on puisse rendre à un savant dont le génie a ouvert des voies nouvelles est de montrer l'influence que ses travaux ont eue, soit par eux-mêmes, soit par leurs prolongements sur le développement de la Science. La théorie des groupes continus de S. Lie intéresse un si grand nombre de disciplines mathématiques qu'il me serait difficile de les aborder toutes; je me bornerai donc à vous parler, d'une manière du reste bien incomplète, du rôle joué par la théorie des groupes dans les développements récents de la Géométrie ou plutôt j'essaierai de montrer comment elle éclaire ces développements et en révèle sous des tendances parfois divergentes, l'unité profonde. Cependant il ne peut s'agir ici de *toute* la Géométrie, pour autant que ce mot puisse avoir un sens bien défini. La géométrie algébrique, par exemple, a un développement autonome, et bien qu'elle soit fondée sur un groupe, à savoir celui des transformations birationnelles, ce groupe ne rentre pas dans la classe générale des groupes de Lie. Nous laissons de même de côté la topologie et la théorie des espaces abstraits, dont les merveilleux développements, dans ces toutes dernières années, auront dans l'avenir des conséquences qu'il est encore très difficile de prévoir. Les seuls groupes dont nous aurons à parler sont ceux susceptibles d'être définis par un système d'équations aux dérivées partielles — que nous supposerons ne faire intervenir que des fonctions analytiques — dont la solution générale permet d'exprimer les variables transformées en fonction des variables primitives.

Une fois faites les réserves précédentes, nous pouvons envisager trois points de vue principaux qui ont dominé l'évolution de la Géométrie depuis le début de ce siècle; ces points de vue ne sont du reste pas complètement indépendants les uns des autres.

Le premier point de vue est celui qui est exposé dans le *Programme d'Erlangen* de Klein (1872). Ce Programme trouve son origine d'une part dans l'élaboration au cours du XIX^{e} siècle, comme disciplines autonomes, de la géométrie projective et des géométries non-euclidiennes, d'autre part dans la reconnaissance du rôle important joué dans chacune de ces géométries, par la notion de groupe. S. Lie est précisément l'un de ceux qui, par ses travaux sur le problème de Helmholtz et les fondements de la Géométrie, ont le mieux mis en évidence l'importance primordiale de cette notion. Pour Klein chaque groupe de transformations définit une géométrie dont l'objet est l'étude des propriétés des figures qui sont invariantes par les transformations du groupe. En gros le point de vue de Klein consiste à retenir de la Géométrie d'Euclide, comme notion fondamentale, la notion d'égalité des figures, avec les axiomes qui s'y rattachent et dont le plus important est celui d'après lequel deux figures égales à une troisième sont égales entre elles. Il semble merveilleux qu'on puisse tirer quelque chose d'une notion aussi générale que celle de figures égales; la portée immense de l'œuvre de Lie se montre ici dans la possibilité de déterminer et de classer toutes les géométries qu'on peut construire sur cette notion. Le Programme d'Erlangen a été pendant plusieurs années regardé comme constituant la synthèse définitive de toutes les théories géométriques. Les géomètres guidés par ce Programme ont abordé la géométrie affine, la géométrie conforme, la géométrie des sphères orientées due à Lie lui-même, la géométrie de Laguerre, les géométries hermitiennes de Fubini et de

Study, etc. Ils ont abordé aussi, mais avec un certain retard, les géométries différentielles correspondantes; contentons-nous de citer en géométrie projective Halphen qui a été l'initiateur de la théorie infinitésimale des courbes planes et M. Fubini qui a systématisé la théorie infinitésimale des surfaces. En principe les propriétés infinitésimales des variétés ont été étudiées par des méthodes propres à chaque géométrie. Signalons cependant un résultat général important qui constitue un des premiers théorèmes de la géométrie comparée, c'est l'existence, démontrée par M. Pick, pour une courbe quelconque, d'un *paramètre naturel* jouant dans la géométrie considérée le rôle de l'arc ordinaire en géométrie euclidienne (arc affine, arc projectif, arc conforme, etc.). Le principe créateur du Programme d'Erlangen est du reste loin d'être épuisé et bien des problèmes importants se posent. On sait par exemple que ce qu'il y a d'essentiel dans une géométrie de Klein, c'est la *structure* du groupe de base; en réalité à tout *groupe abstrait* de Lie est attachée une géométrie, qui peut être envisagée sous différents aspects suivant qu'on choisit tel ou tel *élément générateur* (en géométrie projective par exemple, le point, le plan, la droite, etc.), chaque choix faisant intervenir un certain sous-groupe du groupe de base; c'est ainsi que S. Lie, par sa merveilleuse découverte de la transformation de contact qui porte son nom, a montré l'identité, sous deux aspects différents, de la géométrie projective à trois dimensions et de la géométrie des sphères orientées. On peut se demander si parmi toutes ces réalisations concrètes de la géométrie du groupe abstrait donné, il y en a une qui joue un rôle privilégié. Il en est ainsi à certains égards, du choix comme éléments générateurs d'un corps de *repères* (trièdres trirectangles en géométrie euclidienne) correspondant à un sous-groupe formé de la seule opération identique; ce choix est à la base de la méthode du repère mobile, chaque repère concrétisant un élément du groupe abstrait de même que dans la théorie des fonctions fuchsiennes, chaque polygone fondamental concrétise un élément du groupe fuchsien. Les espaces symétriques dont j'ai parlé dans ma Conférence du Congrès de Zürich fournissent une autre réalisation remarquable des géométries dont le groupe de base est simple.

J'arrive maintenant aux deux autres points de vue qui ont dominé l'évolution récente de la Géométrie. Ils ont leur origine commune dans le mémoire célèbre de Riemann: *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie.* Historiquement ces deux points de vue sont enchevêtrés et ils n'ont commencé à prendre une véritable importance qu'après la découverte de la relativité générale d'Einstein. Jusqu'alors en effet les nombreux travaux effectués par Christoffel, Lipschitz et les géomètres italiens sur ce qu'on appelle maintenant la géométrie riemannienne étaient restés isolés dans l'ensemble des Mathématiques et on n'avait pas encore dégagé du court mémoire de Riemann tous les principes créateurs qu'il contenait en germe et que la théorie des groupes seule était capable de développer.

A prendre les choses en elles-mêmes, la géométrie riemannienne est une simple généralisation de la géométrie euclidienne, mais tandis que Klein retient surtout de celle-ci la notion d'égalité géométrique, Riemann en retient uniquement celle de distance. Les deux points de vue poussés à leurs dernières conséquences, sont radicalement divergents: la notion de distance disparaît dans les géométries de Klein les plus générales, et la notion de figures égales disparaît dans les géométries de Riemann les plus générales; la notion de groupe cesse d'être à la base des géométries riemanniennes. Cette notion peut cependant y être introduite, et de deux manières essentiellement différentes, correspondant aux deux points de vue dont il nous reste à parler.

Dans une première période qui s'étend jusqu'en 1917, date de la découverte à peu près simultanée, par MM. Levi-Civita et Schouten, de la notion de parallélisme, la géométrie riemannienne a été simplement regardée comme la théorie des invariants d'une forme différentielle quadratique $g_{ij}dx^i dx^j$ à n variables x^i par rapport au groupe infini des transformations analytiques effectuées sur ces variables; c'est encore de ce point de vue que Klein l'envisage dans la Conférence qu'il fit à Vienne en 1894 sur «Riemann et son influence sur les Mathématiques modernes». Par une transformation analytique faisant passer des variables x^i aux variables $\bar{x}^i$, la forme différentielle $g_{ij}dx^i dx^j$ se transforme dans une forme différentielle $\bar{g}_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j$, et les formules qui indiquent comment on passe des x^i et des g_{ij} aux $\bar{x}^i$ et aux $\bar{g}_{ij}$ définissent un groupe infini au sens de Lie, à $n+\frac{n(n+1)}{2}$ variables, et ce groupe est isomorphe au groupe infini général à n variables. Ce groupe infini définit une géométrie G au sens de Klein et l'étude d'une géométrie riemannienne donnée par l'expression des g_{ij} en fonction des x^i n'est autre que l'étude des propriétés d'une certaine variété V à n dimensions plongée dans l'espace à $\frac{n(n+3)}{2}$ dimensions de la géométrie G: c'est un problème analogue à l'étude des propriétés d'une surface plongée dans notre espace euclidien, avec la différence que le groupe des déplacements euclidiens est remplacé par le groupe infini dont il était question plus haut. En somme de ce point de vue la géométrie riemannienne est un chapitre particulier d'une géométrie de Klein à groupe infini.

Ce point de vue admet des généralisations immédiates en considérant tout autre groupe infini isomorphe au groupe général à n variables; c'est ainsi qu'on peut arriver à la notion *d'objet géométrique* introduite récemment par M. Veblen. Un objet géométrique, dans un espace à n dimensions rapporté à des coordonnées quelconques x^1, x^2, $\cdots$, x^n, est défini par un certain nombre de *composantes* A_1, A_2, $\cdots$, A_r qui se transforment suivant une certaine loi par tout changement de coordonnées; la cohérence de cette loi de transformation se traduit par l'existence d'un groupe à $n+r$ variables x^i, A_j, *prolongé* du groupe général de toutes les transformations (analytiques) portant sur les n variables x^i et isomorphe à ce groupe. On peut du reste substituer à ce dernier groupe tout autre groupe, infini ou fini, portant sur ces variables. On arrive ainsi au problème général suivant: Etant donné dans un espace E un groupe G, chercher les conditions d'égalité, au sens de la géométrie de Klein de groupe G, de deux variétés plongées dans l'espace E.

Il est clair que l'on englobe ainsi dans la Géométrie tous les problèmes d'équivalence par rapport à un groupe quelconque, fini ou infini. La question se pose de savoir jusqu'à quel point il est légitime d'attribuer un caractère géométrique à des problèmes si généraux et dont le plus souvent l'énoncé ressortit à l'Analyse pure. Il n'y a évidemment aucune réponse nécessaire à une pareille question. M. Veblen, il y a quelques années, déclarait géométrique tout ce que les gens compétents regardent comme tel: Je souscris volontiers à cette opinion, bien que les gens compétents ne soient pas toujours d'accord, même en Mathématiques. En fait la systématisation faite par Klein a été adoptée sans résistance comme une extension légitime du domaine de la Géométrie parce qu'elle fournissait un principe unificateur de plusieurs théories développées antérieurement et auxquelles personne ne refusait de reconnaître le caractère géométrique. Dans le cas qui nous occupe, en est-il de même? On serait tenté de répondre non, car le point de vue d'où nous venons d'envisager la géométrie riemannienne ne met justement pas en évidence, on peut même dire masque complètement, ce qu'il y a en elle de géométrique, au sens intuitif du mot. Mais on peut remarquer en revanche que dans le schéma général que nous avons considéré rentre toute une série de problèmes, de nature manifestement géométrique, je veux parler de la *Géométrie textile* de M. Blaschke et de l'École de Hambourg; le premier problème de cette Géométrie est l'étude des propriétés topologiques de la figure formée dans un plan par trois familles de courbes à un paramètre: c'est l'étude d'un *objet géométrique* au sens de M. Veblen, défini dans une variété à deux dimensions de coordonnées x, y, par trois *composantes* A, B, C, à savoir les seconds membres des équations différentielles $\frac{dy}{dx}=A$, $\frac{dy}{dx}=B$, $\frac{dy}{dx}=C$ qui définissent les trois familles de courbes.

En réalité nous avons englobé sous un principe général un **grand** nombre de théories dont la plupart n'ont qu'une existence virtuelle et dont quelques-unes sont nées et se sont développées d'une manière autonome, sans lien entre elles. Il est certain que la notion d'objet géométrique ne se serait pas présentée à M. Veblen à un moment où, en dehors des géométries de Klein, il n'eût existé que la géométrie riemannienne dans le premier stade de son développement, et la géométrie textile. Une généralisation parfaitement logique, qui n'est pas soutenue par des constructions antérieures auxquelles elle apporte un principe unificateur et créateur, n'a qu'une existence verbale: elle fournit un cadre qu'elle ne remplit pas.

Voyons maintenant ce que nous apporte le troisième point de vue qui a présidé au développement de la Géométrie contemporaine. Il trouve aussi son origine historique dans la géométrie riemannienne, prise au second stade de son développement, après la découverte de la notion de parallélisme. La notion de groupe intervient ici d'une manière beaucoup plus profonde que dans le point de vue précédent. Par son origine même la géométrie riemannienne comporte des notions de nature euclidienne, celles de distance, d'angle, d'aire, de volume, etc. Bien que la notion de groupe semble être absente de cette géométrie, elle est tout de même indirectement présente puisque toutes les notions géométriques dont je viens de parler trouvent leur origine dans le groupe des déplacements euclidiens. En fait la géométrie autour d'un point A d'un espace riemannien, en ce qui concerne les figures formées par les vecteurs d'origine A, est gouvernée par le groupe des rotations euclidiennes autour de A et les théorèmes relatifs à ces figures sont les mêmes qu'en géométrie euclidienne; autrement dit les rotations euclidiennes conservent un sens en géométrie riemannienne. La notion de parallélisme permet également de donner un sens aux translations infinitésimales, en tant qu'elles font passer d'un point A et de son voisinage à un point infiniment voisin A' et à son voisinage. Pendant quelques années on a vu simplement dans cette notion de parallélisme la possibilité de transport d'un vecteur d'un point à un autre et c'est de ce point de vue qu'ont été édifiées les géométries de Weyl et les géométries à connexion affine; mais ce point de vue était incomplet, car il ne permettait pas de généraliser la géométrie projective comme on avait généralisé la géométrie euclidienne et la géométrie affine. En réalité la notion de parallélisme permet en géométrie riemannienne d'intégrer de proche en proche dans un seul et même espace euclidien tout un arc de courbe et son voisinage, et par suite d'attribuer aux courbes de l'espace riemannien toutes les propriétés de courbure et de torsion des courbes plongées dans l'espace euclidien. Pour employer une manière de parler dont je me suis souvent servi, on peut imaginer en chaque point A d'un espace riemannien un espace euclidien tangent et il est possible de raccorder entre eux de proche en proche les espaces euclidiens tangents aux différents points d'un même arc de courbe. On conçoit que ce point de vue soit susceptible de généralisation en remplaçant les espaces euclidiens tangents par des espaces de Klein quelconques tangents; il suffit qu'on ait une loi pour raccorder entre eux de proche en proche ces espaces tangents, le raccord se faisant naturellement suivant les mêmes lois que dans la géométrie de Klein correspondante. Le principe de création de nouveaux espaces dont je viens d'esquisser très sommairement la genèse est désigné par certains auteurs sous le nom d'« Übertragungstheorie ».

Chacun des espaces généralisés au sens précédent, a pour base un groupe de Lie. Il ne sera pas mauvais de préciser le structure de ces espaces en les examinant en eux-mêmes, sans faire intervenir la notion d'espace de Klein tangent. Voyons d'abord de quelle manière on peut envisager la géométrie différentielle de l'espace euclidien ordinaire rapporté à un système de coordonnées curvilignes u^i de nature quelconque. La méthode du trièdre mobile nous permet de présenter les choses de la manière suivante. Imaginons attaché à chaque point $A(u^i)$ de l'espace un trièdre trirectangle T_A et supposons que nous connaissions, pour tout couple de points infiniment voisins $A(u^i)$ et $A'(u^i+du^i)$, les six composantes par rapport au trièdre T_A du déplacement infinitésimal $S_{AA'}$, qui amène T_A en coïncidence avec $T_{A'}$; ce sont six formes $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6$, linéaires par rapport aux du^i, à coefficients fonctions des u^i, dont les trois premières sont les composantes par rapport aux axes de T_A de la translation et les trois dernières les composantes par rapport aux mêmes axes de la rotation qui amènent T_A en $T_{A'}$. *La seule connaissance de ces six formes, dont les trois premières sont linéairement indépendantes, permet de reconstruire, à un déplacement près, l'espace euclidien, sans qu'on ait besoin de connaître la nature des coordonnées u^i.* On conçoit en effet qu'en se donnant la position d'un trièdre particulier T_O, on puisse de proche en proche, grâce à la connaissance des formes ω_i, déterminer la position de tout autre trièdre T_A. On voit ainsi que *l'espace euclidien est complètement défini comme un support de déplacements infinitésimaux $S_{AA'}$, attachés aux différents couples de points infiniment voisins.* On pourrait évidemment changer les trièdres attachés aux différents points de l'espace; on remplacerait ainsi le déplacement infinitésimal $S_{AA'}$, par $R_A^{-1} S_{AA'} R_{A'}$, en désignant par R_A et $R_{A'}$ les rotations, rapportées respectivement aux trièdres T_A et $T_{A'}$, qu'on a fait subir à ces trièdres. Cela ne changerait naturellement rien à l'organisation euclidienne de l'espace; les propriétés géométriques d'une courbe, d'une surface, définies par leurs équations, resteraient les mêmes. On pourrait même attacher à chaque point toute une famille de trièdres, la rotation R_A dépendant de paramètres variables; on pourrait ainsi avoir dans l'espace toute la gamme des trièdres trirectangles, les six formes ω_i devenant linéairement indépendantes. Nous avons utilisé des trièdres trirectangles, mais ils ne jouent au fond qu'un rôle accessoire et ils n'ont servi que d'échafaudage à notre construction, les éléments essentiels étant les formes ω_i, avec leur signification de paramètres de déplacements infinitésimaux.

Si nous passons de l'espace euclidien à un espace de Klein de groupe G, il est évident que nous pourrons aussi le regarder comme un support de transformations infinitésimales $S_{AA'}$ du groupe G attachées aux différents couples de points infiniment voisins de l'espace; ces transformations seront définis par un certain nombre de formes de Pfaff, et elles pourront être remplacées par les transformations $R_A^{-1} S_{AA'} R_{A'}$ où R_A désigne une transformation arbitraire d'un sous-groupe déterminé g de G; ce sous-groupe dépend de ***l'élement générateur*** de l'espace de Klein.

Les formes ω_i, dont la connaissance permet de résoudre les différents problèmes de géométrie différentielle qui peuvent se poser dans un espace de Klein, ne sont pas arbitraires. Elles satisfont à des conditions de compatibilité établies par Darboux dans le cas de l'espace euclidien; elles jouent, comme on sait, un rôle important dans la théorie des surfaces traitée par la méthode du trièdre mobile. Dans le cas d'un espace de Klein quelconque, ces équations ne sont autres que les équations données par Maurer en 1888 et auxquelles pendant longtemps on n'a pas prêté l'attention qu'elles méritent. ***Nous sommes en effet ici à la fois au cœur de la géometrie différentielle générale et au cœur de la théorie des groupes finis et continus***: les équations de Maurer définissent à la fois la structure du groupe G, c'est-à-dire ce qu'il y a d'essentiel dans ce groupe, et la structure de l'espace de Klein correspondant. Géométriquement ces équations expriment qu'étant donnée une suite linéaire continue fermée de repères, le produit des transformations infinitésimales qui font passer de chaque repère au repère infiniment voisin est égal à la transformation identique; en réalité les équations de Maurer expriment cette propriété pour un contour fermé infiniment petit.

C'est par un très long détour que les équations de Maurer, dont la signification initiale était purement abstraire, ont été intégrées dans la Géométrie différentielle. En effet la théorie de la structure des groupes finis, fondée par S. Lie sur la notion de transformation infinitésimale, ne s'étendait pas aux groupes infinis. C'est sur une base toute différente que j'ai pu, dans les dix premières années de ce siècle, édifier une théorie générale de la structure des groupes de Lie, infinis et finis. Tout groupe de Lie peut, prolongé au besoin par l'adjonction de nouvelles variables, être défini par l'ensemble des transformations qui laissent invariantes un certain nombre de formes de Pfaff; mais ces formes de Pfaff ne sont pas arbitraires: elles satisfont à certaines conditions qui constituent la structure du groupe. Dans le cas du groupe euclidien ces formes de Pfaff sont les six formes ω_i dont il a été si souvent question; si l'on effectue un même déplacement sur deux trièdres infiniment voisins T et T' de manière à les amener en T^* et T'^*, il est clair que les formes ω_i qui représentent le déplacement infinitésimal amenant T en T' sont égales aux formes ω_i^* qui représentent le déplacement analogue pour T^* et T'^*, et cela parce que T'^* est placé par rapport à T^* comme T' est placé par rapport à T. En ce sens les équations de Darboux définissent la structure du groupe des déplacements.

Revenons maintenant à un espace à trois dimensions rapporté à des coordonnées quelconques u^i et attachons à tout couple de points infiniment voisins A, A' un déplacement infinitésimal euclidien $S_{AA'}$, *et cela suivant une loi arbitraire.* Les formes ω_i qui représentent $S_{AA'}$ ne satisferont pas en général aux équations de Darboux et il ne sera pas possible par suite d'organiser l'espace euclidiennement. Mais comme les équations de Darboux n'interviennent que dans les familles de trièdres à *plusieurs* paramètres, rien n'empêchera de faire la théorie des courbes exactement comme dans l'espace euclidien; on pourra aussi faire une théorie infinitésimale des surfaces, en étudiant les propriétés des courbes tracées sur cette surface. D'une manière générale toute la géométrie différentielle pourra être édifiée sur les mêmes principes que la géométrie différentielle euclidienne, par exemple par application de la méthode du trièdre mobile. La substitution au déplacement $S_{AA'}$ du déplacement $R_A^{-1} S_{AA'} R_{A'}$ ne changera absolument rien aux propriétés géométriques *de nature euclidienne* qu'on aura été conduit à attribuer à telle courbe, à telle surface, etc. Le fait que l'espace n'est pas euclidien se traduira de la manière suivante: étant donné un contour fermé d'origine O, le produit des déplacements infinitésimaux associés aux différents couples de points infiniment voisins du contour, en commençant par le point O, ne sera plus le déplacement identique; il y aura ainsi un déplacement euclidien associé à chaque contour fermé d'origine O; tous ces déplacements forment un groupe, le *groupe d'holonomie* de l'espace; il est essentiellement le même en tous les points de l'espace.

Tout ce qui précède peut se répéter pour n'importe quelle géométrie de Klein, et je n'insiste pas davantage. Vous concevrez qu'il existe, fondée sur la théorie des groupes, une géométrie différentielle générale dont les méthodes s'appliquent à la fois aux espaces de Klein et aux espaces généralisés correspondants. En ce qui concerne la géométrie différentielle, *la théorie des groupes, conçue du point de vue exposé plus haut, introduit donc un principe d'unité dépassant de beaucorp le cadre des géométries de Klein.*

Je dois ajouter que beaucoup de géomètres ont cherché à conserver, spécialement en ce qui concerne les géométries à connexion projective et conforme, envisagées soit du point de vue précédent, soit d'un point de vue encore plus général, le caractère formel des géométries à connexion affine, avec l'élégance que leur confèrent les méthodes du calcul différentiel absolu; on peut du reste se demander si cette recherche ne va pas contre la nature des choses. C'est aussi dans un but de plus grande généralisation que M. Veblen a introduit sa notion d'objet géométrique. Je signalerai seulement les importantes recherches de MM. van Dantzig et Schouten qui ont édifié sur des principes nouveaux, au moins en apparence, une géométrie projective généralisée; dans un espace à $n+1$ dimensions, rapporté à des coordonnées x^i, ils imaginent une connexion affine envisagée non pas par rapport au groupe infini de toutes les transformations, mais par rapport au groupe infini des transformations homogènes et de degré 1, qui est encore un groupe de Lie, les coefficients Γ^k_{ij} de cette connexion affine étant homogènes et de degré -1 par rapport aux coordonnées x^i. En fait cette construction peut être interprétée par rapport au groupe infini de toutes les transformations; elle fournit alors un espace à connexion affine à $n+1$ dimensions dans lequel on s'est donné un champ de vecteurs contrevariants l^i assujetti à une certaine condition qui s'exprime par l'annulation d'un certain tenseur construit avec le vecteur l^i dérivé deux fois, le tenseur de torsion dérivé une fois et le tenseur de courbure. Le caractère projectif de cette géométrie apparaît si l'on assimile les trajectoires du champ de vecteurs à des points d'un espace projectif à n dimensions.

Revenons maintenant à notre second point de vue, celui auquel nous avons rattaché la notion d'objet géométrique. Il fournissait un cadre qu'aucun principe unificateur ne semblait susceptible de remplir. Le schéma des géométries de Klein généralisées au sens indiqué plus haut, fournit un tel principe, je ne dis pas dans tous les cas, mais du moins dans des cas nombreux. La théorie des groupes, telle que je l'ai conçue, fournit une méthode générale pour étudier et discuter l'équivalence de deux objets géométriques de nature donnée par rapport à un groupe de Lie, fini ou infini, donné. Un tel objet géométrique, envisagé par rapport à un groupe donné, peut être complètement caractérisé par un ensemble de formes de Pfaff où interviennent en général paramétriquement des variables auxiliaires nouvelles. Par une suite de particularisations, qui sont de même nature que celles qui constituent la méthode du repère mobile et dans le détail desquelles il m'est impossible d'entrer, on est conduit à de nouvelles formes de Pfaff avec un moins grand nombre de variables auxiliaires. *Il peut arriver, et il arrive effectivement, qu'à un certain moment ces nouvelles formes sont susceptibles de définir un espace de Klein généralisé.* En fait dans des cas très fréquents la méthode conduit à une classification des objet géométriques de la nature donnée en un nombre fini de classes, à chacune desquelles on peut associer d'une manière intrinsèque une géométrie de Klein généralisée, le groupe de base de cette géométrie pouvant varier d'une classe à l'autre; c'est de la même manière que la méthode du repère mobile, appliquée par exemple à l'étude infinitésimale projective des courbes, conduit à les partager en six classes distinctes, celle des droites, celle des coniques, celle des courbes planes générales, celle des cubiques gauches, celle des courbes gauches dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire et celle des courbes gauches les plus générales; chaque classe comporte une théorie particulière de la courbure, ou plutôt des courbures projectives. Si nous revenons aux objets géométriques, il peut arriver que la classification en un nombre fini de classes soit impossible, et aussi que la classification puisse se faire de plusieurs manières et qu'il y ait un certain arbitraire dans le choix du groupe de base de chaque classe. Mais le fait essentiel est que *très souvent les propriétés d'un objet géométrique envisagé par rapport à un groupe infini, peuvent s'exprimer au moyen des notions d'une certaine géométrie de Klein de groupe fini.* Il est indispensable naturellement que le groupe infini soit un groupe de Lie.

Quelques exemples illustreront ce qui précède. La « Geometry of Paths » de l'École américaine de Princeton avait pour objet l'étude de celles des propriétés des géodésiques d'un espace à connexion affine qui ne dépendent pas de la connexion affine particulière qui peut les fournir; cette étude a conduit à une notion d'espace à connexion projective qui, à la forme de présentation près, rentre dans le schéma général exposé plus haut des géométries généralisées, le groupe de base étant le groupe projectif avec le point comme élément générateur. Dans le cas de deux dimensions, l'équation différentielle générale du second ordre $y'' = F(x, y, y')$, plus générale que celle qui donne une naissance à une « Geometry of paths », peut, comme je l'ai montré, être associée d'une manière intrinsèque à une géométrice projective, mais dont l'élément générateur est l'élément linéaire (x, y, y'). A une intégrale $\int F(x^1, \cdots, x^n; dx^1, \cdots, dx^n)$ donnant naissance à un problème régulier du calcul des variations peut être associée d'une manière intrinsèque une géométrie généralisée (géométrie finslérienne) dont le groupe de base est le groupe euclidien et l'élément générateur l'élément linéaire (x, dx); cet exemple est intéressant parce que les premiers travaux, nombreux et importants, faits sur cette question s'étaient attachés à conserver certains caractères formels de géométries antérieures, ce qui faisait perdre en partie à la géométrie en question son caractère nettement euclidien. Plus intéressant encore est l'exemple fourni par l'intégrale de surface $\iint F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$, que l'on suppose donner naissance à un problème régulier du Calcul des variations; il existe ici une classe générale à laquelle on peut associer une géométrie généralisée dont le groupe de base est le groupe euclidien, l'élément générateur étant l'élément de contact de Lie (x, y, z, p, q); si l'on n'est par dans la classe générale, l'association à l'intégrale d'une géométrie de Klein généralisée est plus compliquée et peut même devenir impossible, aux moins si l'on veut que cette géométrie soit à groupe fini, lorsque l'intégrale est invariante par un groupe infini, comme dans le cas $F=p^2+q^2$. Citons encore l'exemple d'une équation différentielle du troisième ordre $y''' = F(x, y, y', y'')$, envisagée cette fois par rapport au groupe infini des transformations de contact du plan; on peut dans certains cas lui associer d'une manière intrinsèque une géométrie généralisant la géométrie des cycles de Lie. Je citerai enfin l'étude des propriétés d'une hypersurface réelle dans l'espace de deux variables complexes par rapport au groupe infini des transformations analytiques de ces deux variables; elle conduit à regarder l'hypersurface comme un espace de Klein généralisé dont le groupe est isomorphe au groupe projectif d'une hyperquadrique. On pourrait varier beaucoup ces exemples. La Géométrie textile elle-même pourrait être envisagée du point due vue précédent, par association à chacun des problèmes qu'elle traite d'un espace de Klein généralisé; elle ne s'est pas développée dans cette direction; néanmoins c'est par la méthode générale dont j'ai parlé plus haut relative aux problèmes d'équivalence qu'elle est maintenant étudiée. Rien ne montre mieux que ces rapprochements entre tant de théories en apparence si diverses la puissance d'unification et de création qu'apporte la théorie des groupes, due au génie du grand géomètre norvégien S. Lie.

ANALYTISCHE THEORIE DER QUADRATISCHEN FORMEN

Von Carl Ludwig Siegel, Frankfurt a. M.

Es ist bekannt, daß zwischen der Arithmetik und der Theorie der analytischen Funktionen gewisse Analogien bestehen; insbesondere spiegeln sich manche Eigenschaften algebraischer Zahlkörper wider in ähnlichen Aussagen über algebraische Funktionen. Die funktionentheoretischen Sätze liefern einen Zusammenhang zwischen den lokalen und den integralen Eigenschaften der analytischen Funktionen. Die Entwickelbarkeit in eine Reihe nach Potenzen der Ortsuniformisierenden auf der Riemannschen Fläche ist eine lokale Eigenschaft der analytischen Funktion. Ihr entspricht in der Arithmetik der rationalen Zahlen die Entwicklung in eine p-adische Potenzreihe. Will man also in der Zahlentheorie Analogien finden zu den Integralsätzen der Analysis, so wird man danach fragen, inwieweit arithmetische Funktionen im Großen, also im Körper der rationalen Zahlen, bestimmt sind durch die entsprechenden arithmetischen Funktionen im Kleinen, also in den p-adischen Körpern, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch das entsprechende arithmetische Problem modulo q, wobei q eine beliebige natürliche Zahl bedeutet.

Einen Satz dieser Art verdankt man Legendre. Es seien a, b, c, d ganze Zahlen. Der Satz von Legendre besagt, daß die diophantische Gleichung

$$ax^2+bxy+cy^2=d$$

dann und nur dann in rationalen Zahlen x, y lösbar ist, wenn die diophantische Kongruenz

$$ax^2+bxy+cy^2\equiv d \pmod q$$

für jeden natürlichen Modul q eine rationale Lösung besitzt. Es ist trivial, daß diese Bedingung notwendig ist; die Bedeutung des Satzes liegt darin, daß die Bedingung zugleich auch hinreichend ist, daß also aus der lokalen Lösbarkeit die Lösbarkeit im Großen folgt. Eine schöne Verallgemeinerung des Satzes von Legendre hat Hasse gegeben. Sie bezieht sich auf die rationale Darstellbarkeit einer quadratischen Form R von n Variablen durch eine quadratische Form Q von m Variablen, also auf das Problem, Q in R durch eine homogene lineare Substitution mit rationalen Koeffizienten zu transformieren. Wir wollen der Einfachheit halber in diesem Vortrage nur den Fall behandeln, daß die quadratischen Formen Q und R positiv-definit sind. Bedeutet S die Matrix der quadratischen Form Q von m Variabeln, T die Matrix der quadratischen Form R von n Variabeln und X die

Matrix der linearen Transformation, welche Q in R überführt, so besteht die Matrizengleichung

$$X'SX = T. \tag{1}$$

Hierin sind S und T gegeben, während eine Matrix X mit m Zeilen und n Spalten von rationalen Elementen gesucht wird und X' die Transponierte zu X bedeutet. Es ist wieder trivial, daß aus der rationalen Lösbarkeit von (1) die rationale Lösbarkeit der Kongruenz

$$X'SX \equiv T \pmod{q} \tag{2}$$

für jeden Modul q folgt; dabei soll eine solche Matrizenkongruenz bedeuten, daß entsprechende Elemente rechts und links miteinander kongruent sind. Der wichtige Satz von Hasse lautet nun, daß umgekehrt aus der rationalen Lösbarkeit von (2) für jedes q auch wieder die rationale Lösbarkeit von (1) folgt. Der Spezialfall $m=2$, $n=1$ ergibt insbesondere den Satz von Legendre, und andere Spezialfälle sind bereits von Smith und Minkowski behandelt worden.

Es liegt jetzt nahe, folgende Frage zu stellen: Läßt sich die qualitative Aussage des Hasseschen Satzes zu einer quantitativen verschärfen, also zu einer Aussage über Lösungsanzahl statt Lösungsexistenz. Diese Fragestellung muß aber noch modifiziert werden, damit sie zu einer befriedigenden Lösung führen kann. Zunächst ist nämlich leicht ersichtlich, daß aus der Existenz einer einzigen rationalen Lösung von (1) zugleich unendlich viele solche Lösungen folgen. Um unter diesen eine endliche Anzahl auszuscheiden, wird man nur ganzzahlige Lösungen in Betracht ziehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann noch vorausgesetzt werden, daß auch die Elemente von S und T ganz sind. Es sei nun $A(S,T)$ die Anzahl der Lösungen von (1) in ganzen Matrizen X, d. h. Matrizen mit ganzzahligen Elementen, und $A_q(S,T)$ die Anzahl der modulo q inkongruenten ganzen Lösungen von (2). Das Problem lautet jetzt: Welcher Zusammenhang besteht zwischen $A(S,T)$ und den $A_q(S,T)$?

Um zu erkennen, ob dieses Problem lösbar ist, stellen wir folgende Betrachtung an. Man nennt zwei quadratische Formen Q und Q_1 mit den Matrizen S und S_1 äquivalent oder zur gleichen Klasse gehörig, wenn sowohl Q in Q_1 als auch Q_1 in Q durch eine lineare Substitution mit ganzen Koeffizienten transformiert werden kann, wenn also die Matrizengleichungen

$$X'SX = S_1, \quad X_1'S_1X_1 = S \tag{3}$$

beide ganze Lösungen haben. Es ist klar, daß sich die Anzahl $A(S,T)$ nicht ändert, wenn die quadratische Form mit der Matrix S durch eine äquivalente ersetzt wird. Daher ist $A(S,T)$ eine Klasseninvariante. Nennt man ferner Q und Q_1 zum gleichen Geschlecht gehörig, wenn anstelle der Gleichungen (3) die entsprechenden Kongruenzen

$$X'SX \equiv S_1 \pmod{q}, \quad X_1'S_1X_1 \equiv S \pmod{q}$$

für jedes q ganzzahlig lösbar sind, so sind die Zahlen $A_q(S, T)$ offenbar Geschlechtsinvarianten. Ließe sich nun $A(S, T)$ aus den $A_q(S, T)$ eindeutig berechnen, so wäre diese Zahl ebenfalls eine Geschlechtsinvariante. Dies läßt sich nun aber durch ein Beispiel widerlegen. Wie man leicht einsehen kann, gehören $Q = x^2 + 55y^2$ und $Q_1 = 5x^2 + 11y^2$ zum gleichen Geschlecht. Folglich haben bei beliebigem q die Kongruenzen $Q \equiv 1 \pmod{q}$ und $Q_1 \equiv 1 \pmod{q}$ die gleiche Lösungsanzahl. Andererseits ist aber $Q = 1$ ganzzahlig lösbar und $Q_1 = 1$ unlösbar. Dieses Beispiel zeigt zugleich, daß Q und Q_1 nicht äquivalent sind, daß also die Klasseneinteilung schärfer ist als die Geschlechtseinteilung. Aus einem Satze von Hermite ergibt sich, daß jedes Geschlecht aus nur endlich vielen Klassen besteht. Liegen nun im Geschlechte von Q genau h Klassen, so wähle man aus jeder einen Repräsentanten und bilde mit den zugehörigen Matrizen $S_1, \cdots, S_h$ die Anzahlen $A(S_1, T), \cdots, A(S_h, T)$. Die h analogen Zahlen $A_q(S_1, T), \cdots, A_q(S_h, T)$ haben alle denselben Wert $A_q(S, T)$. Die ursprüngliche Frage nach dem Zusammenhang zwischen $A(S, T)$ und $A_q(S, T)$ kann jetzt vernünftiger folgendermaßen gestellt werden: Besteht ein Zusammenhang zwischen den $A_q(S, T)$ und den Zahlen $A(S_1, T), \cdots, A(S_h, T)$? Der Hauptsatz der Theorie besagt nun, daß in der Tat diese Größen durch eine sehr einfache Beziehung miteinander verknüpft sind.

Ehe wir zur Formulierung dieses Hauptsatzes übergehen, wollen wir noch die mittleren Werte von $A_q(S, T)$ und $A(S, T)$ definieren. In der Kongruenz (2) ist X eine ganzzahlige Matrix mit m Zeilen und n Spalten, also mit mn Elementen. Läßt man nun X sämtliche modulo q inkongruenten Matrizen durchlaufen und nicht nur die Lösungen jener Kongruenz, so erhält man insgesamt q^{mn} Matrizen X, da für jedes Element von X genau q Möglichkeiten bestehen. Jedesmal ist dann $X'SX = Y$ eine ganzzahlige symmetrische Matrix mit n Reihen. Da eine n-reihige symmetrische Matrix nur $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängige Elemente besitzt, so hat man $q^{\frac{n(n+1)}{2}}$ Möglichkeiten für Y. Daher ist

$$\sum_{Y \pmod{q}} A_q(S, Y) = q^{mn}, \quad \sum_{Y \pmod{q}} 1 = q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

und folglich kann man die Zahl $q^{mn - \frac{n(n+1)}{2}}$ als den mittleren Wert von $A_q(S, T)$ bezeichnen.

Ganz entsprechend wird der mittlere Wert von $A(S, T)$ erklärt. Man deute die $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen Elemente von Y als rechtwinklige cartesische Koordinaten eines Punktes im Raume von $\frac{n(n+1)}{2}$ Dimensionen. Vermöge der Gleichung $X'SX = Y$ wird dann ein beliebiges Gebiet y dieses Raumes abgebildet auf ein Gebiet x im X-Raume, dessen Koordinaten die mn Elemente von X sind. Man lasse nun y auf den Punkt T zusammenschrumpfen und bezeichne den Grenzwert des Volumenquotienten

$$\lim_{y \to T} \frac{\int_x dX}{\int_y dY} = A_\infty(S, T)$$

als den mittleren Wert von $A(S, T)$. In der Tat gelten für ein beliebiges Gebiet y die Gleichungen

$$\int_y A_\infty(S, Y)\, dY = \int_x dX$$

$$\sum_{Y \text{ in } y} A(S, Y) = \sum_{X \text{ in } x} 1 .$$

Man setze noch $A(S, S) = E(S)$; dies ist also die Anzahl der ganzzahligen Transformationen der quadratischen Form mit der Matrix S in sich selbst. Der Hauptsatz besagt dann: Es ist

$$\frac{\dfrac{A(S_1, T)}{E(S_1)} + \cdots + \dfrac{A(S_h, T)}{E(S_h)}}{\dfrac{A_\infty(S_1, T)}{E(S_1)} + \cdots + \dfrac{A_\infty(S_h, T)}{E(S_h)}} = \lim_{q \to \infty} \frac{A_q(S, T)}{q^{mn - \frac{n(n+1)}{2}}}, \tag{4}$$

wenn q eine geeignete Folge natürlicher Zahlen durchläuft, z. B. die Folge $1!, 2!, 3!, \cdots$. Im Falle $m \leqq n+1$ ist auf der rechten Seite noch der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzuzufügen, im Falle $m = n$ außerdem noch im Nenner rechts der Faktor $2^{\omega(q)}$, wo $\omega(q)$ die Anzahl der Primteiler von q bedeutet. Es sei noch bemerkt, daß dieser Satz sich sinngemäß auf indefinite quadratische Formen und auf quadratische Formen in beliebigen algebraischen Zahlkörpern übertragen läßt.

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (4) kann als arithmetischer Ersatz für die Integralbildungen der Funktionentheorie angesehen werden. Dies wird deutlicher, wenn man die rechte Seite von (4) als unendliches Produkt schreibt. Für teilerfremde q, r ist nämlich $A_{qr}(S, T) = A_q(S, T) A_r(S, T)$; ferner ist für die Potenzen $q = p^a$ jeder festen Primzahl p der Quotient

$A_q(S,T) : q^{mn-\frac{n(n+1)}{2}}$ bei hinreichend großem a konstant, kann also gleich $\alpha_p(S,T)$ gesetzt werden. Da auch die Zahlen $A_\infty(S_1,T), \cdots, A_\infty(S_h,T)$ alle den Wert $A_\infty(S,T)$ besitzen, so läßt sich die Formel des Hauptsatzes in der Gestalt

$$\frac{\frac{A(S_1,T)}{E(S_1)}+\cdots+\frac{A(S_h,T)}{E(S_h)}}{\frac{1}{E(S_1)}+\cdots+\frac{1}{E(S_h)}} = A_\infty(S,T)\prod_p \alpha_p(S,T) \tag{5}$$

schreiben, wo p alle Primzahlen wachsend durchläuft. Die Faktoren auf der rechten Seite sind erklärt durch die Arithmetik im Kleinen, nämlich an den einzelnen Primstellen, während sich der Ausdruck auf der linken Seite auf die Arithmetik im Großen bezieht.

Der Hauptsatz ist seinem Wesen nach transcendenter Natur. Dementsprechend enthält sein Beweis auch einen transcendenten Teil, nämlich die Dirichletsche Methode der Mittelwertbildung. Außerdem sind eingehende arithmetische Überlegungen nötig. Da es nicht möglich ist, den Beweis in der noch zur Verfügung stehenden Zeit zu skizzieren, so ziehe ich es vor, nur noch einiges über die Bedeutung des Satzes zu sagen.

Ein Spezialfall der Formel (5), nämlich $S = T$, ist bereits durch Minkowski entdeckt worden. Für diesen Fall hat nämlich der Zähler auf der linken Seite von (5) den Wert 1, und man erhält einen Ausdruck für die Größe $\frac{1}{E(S_1)}+\cdots+\frac{1}{E(S_h)}$, die man seit Eisenstein als Geschlechtsmaß bezeichnet. Die so entstehende Minkowskische Formel ist eine Verallgemeinerung der Eisensteinschen Formel für das Geschlechtsmaß bei definiten ternären quadratischen Formen und der Dirichletschen Klassenzahlformel bei binären quadratischen Formen.

Ein anderer Spezialfall entsteht, wenn man voraussetzt, daß die Klassenzahl h des Geschlechtes von S den Wert 1 hat. Dann liefert nämlich der Hauptsatz offenbar eine Aussage über $A(S,T)$ selbst. Dieser Fall liegt z. B. dann vor, wenn S die Einheitsmatrix und $m \leqq 8$ ist, also Q eine Summe von höchstens 8 Quadraten bedeutet. Nimmt man noch $n = 1$, also für die Matrix T eine Zahl, so erhält man aus (5) die Sätze von Lagrange, Gauss, Jacobi, Eisenstein und Liouville über die Zerlegungen natürlicher Zahlen in Quadrate.

Es ist bekannt, daß Jacobi seinen Satz über die Anzahl der Zerlegungen von natürlichen Zahlen in 4 Quadrate aus der Theorie der elliptischen Funktionen entnahm; genauer gesagt, entsteht dieser Satz durch Koeffizientenvergleich aus einer gewissen Identität zwischen Modulfunktionen.

Es ist nun bemerkenswert, daß auch für den Fall eines beliebigen S und $n=1$ der Hauptsatz in eine Beziehung zwischen elliptischen Modulfunktionen übertragen werden kann. Hat man die dazu nötigen Umformungen durchgeführt, so erhält man zugleich einen Ansatz für eine funktionentheoretische Formulierung des Hauptsatzes im allgemeinen Fall, nämlich für beliebiges n. Auf diesem Wege gewinnt man dann ein überraschendes Ergebnis: Der Hauptsatz geht über in eine sehr einfache Relation zwischen denjenigen analytischen Funktionen von $\frac{n(n+1)}{2}$ Veränderlichen, die zu den $2n$-fach periodischen meromorphen Funktionen von n Variablen in derselben Beziehung stehen wie die Modulfunktionen zu den elliptischen Funktionen. Es soll nun zum Schluß noch diese Relation angegeben werden.

Es sei Z eine n-reihige symmetrische Matrix mit komplexen Elementen, und zwar sei der Imaginärteil von Z die Matrix einer positiv-definiten quadratischen Form. Man lasse C alle ganzen Matrizen mit m Zeilen und n Spalten durchlaufen und bilde die unendliche Reihe

$$\sum_C e^{\pi i \sigma (C' S C Z)} = f(S, Z),$$

wobei das Zeichen σ die Spur der dahinterstehenden Matrix bedeutet, also die Summe der Diagonalelemente. Ferner setze man noch

$$\frac{f(S_1, Z)}{E(S_1)} + \cdots + \frac{f(S_h, Z)}{E(S_h)} : \frac{1}{E(S_1)} + \cdots + \frac{1}{E(S_h)} = F(S, Z).$$

Faßt man nun in $f(S, Z)$ alle Summanden zusammen, für welche $C'SC$ denselben Wert T hat, so wird in $F(S, Z)$ der Koeffizient von $e^{\pi i \sigma (TZ)}$ genau die linke Seite von (5). Der Hauptsatz ergibt dann nach einer längeren Umformung schließlich eine Entwicklung der Gestalt

$$F(S, Z) = \sum_{K, L} \gamma_{K, L} |KZ + L|^{-\frac{m}{2}}. \tag{6}$$

Dabei ist der Koeffizient $\gamma_{K, L}$ von Z unabhängig und K, L durchlaufen ein volles System von Paaren ganzzahliger n-reihiger Matrizen mit folgenden 3 Eigenschaften: 1) das Paar ist symmetrisch, d. h. es ist $KL' = LK'$, 2) das Paar ist primitiv, d. h. es gibt keine gebrochene Matrix M, so daß MK und ML beide ganz sind, 3) zwei verschiedene Paare K_1, L_1 und K_2, L_2 sind stets nicht-assoziiert, d. h. es gibt keine Matrix M, so daß $MK_1 = K_2$ und $ML_1 = L_2$ ist.

Nun läßt sich beweisen, daß eine Partialbruchzerlegung der Form (6) für eine feste Funktion höchstens auf eine Art möglich ist; die Koeffizienten $\gamma_{K, L}$ gewinnt man nämlich eindeutig aus dem Verhalten der Funktion an ihren singulären Stellen. Auf diese Weise geht der Hauptsatz über in die einfache Aussage, daß die Funktion $F(S, Z)$ überhaupt in eine Partialbruchreihe der Form (6) entwickelbar ist. Um die funktionentheoretische Bedeutung von (6) zu verstehen, muß man sich über die analytische Natur solcher Partialbruchreihen klar werden. Diese sind aber nun nichts anderes als Verallgemeinerungen der Eisensteinschen Reihen, welche explizite Ausdrücke für die elliptischen Modulfunktionen liefern. Die einfachsten unter diesen Reihen, nämlich $\sum_{K, L} |KZ+L|^{-\varrho}$, sind bis auf einen trivialen Faktor invariant bei den Substitutionen $Z=(AZ_1+B)(CZ_1+D)^{-1}$, welche entstehen, wenn für $\begin{pmatrix} A B \\ C D \end{pmatrix}$ eine beliebige $2n$-reihige Matrix gesetzt wird, die dem Übergang von einer kanonischen Zerschneidung einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht n zu einer andern zugeordnet ist. Man kann beweisen, daß sich aus diesen Reihen rational alle meromorphen Funktionen $\varphi(Z)$ zusammensetzen lassen, die bei der Gruppe jener Substitutionen absolut invariant sind. Diese Funktionen von $\frac{n(n+1)}{2}$ Variabeln können mit Recht ebenfalls Modulfunktionen genannt werden, weil sie genau die Gesamtheit der rationalen Moduln einer algebraischen Kurve vom Geschlecht n liefern, wenn für Z die Periodenmatrix der zur Kurve gehörigen Abelschen Normalintegrale erster Gattung gesetzt wird. Für beliebiges Z stehen sie zu den $2n$-fach periodischen Funktionen von n Variabeln in analoger Beziehung wie die elliptischen Modulfunktionen zu den doppelt-periodischen Funktionen einer Variablen. Die Bedeutung des Hauptsatzes für die Analysis ist nun darin zu sehen, daß durch ihn eine Verbindung hergestellt wird zwischen den aus Thetareihen gebildeten Funktionen $F(S, Z)$ und den einfachsten Bausteinen der allgemeinen Modulfunktionen, nämlich den Eisensteinschen Reihen.

SPINORS AND PROJECTIVE GEOMETRY

By Oswald Veblen, Princeton, N. J.

The theory of spinors like so many other branches of mathematics received its first impulse from theoretical physics. Unlike some other branches it has not required the discovery of anything very fundamentally new on the mathematical side, but rather has called for a regrouping and restudy of known ideas. Most of these ideas can advantageously be clothed in the dress of projective geometry, and some of them suggest the use of devices which have not yet been exploited as much as they should be in projective geometry itself.

I do not propose to go into the question whether the geometric formulation should be used by physicists. Most of the theorems which they want can be formulated in terms of matrices and I do not know whether the additional burden of understanding the geometry is worth the additional insight which it brings. I am therefore speaking simply as one who is interested in projective geometry for its own sake.

Let me begin by reminding you that the quantum theory is itself the theory of a complex projective space, P_∞, of infinitely many dimensions, equipped with a Hermitian metric. In the usual formulation the totality of pure physical states is represented by the points, exclusive of the origin, of a Hilbert space. The latter is a vector space consisting of all points

$$(x^1,\ x^2,\ x^3,\ \cdots)$$

for which the infinite series

$$\bar{x}^1 x^1 + \bar{x}^2 x^2 + \bar{x}^3 x^3 + \cdots$$

converges. (The bar indicates the complex conjugate of the complex number x^i). But two points of the Hilbert space represent the same state if their coordinates are proportional, i. e., if and only if their coordinates are given by

$$(\varrho x^1,\ \varrho x^2,\ \varrho x^3,\ \cdots)$$

for different non-vanishing values of ϱ. In other words, all points on the same straight line through the origin of the Hilbert space represent the same state. For some purposes the coordinates of the pure states are normalized so that

$$\bar{x}^1 x^1 + \bar{x}^2 x^2 + \bar{x}^3 x^3 + \cdots = 1$$

but this does not limit the class of pure states in any way or modify the statement that the states are in a one-to-one correspondance with the lines through the origin of the Hilbert space.

This correspondence between pure states and the straight lines through the origin of a Hilbert space is analogous to the correspondence between the points

$$(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^k)$$

of a projective space of $(k-1)$ dimensions and the straight lines through the origin of an affine space of k dimensions. The latter correspondence is the basis for the use of homogeneous coordinates in projective geometry.

The $(k-1)$-dimensional geometry analogous to the quantum theory is not, however, the projective geometry. It is rather the geometry corresponding to the projective group of the Hermitian form,

$$\bar{x}^1 x^1 + \bar{x}^2 x^2 + \cdots + \bar{x}^k x^k \tag{1}$$

that is, *projective unitary geometry*. On changing to arbitrary projective coordinates, the Hermitian form (1) becomes

$$\gamma_{\dot{A}B}\, \bar{X}^A X^B$$

Here we are using the summation convention of tensor analysis, the capital latin letters A, B, C, etc., taking all values on the range $1, 2, \cdots, k$.

If we make an arbitrary transformation of projective coordinates $X \rightarrow X^*$ where

$$X^{A*} = T^A_B X^B \quad \text{and} \quad X^A = t^A_B X^{B*} \tag{2}$$

the Hermitian form becomes

$$\gamma^*_{\dot{A}B}\, \bar{X}^{A*} X^{B*}$$

where

$$\gamma^*_{\dot{A}B} = \gamma_{\dot{C}D}\, \bar{t}^C_A\, t^D_B. \tag{3}$$

You see that the law of transformation of the coefficients of the Hermitian form is like that of the components of a covariant tensor of the second order except that the right-hand member is bilinear in t^A_B and $\bar{t}^A_B$ instead of being quadratic in t^A_B.

The geometric being with components in any projective coordinate system and the law of transformation (3) is an instance of a spinor, and illustrates sufficiently for our present purpose the nature of the generalization by which one passes from tensors to spinors.

The quantities which appear in the theory of tensors are all real. In the theory of spinors they are complex and the law of transformation may involve the complex conjugates of the coefficients of (2). To deal with this additional element of complication we need the formal device (due to van der Waerden) of placing a dot over each spin index which corresponds in the law of transformation to $\bar{T}^A_B$ or $\bar{t}^A_B$ instead of T^A_B or t^A_B.

Instead of two simple tensors X^i and X_i we have four simple spinors X^A, $X^{\dot{A}}$, X_A and $X_{\dot{A}}$. In addition to weights of relative spinors, i. e., powers of the determinant $t = \left| t^A_B \right|$ which appears in the law of transformation, there are also *antiweights*, i. e., powers of the determinant $\bar{t}$.

The possibilities in the way of shifting indices are much richer than in the tensor analysis. For example, in the projective unitary geometry we have a fundamental spinor satisfying the condition of Hermitian symmetry,

$$\gamma_{\dot{A}B} = \bar{\gamma}_{\dot{B}A}. \tag{4}$$

With this there is associated a unique Hermitian spinor $\gamma^{A\dot{B}}$ such that

$$\gamma_{\dot{A}B}\,\gamma^{B\dot{C}} = \delta^C_A.$$

We now can lower an index and simultaneously put a dot on it by the rule

$$X_{\dot{A}} = \gamma_{\dot{A}B}\,X^B. \tag{5}$$

The inverse operation is

$$X^A = \gamma^{A\dot{B}}\,X_{\dot{B}}. \tag{6}$$

In like manner we have the pair of inverse operations,

$$X_A = X^{\dot{B}}\,\gamma_{\dot{B}A} \quad \text{and} \quad X^{\dot{A}} = X_B\,\gamma^{B\dot{A}}, \tag{7}$$

linking up the two other types of simple spinors.

In tensor analysis where there is a fundamental metric tensor g_{ij} the distinction between covariant and contravariant vectors V^i and V_i is done away with because we have the operation of raising and lowering indices which converts a covariant vector into a contravariant one and *vice versa*. Likewise in spinor analysis where there is a fundamental Hermitian tensor the four types of simple spinors are reduced to two, X^A being interchangeable with $X_{\dot{A}}$ and $X^{\dot{A}}$ with X_A. Simple spinors of the first type (X^A and $X_{\dot{A}}$) will be called ψ-spinors and those of the other type (X_A and $X^{\dot{A}}$) will be called φ-spinors. This terminology is a slight adaptation of that used by Dirac in quantum theory. The Dirac formalism for quantum theory is essentially a matrix calculus in which each ψ-vector is a matrix of one column and each φ-vector is a matrix of one row, and only those coordinate systems are used in which the fundamental Hermitian form reduces to (1).

In quantum theory it is quite practical to limit attention so far as discrete coordinates are concerned to the "orthogonal" systems in which the fundamental Hermitian form reduces to (1). The more general coordinate systems needed are those in which the points are represented by functions defined on a continuous range. But when the fundamental Hermitian form is studied in a finite dimensional projective space one very soon finds the need for writing it in arbitrary projective coordinates as we have done above.

Moreover, in the finite dimensional spaces there is just as much interest in the indefinite Hermitian forms as in the definite ones. The field of geometry which is in question is that of the antiprojective transformations which was opened up about half a century ago by C. Juel and C. Segre. Some of you will remember how fascinating at that time seemed Segre's papers on "Un nuovo campo di ricerche geometriche", and how far removed it seemed from anything like a physical application.

The "new field of geometric research" was the theory of antilinear transformations. These transformations could be either *anticollineations* which carry points into points according to equations of the form

$$\bar{Y}^A = P^{\dot{A}}{}_B X^B$$

and induce corresponding permutations among all the other linear subspaces of P_{k-1}, or they could be *anticorrelations* which carry points into hyperplanes, $X \to \varphi$, according to equations of the form

$$\bar{\varphi}_A = \gamma_{\dot{A}B} X^B$$

and induce corresponding interchanges of the other classes of linear subspaces of P_{k-1}. Both sorts of antilinear transformations are called antiprojectivities. Their properties are quite different from those of projectivities, and not at all trivial.

The most interesting antiprojectivities are those of period two. They are called antiinvolutions if they are anticollineations, and antipolarities if they are anticorrelations. The antiinvolutions are of two kinds. An antiinvolution of the first kind can be written by a proper choice of coordinates in the form

$$\bar{Y}^A = X^A . \tag{8}$$

It leaves invariant all points which have real coordinates in this coordinate system. All antiinvolutions of the second kind are projectively equivalent and are fully characterized by the absence of invariant points. They exist only in spaces P_{k-1} for which k is odd.

The condition that an anticorrelation reduce to an antipolarity is merely that the spinor $\gamma_{\dot{A}B}$ which defines it shall be proportional to one which satisfies the Hermitian condition (4). The projectively distinct types of antipolarities are easily found since any Hermitian form can be reduced by a projective transformation of coordinates to one of the form

$$\pm \bar{X}^1 X^1 \pm \bar{X}^2 X^2 \pm \cdots \pm \bar{X}^k X^k .$$

The points which lie on their antipolar hyperplanes satisfy the equation obtained by setting this expression equal to zero. If all the signs are alike there are no such points and the antipolarity is said to be elliptic. In all other cases the points which lie on their antipolar hyperplanes exist and lie on a locus which is called an antiquadric.[1]

The geometry of a fundamental Hermitian spinor $\gamma_{\dot{A}B}$ is thus the theory of an antipolarity in P_{k-1}. There is one such geometry for an elliptic antipolarity and one for each type of antiquadric.

The process of lowering indices and dotting them which is used in this geometry looks as if it were capable of extension. It brings about the following permutation of the four classes of simple spinors

$$\text{(I)} \qquad (X^A,\ X_{\dot{A}}) \quad (X_A,\ X^{\dot{A}}).$$

It should also be possible to raise and lower indices without affecting their bedottedness, i. e., to make the permutation

$$\text{(II)} \qquad (X^A,\ X_A) \quad (X^{\dot{A}},\ X_{\dot{A}}).$$

This can in fact be done by means of a second fundamental spinor γ_{AB} according to the rules

$$(9) \qquad X_A = \gamma_{AB}\, X^B \quad \text{and} \quad X^A = X_B\, \gamma^{BA}$$

where γ^{AB} is defined by

$$\gamma_{AB}\, \gamma^{AC} = \delta_B^C.$$

We shall assume that γ_{AB} represents either a polarity with respect to a quadric or a null-polarity, i. e.,

$$\gamma_{AB} = \pm \gamma_{BA}.$$

We may also put

$$(10) \qquad \gamma_{\dot{A}\dot{B}} = \pm \gamma_{AB}, \quad \gamma^{\dot{A}\dot{B}} = \pm \bar{\gamma}^{AB}$$

and adopt the rules

$$(11) \qquad X_{\dot{A}} = X^{\dot{B}}\, \gamma_{\dot{B}\dot{A}} \quad \text{and} \quad X^{\dot{A}} = \gamma^{\dot{A}\dot{B}}\, X_{\dot{B}}.$$

It is easy to check that (9) and (11) bring about the permutation (II) in a self-consistent manner.

The resultant of the two permutations (I) and (II) of classes of simple spinors is

[1] Segre called this locus a hyperquadric, but it seems simpler and more practical to refer to all loci connected with antiprojective transformations as anti-loci and to reserve the prefix hyper- for other purposes (e. g. hyperplane).

(III) $$(X^A,\ X^{\dot A})\quad (X_A,\ X_{\dot A})\,.$$

The operation will be unique not only as applied to classes but as applied to individual spinors if and only if

(12) $$\gamma^{\dot A \dot C}\,\gamma_{\dot C B}=\gamma_{C B}\,\gamma^{C \dot A}$$

and the signs in equation (10) are properly chosen.

Equation (12) means that the two geometrical permutations, the antipolarity defined by $\gamma_{\dot A B}$ and the polarity defined by $\gamma_{A B}$, are commutative. Their product is an antiinvolution,

$$\bar Y^A=\gamma^{\dot A}_{\ B}\,X^B$$

defined by the spinor

$$\gamma^{\dot A}_{\ B}=\gamma_{C B}\,\gamma^{C \dot A}\,.$$

These three transformations, antipolarity, polarity, and antiinvolution, together with the identity form a 4-group isomorphic with the 4-group composed of the permutations (I), (II), (III), and the identity. The geometry of any such 4-group realizes to a high degree the formal possibilities of the spinor calculus.

There is one class of 4-groups of this type whose existence is obvious, namely those generated by the polarity of a quadric and an antiinvolution of the first kind $X \bar{\rightarrow} Y$ which assumes the form

(8) $$\bar Y^A=X^A$$

in the coordinate system in which the quadric is expressed by means of a sum of squares

(13) $$(X^1)^2+(X^2)^2+\cdots+(X^k)^2=0\,.$$

The product of two such transformations is obviously the antipolarity defined by the Hermitian form (1). These three transformations together with the identity obviously form a 4-group. The group of collineations which leave this 4-group invariant is isomorphic with the group of the quadric (13) in the real projective space composed of the points of P_{k-1} which are left invariant by (8). This group is isomorphic with the orthogonal group in k variables.

The same remarks may be repeated if there are a certain number of minus signs in (13). For example if $k=4$ and there is one minus sign the group is the group of a real non-ruled quadric in 3-space. This group is isomorphic with the Lorentz group. We shall refer to its generalization to an arbitrary k and an arbitrary number $e\,(0<e<k)$ of minus signs as a generalized Lorentz group.

Here the spinor formalism serves only as an aid in discussing the geometries of these groups in more general coordinate systems than are ordinarily used. The spinors $\gamma^{\dot{A}}{}_B$ and $\gamma_{\dot{A}B}$ take care of the reality conditions which have to be expressed explicitly when they are not implicit in the choice of coordinates.

There are, however, less obvious cases. Let us consider one in which γ_{AB} may be a null-polarity, $\gamma^{\dot{A}}{}_B$ an antiinvolution of the second kind, and $\gamma_{\dot{A}B}$ is an antipolarity with respect to an antihyperboloid. Such a 4-group can exist in a complex 3-space P_3.

We may begin the geometry of this 4-group with an application of the Plücker-Klein corespondence. The existence of this correspondence depends on the fact that the totality of null-polarities in P_3 form a linear family with six homogeneous parameters. This means that any antisymmetric spinor X_{AB} is expressible in the form

(14) $$X_{AB}=X^{\sigma}\,\gamma_{\sigma AB}$$

in terms of six linearly independent spinors $\gamma_{0AB}, \gamma_{1AB}, \cdots, \gamma_{5AB}$. It means also that the dual spinor X^{AB} (the one which represents the transformation of planes into points effected by the same null polarity) is expressible in the same manner in terms of the dual spinors $\gamma_0{}^{AB}, \cdots, \gamma_5{}^{AB}$, i. e.

(15) $$X^{AB}=X^{\sigma}\,\gamma_{\sigma}{}^{AB}\,.$$

Degenerate null-polarities represent straight lines and are characterized by a quadratic relation

(16) $$\gamma_{\sigma\tau}\,X^{\sigma}\,X^{\tau}=0$$

between the parameters which represent them.

The sets of complex numbers $X^{\sigma}\,(\sigma=0,\,1,\,\cdots,\,5)$ can be interpreted as homogeneous coordinates in a complex projective space S_5 of five dimensions. Thus (14) and (15) define a (1—1) correspondence $X_{AB}\longleftrightarrow X^{\sigma}$ between the points of S_5 and the null-polarities of P_3 in which the points on the quadric Q_5 whose equation is (16) correspond to the straight lines of P_3. This is nothing else than the Plücker-Klein correspondence.

The six null-systems $\gamma_{0AB}, \cdots, \gamma_{5AB}$ are a basis for all null-systems in P_3 and the totality of null-systems generates the full projective group in P_3, i. e., the totality of collineations and correlations. Moreover this group corresponds under the Plücker-Klein correspondence to the group of all collineations of P_5 leaving the quadric Q_5 invariant.

The coordinates in S_5 may, of course, be so chosen that the quadric Q has the equation

$$(X^0)^2+(X^1)^2+\cdots+(X^5)^2=0\,; \tag{17}$$

Thus it is clear that the full projective group in P_3 is isomorphic with the complex orthogonal group in six variables. The collineations in P_3 correspond to the proper orthogonal transformations and the correlations to the improper ones.

The Plücker-Klein correspondence also sets up a (1—1) isomorphism between the anticollineations and anticorrelations of P_3 and the anticollineations of P_5 which leave the quadric Q_5 invariant. In particular every antiinvolution of the first kind in P_5 which leaves the quadric invariant corresponds either to an antiinvolution or to an antipolarity in P_3. An antiinvolution of the first kind leaving Q_5 invariant can always be written in the form

$$Y^\sigma=\overline{X}^\sigma$$

in a coordinate system in which the quadric reduces either to the form (17) or to one in which some of the plus signs are replaced by minus signs. Each signature corresponds to an antiinvolution or antipolarity of a particular sort in P_3. The invariant points of the antiinvolution in S_5 consist of the points

$$X^\sigma=\text{Real}$$

in a coordinate system in which the quadric assumes one of its normal forms. These points constitute a real subspace R_5 of S_5. Hence the group of a real quadric in R_5 (or, isomorphic to it, an orthogonal or Lorentz group in six variables) corresponds to the group of an antiinvolution $\gamma^{\dot{A}}{}_B$ or an antipolarity $\gamma_{\dot{A}B}$ in P_3. Thus the geometry of an antiinvolution or of an antipolarity in P_3 may have a group which is isomorphic with a real orthogonal group or a generalized Lorentz group in six variables.

We have left on one side the possibility that $\gamma_{\dot{A}B}$ or $\gamma^{\dot{A}}{}_B$ shall correspond to an antiinvolution of the second kind in S_5.

The rôle of the null-correlation γ_{AB} is very clear. Under the Plücker-Klein correspondence it corresponds to a point of S_5 not on the quadric Q_5. Holding it invariant in P_3 means holding invariant in S_5 a point O and the hyperplane polar to O with regard to Q_5. We may choose the coordinates so that this hyperplane is

$$X^5=0\,.$$

Thus it is evident that we have restricted attention to a complex projective 4-space S_4 which contains a quadric Q_4, namely the one in which Q_5 is intersected by the hyperplane $X^5=0$.

The Plücker-Klein correspondence now reduces to a correspondence $(X^a \longleftrightarrow X^{AB})$ given by

$$X^{AB} = X^a \gamma_a^{AB}, \quad (a=0, 1, \cdots, 4) \tag{8}$$

between the points of S_4 and the null-systems of P_8 which are involutoric with γ_{AB} (i. e., satisfy the equations $\gamma_{AB} X^{AB}=0$).

This correspondence sets up an isomorphism between the collineations and correlations of the group of the null polarity γ_{AB} in P_8 and the collineation group of the quadric Q_4 in S_4. Equally well, of course, it sets up an isomorphism between the projective group of γ_{AB} in P_8 and the complex orthogonal group in five variables.

When we hold γ_{AB} and $\gamma^{\dot{A}}_B$ invariant simultaneously and they are chosen so as to satisfy the commutativity relation (11) which we described above, we are fixing attention on a real subspace R_4 of S_4. Since $\gamma_{\dot{A}B}$ is the product of γ_{AB} and $\gamma^{\dot{A}}_B$ its invariance imposes no additional restriction. Thus the theory of the 4-group, $\gamma_{AB}, \gamma^{\dot{A}}_B, \gamma_{\dot{A}B}$ in P_8 is a geometry isomorphic with the geometry of a quadric Q_4 in a real space R_4. Equally well it is isomorphic with the geometry of a Euclidean or pseudo-Euclidean space E_5.

In this geometry the linear family of null-polarities

$$X_{AB} = X^a \gamma_{aAB} \qquad (a=0, 1, 2, 3, 4)$$

(where now the X^a's are real) plays a fundamental rôle, because it is they that correspond under the Plücker-Klein correspondence to the points of R_4. Suppose we raise one index by means of γ^{AB}. We thus have the linear family of spinors

$$X^A{}_B = X^a \gamma_a{}^A{}_B. \tag{19}$$

Any one of the spinors $X^A{}_B$ represents a collineation, namely, the product of the correlations X_{AB} and γ_{AB}, and on account of the special relation between these correlations $X^A{}_B$ is of period two. It is in fact an axial reflection, that is to say it leaves invariant all points of two non-intersecting straight lines called its axes.

The matrices of two axial reflections commute if and only if the axes cross. Thus their axes are two pairs of opposite edges of a tetrahedron, and the product of the two reflections is the reflection in the third pair of opposite edges. The matrices anticommute if each reflection transforms the other into itself and their axes do not intersect. This means that the two pairs of axes are four lines of a regulus which form a harmonic set.

When the coordinates are so chosen that the equation of the quadric Q_4 in T_4 reduces to a sum of squares with coefficients ± 1, the five basic line reflections $\gamma_0{}^A{}_B, \cdots, \gamma_4{}^A{}_B$ satisfy the relations

$$(20) \qquad \frac{1}{2}(\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha) = \begin{cases} \pm 1 & \text{if } \alpha = \beta \\ 0 & \text{if } \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

(Here we are dropping the spin indices and using a matrix notation. The equation could also be written

$$\frac{1}{2}(\gamma_\alpha{}^A{}_B\, \gamma_\beta{}^B{}_C + \gamma_\beta{}^A{}_B\, \gamma_\alpha{}^B{}_C) = \gamma_{\alpha\beta} \cdot \delta^A_C).$$

This means that any two of them anticommute and the remark above makes it possible both to give a simple construction for the set of five axial reflections and to characterize them completely from a geometric point of view. For example, the whole figure can be made to depend on five linearly independent points in P_3; and from this it follows that any two of these sets of five anticommuting involutions are projectively equivalent.

It is obvious that any four of these five axial reflections are a basis for a linear family of axial reflections which is in a $(1-1)$ correspondence with the points of a real projective 3-space R_3 containing a quadric Q_3. Let us denote the four axial reflections by $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. The family of axial reflections

$$(21) \qquad X^A{}_B = X^i\, \gamma_i{}^A{}_B$$

linearly dependent on them is characterized as the totality of axial reflections commutative with γ_0 as well as with γ_{AB}, $\gamma^{\dot{A}}{}_B$ and $\gamma_{\dot{A}B}$. The group of the geometry thus defined in the spin-space P_3 is isomorphic with the group of the quadric Q_3 in a projective space R_3. In case the basic spinors γ_{AB} and $\gamma^{\dot{A}}{}_B$ are so chosen that the signature of this quadric is $(- - - +)$ the group is the Lorentz group. Indeed we may interpret the coordinates (X^1, X^2, X^3, X^4) as coordinates of space-time in the pseudo-Euclidean space E_4 of relativity.

The matrices γ_i are Dirac matrices and Dirac's equation for the electron is

$$(22) \qquad \gamma^j \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} - \frac{e}{c} \varphi_j \psi\right) = mc\psi.$$

In order to see the meaning of this set of equations we must carry the discussion above into differential geometry. The functions φ and ψ in (22) are functions of four real variables $(x^1, x^2, x^3, x^4) = x$ and these variables are coordinates of the underlying space-time in the sense of relativity. The differentials (dx^1, dx^2, dx^3, dx^4) at any event of space-time are regarded as cartesian coordinates of a tangent space T_4 at this event, in which there is a fundamental quadratic form

$$-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2+(dx^4)^2$$

which defines the light-cone. This tangent space is to be identified with the space E_4 in the discussion above, which thus shows that with each E_4 there is associated a spin-space P_8. The correspondence between E_4 and P_8 is given explicitly by the spinor $\gamma_i{}^A{}_B$ the components of which are functions of (x^1, x^2, x^3, x^4). These functions in the special relativity and in Gallilean coordinates are constants. The geometry in the spin-space P_8 is characterized by the invariant spinors γ_{AB}, $\gamma^{\dot{A}}{}_B$, $\gamma_{\dot{A}B}$ and $\gamma_0{}^A{}_B$ the coefficients of which are functions of the space-time coordinates (x^1, x^2, x^3, x^4).

A simple spinor ψ^A whose components are functions of (x^1, x^2, x^3, x^4) will define a unique point in the spin-space $P_8(x)$ associated with each event x of space-time. To this point of the spin-space will correspond a definite point

$$J^i=\gamma^i_{\dot{A}B}\ \overline{\psi}^A\ \psi^B$$

in the time-like region of the tangent space at this event. (In writing $\gamma^i_{\dot{A}B}$ we have used our apparatus for lowering and dotting indices.) Thus a simple spinor is a geometric entity which is capable of receiving a physical interpretation.

It is such a simple spinor which appears in the Dirac equation. In writing it above the spin indices were suppressed and a matrix notation was used. If they are reinstated it becomes

$$\gamma^{j\,A}{}_B\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi^B}{\partial x^j}-\frac{e}{c}\varphi_j\ \psi^B\right)=mc\psi^A.$$

The invariant theory of these equations under the various types of transformations of the frame of reference with respect to which the quantities in it are referred can now be obtained by routine processes.

The way in which it was found originally is, of course, entirely different from the discussion which we have given. The existence of the matrices was established in P. Dirac's first paper (1927) by giving them explicitly and the invariance followed by algebraic and analytic steps. The first hint of a spin-space was in a paper by J. von Neumann (1928) where it was pointed out that the matrix operations could be interpreted in a 4-space. In 1929 H. Weyl and V. Fock independently showed how to formulate the Dirac theory in general relativity. In the same year van der

Waerden gave a formal theory of two-component spinors adequate to special relativity. This was in response to urging by Ehrenfest who was perhaps the first to see that a thoroughgoing formalism would be required. The formalism has been further developed and the differential geometry interpretations further worked out from 1930 onwards by J. A. Schouten and other mathematicians.[1]

Let us now ask whether there are generalizations of this theory to spaces of higher dimensionality. The answer is that there is a very similar formal and geometric theory for projective spin-spaces of dimensionalities $1, 3, 7, 15, \cdots, 2^k-1, \cdots$ These are the dimensionalities of the spaces corresponding to the spin-representation of the orthogonal groups discovered by E. Cartan (for the still more general case of semi-simple groups) in 1913. Cartan's work was in terms of the infinitesimal group. A purely algebraic representation theory was worked out by R. Brauer and H. Weyl in 1935.

The basic existence theorem upon which this form of the theory depends was proved (1928) in a paper by P. Jordan and E. Wigner. It is that for each value of $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ there exists a set of 2ν matrices γ_i of $k=2^\nu$ rows and columns such that

$$(23) \qquad \frac{1}{2}(\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}.$$

These matrices generate a finite group of matrices composed of the γ's and their products by pairs, triples, etc., which is a linear basis for all k-rowed matrices. From this there arises a spin representation of the orthogonal groups of order 2ν and $2\nu+1$.

The geometric theory has to do with various linear families of geometric transformations, and I shall try to outline it as nearly parallel to the algebraic theory as possible. What I have to say is based chiefly on the work of J. W. Givens and A. Taub who have studied out many of the essential points in connection with my seminar.

In attempting to run parallel with the existing algebraic theory we are led to begin not with the analogue of the Plücker-Klein correspondence but at the other end of our sequence of geometric figures, with linear families of involutions. The general involution of such a family is represented by

$$(21) \qquad X^A{}_B = X^i \gamma_i{}^A{}_B$$

[1] Cf. O. Veblen, Spinors in Projective Relativity, Proc. Nat. Ac. of Sc. *19* (1933), pp. 979—989.

in a complex projective space P_{k-1}. The condition that $X^A{}_B$ be an involution may be written

$$\| X^A{}_B \|^2 = (X^i \gamma_i)^2 = g_{ij} X^i X^j \, 1$$

where

$$g_{ij} \, 1 = \frac{1}{2} (\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i) .$$

The degenerate involutions are those for which

$$g_{ij} X^i X^j = 0 .$$

There is a $(1-1)$ correspondence between the involutions and the points $(X^1, X^2, \cdots, X^n)$ of a projective space S_{n-1}. The theory of a linear family of involutions is therefore equivalent to the geometry of a quadric in S_{n-1}.

If we choose the coordinates in S_{n-1} so that the fundamental quadratic form reduces to a sum of squares, the basic set of involutions γ_i satisfies the conditions (23). This means that their matrices anticommute.

It is easy to prove that the matrices of two involutions can anticommute only in case no invariant point of one coincides with an invariant point of the other. From this it follows that both members of an anticommuting pair must be what are called axial reflections. An axial reflection can exist only in a space P_{k-1} for which k is even and must be an involutoric collineation whose fixed points fill up two non-intersecting linear subspaces of dimensionality $\left(\frac{k}{2} - 1\right)$ each. These $\left(\frac{k}{2} - 1\right)$-dimensional subspaces are called the axes of the involution and we shall call any $\left(\frac{k}{2} - 1\right)$-dimensional subspace of P_{k-1} an axis. The axes are the self-dual linear subspaces of P_{k-1}.

Since each involution of an anticommuting pair interchanges the axes of the other, the two pairs of axes constitute a harmonic set of axes on a generalized regulus.

By an extension of this argument we can determine the properties of any set of anticommuting involutions and give a geometrical construction for all possible sets. The maximum number of involutions in an anticommuting set in a space P_{k-1} is $2\nu + 1$ if $k = 2^\nu l$ where l is odd and two such maximal sets of involutions in the same space are projectively equivalent. Thus we are led without any loss of generality to maximal sets consisting of $2\nu + 1$ axial reflections in a space P_{k-1} where $k = 2^\nu$.

Since each involution is fully determined by its axes, a maximal anticommuting set is equivalent to a figure consisting of $2\nu + 1$ pairs of axes.

The linear family of axial reflections $X^a \gamma_a$ of which these involutions are a basis may likewise be regarded as a family of pairs of axes. The pairs of axes correspond to the points of a complex projective space $S_{2\nu}$. The linear family $X^a \gamma_a$ contains a subfamily of degenerate involutions which correspond to the points of a quadric in $S_{2\nu}$. Each of these degenerate involutions has a single axis which carries a projectivity between the linear spaces in it and those containing it, so that the quadric in $S_{2\nu}$ is represented by a family of axes in P_{k-1} each carrying an appropriate projectivity.

The situation is a direct generalization of that which occurs when $k=4$. In the latter case the pairs of axes are pairs of lines conjugate with respect to the null-polarity γ_{AB} and the coincident axes are the lines of the null-system of this polarity.

In the general case there is a unique polarity C which transforms every axial reflection of the family $X^a \gamma_a$ into itself. The correlation C is a null polarity if $\nu \equiv 1$ or 2 (mod 4) and is a quadric polarity if $\nu \equiv 0$ or 3 (mod 4). It interchanges the axes of every involution in the family $X^a \gamma_a$ if ν is even and leaves them separately invariant if ν is odd. Just as in the 4-component case, C is represented by a pair of spinors γ_{AB} and γ^{AB} which are used for lowering and raising indices.

The group of all collineations in $S_{2\nu}$ which leave Q invariant corresponds to the collineation group of the family $X^a \gamma_a$ in P_{k-1}. Since the first of these groups is a representation of the complex orthogonal group in $2\nu+1$ variables, so also is the second. The collineation group of $X^a \gamma_a$ in P_{k-1} leaves the polarity C and therefore the spinor γ_{AB} invariant.

This collineation group is contained in the group of all collineations and anticollineations leaving $X^a \gamma_a$ invariant. The latter group contains antiinvolutions which are imaged in $S_{2\nu}$ by antiinvolutions of the first kind which leave Q invariant. The group of those collineations of $S_{2\nu}$ which leave both Q and an antiinvolution of this type invariant is isomorphic either to the real orthogonal group or to one of the generalized Lorentz groups. Hence the real orthogonal group or any one of the generalized Lorentz groups is represented by a group of collineations in P_{k-1} which leaves an antiinvolution invariant as well as the family $X^a \gamma_a$. This antiinvolution, which may be of either the first or the second kind, is represented by an invariant spinor $\gamma^{\dot{A}}{}_B$ which with γ_{AB} generates a 4-group entirely analogous to the 4-group which we have already considered in the 4-component case. The spinor $\gamma_{\dot{A}B}$ which represents the antipolarity H of this 4-group is definite if the group represented is the real orthogonal group and is of the type $(+-+-\cdots+-)$ if the group is one of the generalized

Lorentz groups. This is because the points of the quadric in $S_{2\nu}$ **are** represented by axes in P_{k-1} and these can lie on an antiquadric only in case the latter is of the type $(+-+-\cdots+-)$.

If one non-singular axial reflection, say γ_0, of the family $X^a \gamma_a$ be held invariant, the collineation group in $S_{2\nu}$ reduces to that which leaves invariant the 2ν parameter subfamily of axial reflections which anticommute with γ_0. Choosing the basic involutions γ_a so that they anticommute by pairs, the subfamily of reflections which anticommute with γ_0 is given by $X^i \gamma_i$ $(i=1, 2, \cdots, 2\nu)$. This family is in $(1-1)$ correspondence with the points of a projective space $S_{2\nu-1}$ and this correspondence gives rise to a representation of the real orthogonal group or of one of the Lorentz groups in 2ν variables.

These geometries, involving the family $X^i \gamma_i$ and the invariants γ_{AB}, $\gamma^{\dot{A}}{}_B$, $\gamma_{\dot{A}B}$ and $\gamma_0{}^A{}_B$ in P_{k-1}, are clear generalizations of the most restricted geometry which we had in the 4-component case, namely, that underlying the invariant theory of the Dirac equation. They exist in every P_{k-1} for which $k=2^\nu$. There are several problems about them with regard to which we have, as yet, only partial results. Perhaps the most fundamental of these is to replace the linear family $X^i \gamma_i$ in the definition of the space by other spinors not involving the index i explicitly. This will lead to extensions of the formal apparatus of the geometry.

The subfamily $X^i \gamma_i$ completely determines the entire family $X^a \gamma_a$ since γ_0 is uniquely determined by the fact that it anticommutes with all the reflections $X^i \gamma_i$. Indeed, if the γ_i anticommute, γ_0 is just the product $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{2\nu}$. These results can be inferred from the fact that $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2\nu}$ are the generators of a finite group $\mathfrak{G}_{k^2}$ of order k^2 $(=2^{2\nu})$ consisting of the identity, the γ's themselves, and their products by twos, threes, and so on up to sets of 2ν. Each transformation of $\mathfrak{G}_{k^2}$ except the identity is an axial reflection. Their matrices are linearly independent and form a basis for all square matrices of k rows.

The group $\mathfrak{G}_{k^2}$ is contained as an invariant subgroup in a finite group of order $4k^2$ obtained by adjoining to the generators oι $\mathfrak{G}_{k^2}$ the polarity referred to above and an antiinvolution which commutes geometrically with the generators of $\mathfrak{G}_{k^2}$. The extended group $\mathfrak{G}_{4k^2}$ contains in addition to the axial reflections of $\mathfrak{G}_{k^2}$ a set of k^2 polarities, k^2 antiinvolutions, and k^2 antipolarities. The polarities form a basis for all correlations, the antiinvolutions for all anticollineations, and the antipolarities for all anticorrelations in the space P_{k-1}. The coordinates may be chosen in such a way that the polarities, antiinvolutions and antipolarities of $\mathfrak{G}_{4k^2}$ are represented by the same k^2 matrices as represent the collineations. Thus we have a set of matrices each of which represents a collineation, an antiinvolution, a polarity, and an antipolarity. In this spinor notation the four transformations represented by a matrix a are

$$a^{A}{}_{B},\ a^{\dot{A}}{}_{B},\ a_{AB},\ a_{\dot{A}B}$$

and the operations of the group $\mathfrak{G}_{4k^2}$ correspond to different ways of combining the matrices.

Each geometry which we have thus far considered in the general case had as an invariant configuration a 4-group contained in $\mathfrak{G}_{4k^2}$. These geometries generalize everything in the 4-component theory except the Plücker-Klein correspondence. In seeking a suitable generalization of this correspondence we lower an index of $\gamma_{\alpha}{}^{A}{}_{B}$ by means of γ_{AB} and thus obtain a spinor $\gamma_{\alpha AB}$ which is a basis for a linear family of polarities,

$$X^{\alpha}\gamma_{\alpha AB}.$$

The polarities of this family are all null-systems if $\nu\equiv 2$ or 3 (mod 4) and all quadric polarities if $\nu\equiv 0$ or 1 (mod 4).

In the 4-component case γ_{AB} and the polarities in the linear family $\gamma_{\alpha AB}$ are all null-polarities. Moreover the linear family can be extended into

$$X\gamma_{AB}+X^{\alpha}\gamma_{\alpha AB}=X^{\sigma}\gamma_{\sigma AB}\quad(\sigma=0,\ 1,\ \cdots,\ 5).$$

Indeed, $\gamma_{\sigma AB}$ is the spinor which defines the Plücker-Klein correspondence.

This situation reappears whenever $\nu\equiv 2$ or 0 (mod 4). In these cases γ_{AB} and the family $X^{\alpha}\gamma_{\alpha AB}$ are correlations of the same type which can be combined into a single linear family

$$X^{\sigma}\gamma_{\sigma AB}$$

with $2\nu+2$ homogeneous parameters. The correlations of such a family are in $(1-1)$ correspondence with the points of a complex projective space $S_{2\nu+1}$ of $2\nu+1$ dimensions in which there is an invariant quadric. This gives rise to a representation of the orthogonal and Lorentz groups in $2\nu+2$ variables. The reality conditions are imposed by an invariant anti-involution or antipolarity.

In the cases when $\nu\equiv 2$ (mod 4), that is to say when $k=4,\ 64,\ 1024,\cdots$, the linear family $X^{\sigma}\gamma_{\sigma AB}$ consists entirely of null-polarities. The generalization of the 4-component theory in these cases is very complete. The only feature which is lost is that in the 4-component theory the linear family contains all null-polarities, whereas in the higher cases it is merely a maximal linear family. The representation theory and the sequence of sub-geometries is quite analogous to the 4-component theory.

Next after this series of cases in similarity to the 4-component theory is that for which $\nu\equiv 0$ (mod 4), that is to say $k=16,\ 256,\ 4096,\cdots$. In this series of cases the linear family $X^{\sigma} \gamma_{\sigma A B}$ consists of quadric polarities, but the course of the theory is otherwise similar.

In both types of cases (i. e. when ν is even) the family of polarities is such that any non-singular polarity of the family may be used as the invariant polarity C of a $(2\nu+1)$-parameter family of axial reflections, the elements of which are obtained by multiplying the fixed polarity by the polarities of the family which are involutoric to it. The polarity C interchanges the axes of each of the involutions γ_{a} and this has the consequence that $X^{a} \gamma_{a A B}$ can be extended to the linear family $X^{\sigma} \gamma_{\sigma A B}$.

In the cases where ν is odd, C is a polarity of different type from the family $X^{a} \gamma_{a}$, and $X^{a} \gamma_{a A B}$ is itself a maximal linear family of polarities. Hence in these cases the part of the theory which directly generalizes the Plücker-Klein correspondence is missing. This is the part which does not presuppose an invariant spinor $\gamma_{A B}$. So in case $\nu \equiv 1$ or 3 (mod 4) such a spinor is always present.

This is a very sketchy account of what proves to be a rather extensive geometric theory. It seems to generalize the classical 3-dimensional projective geometry to a series of higher dimensional cases by methods which enable us to grasp the situation as a whole almost as well as we can in three dimensions. It is still, however, in a very incomplete state and still requires, to use one of Professor Weyl's phrases, to be thought through to the end.

I have made no reference to the applications of the theory to differential geometry. These were sufficiently indicated in the 3-dimensional case. The tangent spaces of an arbitrary Riemannian space can be parameterized by various sets of objects in associated projective spaces and the displacement theory of the tangent spaces translated into a displacement theory of these associated projective spaces. The Dirac theory indicates that this process should bring to light geometric beings of considerable importance, but it has not yet been exploited. The only paper that I know of that bears on it is one by G. Temple pointing out the relationship of the γ matrices with H. Maschke's method for differential geometry.

I have also said nothing about a much wider generalization of the theory, which seems to be possible. At every turn in the discussion above we have been looking at groups which are generated by transformations of period two — either finite sets or linear families of which these finite sets are bases. Is it not possible to build the whole theory, or all that is essential in it, on this more abstract foundation?

EINIGE METHODEN UND ERGEBNISSE AUS DER TOPOLOGIE DER FLÄCHENABBILDUNGEN

Von Jakob Nielsen, Kopenhagen.

Wie der Titel meines Vortrages andeuten soll, ist es nicht beabsichtigt, einen Bericht zu geben, der alle Untersuchungsrichtungen in der Topologie der Flächenabbildungen berücksichtigt. Es wird vielmehr nur versucht, mit Unterdrückung aller Rechnungen und unter Hervorhebung des anschaulichen Inhalts eine bestimmte Entwicklungslinie aufzuzeigen, indem wir von bekannten Dingen ausgehen, die Fragestellung schrittweise erweitern und zum Schluß die Gesichtspunkte zusammenfassen.

1. Das Interesse an den topologischen Eigenschaften der Abbildungen von Flächen auf einander oder auf sich stammt in erster Linie aus den Betrachtungen, auf die man in der Funktionentheorie durch konforme Abbildungen Riemannscher Flächen geführt wird. Ich möchte daher meinen Ausgangspunkt in einem klassischen Fall dieser Art nehmen. Betrachten wir die Riemannsche Fläche φ eines algebraischen Gebildes von einem Geschlecht $p > 1$, welches eine birationale Transformation $\tau\varphi$ in sich zuläßt. Dann ist bekanntlich für $p > 1$ diese Transformation τ von endlicher Ordnung, d. h. etwa ihre n-te Potenz τ^n ist die identische Transformation. Faßt man die Punktsysteme auf φ, deren Punkte sich bei den Potenzen von τ entsprechen, zu einem Punkt zusammen, so erhält man eine Fläche M von einem Geschlecht $p_1 \geqq 0$, die Herr Brouwer als „Modulfläche“ dieser periodischen Transformation bezeichnet [1]. φ ist dann eine n-blättrige reguläre Riemannsche Fläche über M mit $r \geqq 0$ Verzweigungspunkten, zyklischer Monodromiegruppe und einer zyklischen Gruppe von Decktransformationen von φ über M, die durch τ erzeugt wird. Es gilt die Verzweigungsformel von Riemann-Hurwitz [2]

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{n}{\lambda_i}(\lambda_i - 1) = 2p - 2 - n(2p_1 - 2).$$

Die Zahlen λ_i sind Teiler von n und geben die Verzweigungsordnungen der einzelnen Verzweigungspunkte an. Weiter hat Herr Wiman [3] durch Verschärfung eines Resultates von Hurwitz [2] gefunden, daß man für n die Beschränkung

$$n \leqq 4p + 2$$

hat. Als Fixpunkte der Transformation τ oder ihrer Potenzen treten dabei die über Verzweigungspunkten geeigneter Verzweigungsordnungen liegenden Punkte von φ auf.

Die klarste Einsicht in diese Verhältnisse wird durch die Grenzkreisuniformisierung geliefert, und ich möchte an die entsprechenden Begriffe erinnern, da es sich nachher um die topologische Verallgemeinerung derselben handelt. Man bildet die universelle Überlagerungsfläche Φ von φ konform auf das Innere $|x|<1$ des Einheitskreises E der Ebene einer komplexen Variablen x ab. Die Gruppe F der Decktransformationen von Φ über φ ist dann eine in Φ diskontinuierliche abzählbare Gruppe:

$$F: \; f_0=1, \; f_1, \; f_2, \cdots\cdots$$

von hyperbolischen Substitutionen. Φ ist auch regulär über M. Die Gruppe T der Decktransformationen von Φ über M enthält F als Untergruppe und kann außer hyperbolischen auch elliptische Substitutionen enthalten, falls nämlich $r>0$, also Verzweigungen vorkommen. Eine Operation t aus T, die über τ liegt, hat die Eigenschaft, daß t^n, aber keine niedrigere Potenz von t, in F liegt, und genügt den *Funktionalgleichungen*

$$t f t^{-1} = f_I, \quad (f \text{ durchläuft } F)$$

wo die Korrespondenz $f \rightarrow f_I$ einen *Automorphismus* I von F bedeutet. Hierdurch wird ausgedrückt, daß äquivalente Punkte von Φ, d. h. Punkte, die die gleiche Spur auf φ haben, bei t in äquivalente Punkte abgebildet werden. F ist also Normalteiler von T, und die *Faktorgruppe* T/F ist die zyklische Gruppe n-ter Ordnung. Man hat daher die Zerlegung von T:

$$\begin{array}{llll}
1 & f_1 & f_2 & \cdots\cdots \\
t & f_1 t & f_2 t & \cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
t^{n-1} & f_1 t^{n-1} & f_2 t^{n-1} & \cdots\cdots
\end{array}$$

Die Elemente endlicher Ordnung in diesem Schema sind elliptische Substitutionen, die um die über Verzweigungspunkten liegenden Punkte von Φ drehen.

Hierbei ist an die Elemente von T als Abbildungen von Φ auf sich gedacht, aber alle Operationen lassen sich ja als gebrochen-lineare Substitutionen in der ganzen x-Ebene deuten. Die Gruppe T mit dem Normalteiler F stellt also insbesondere auch eine Gruppe von abzählbar vielen topologischen und den Umlaufssinn erhaltenden Abbildungen der *Kreislinie* E in sich dar.

2. Wir suchen nun analoge Begriffe für eine *beliebige topologische*, den Umlaufssinn erhaltende Abbildung $\tau\varphi$ einer geschlossenen zweiseitigen Fläche φ vom Geschlecht $p>1$ auf sich zu bilden. Dabei stellen wir die

universelle Überlagerungsfläche Φ in derselben Weise in dem Einheitskreise E der x-Ebene durch eine Fundamentalgruppe F von hyperbolischen Substitutionen

$$f_0=1,\ f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots$$

dar. Ist $t\Phi$ eine Abbildungsfunktion über $\tau\varphi$, so genügt sie wieder der Funktionalgleichung

$$tft^{-1}=f_I,$$

und man bildet durch Potenzieren von τ die Abbildungsgruppe T von Φ mit F als Normalteiler

$$\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
t^{-1} & f_1 t^{-1} & f_2 t^{-1} & \cdots\cdots \\
1 & f_1 & f_2 & \cdots\cdots \\
t & f_1 t & f_2 t & \cdots\cdots \\
t^2 & f_1 t^2 & f_2 t^2 & \cdots\cdots \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

Hier ist nun die Faktorgruppe T/F im Allgemeinen von unendlicher Ordnung; denn wenn eine Potenz t^n in F enthalten sein soll, so bedeutet das ja, daß τ periodisch von der Periode n ist; das ist gerade der spezielle Fall, von dem wir soeben ausgingen. Ferner ist diese Gruppe von vornherein nur in Φ erklärt; denn ein Element aus T, aber nicht aus F, z. B. t, ist ja im Allgemeinen keine gebrochen-lineare Substitution, sondern nur eine stetige Funktion $t(x)$, die Φ topologisch auf sich abbildet. Nun braucht ja eine topologische Abbildung einer offenen Kreisscheibe auf sich im Allgemeinen keine Erweiterung auf den Rand zuzulassen. In dem vorliegenden Falle ist es jedoch dank der Funktionalgleichung so, daß hier eine *topologische Abbildung des Randkreises E sich stetig anschließt.*

Wir wollen das anschaulich erläutern. Jeder geschlossenen Kurve k auf φ, die nicht zusammenziehbar ist, entspricht im Sinne der von Φ übertragenen nichteuklidischen Metrik eine geschlossene geodätische Linie $\varkappa$, die mit k homotop ist. Ihr entspricht in Φ ein zu E orthogonaler Kreis K. Das Überlagerungsgebilde K von k verläuft in beschränktem nichteuklidischen Abstand von K. Analog sei die Bildkurve τk zu der geschlossenen geodätischen Linie $\varkappa'$ homotop, der wiederum in Φ der Orthogonalkreis K' entspricht. Der Endpunkt von K auf E geht dann bei tE in den Endpunkt von K' über. Diese Korrespondenz der „unendlich fernen Punkte der Überlagerungsfläche", festgelegt durch geodätische Richtungen auf der Fläche, läßt sich auch auf offene geodätische Linien ausdehnen. Ändert man τ

stetig ab, so wird das Bild τk von k stetig geändert, gehört also fortdauernd zu derselben Geodätischen $\varkappa'$, und es ändert sich deshalb nichts an der Randabbildung tE.

Wegen dieses stetigen Randanschlusses kann man die Gruppe T, die wir bisher in Φ allein betrachtet haben, in $\Phi+E$ und dann weiter auf E allein betrachten, und in dieser letzten Auffassung ist sie eine *Invariante der Abbildungsklasse*, zu der $\tau\varphi$ gehört.

Durch diese Beschränkung auf die Betrachtung von T auf E allein erhebt sich die Frage nach der Faktorgruppe T/F in neuer Bedeutung. Es kann nämlich eintreten, daß t^n auf E allein einem Element aus F gleich ist, ohne daß dies in Φ der Fall ist, und zwar tritt das dann und nur dann ein, wenn $\tau^n\varphi$ zur Klasse der identischen Abbildung gehört, also stetig in die Identität überführbar ist. Dann sprechen wir von einer *Abbildungsklasse endlicher* (n-ter) *Ordnung*.

Beispiele von solchen sind diejenigen Abbildungsklassen, die periodische Abbildungen enthalten. Es erhebt sich die Frage, ob das alle sind, ob also eine Abbildung $\tau\varphi$, für die $\tau^n\varphi$ sich stetig in die Identität überführen läßt, selbst sich in eine Abbildung $\tau'\varphi$ stetig überführen läßt, für die $\tau'^n\varphi$ die Identität ist. Ein allgemeingültiger Beweis für diesen Satz, den ich als Vermutung aussprechen möchte, steht noch aus. Der Weg zum Beweis führt über eine genauere Analyse der periodischen Abbildungen, also der regulären Riemannschen Flächen mit zyklischer Monodromiegruppe. Hier hat Herr SCHERRER [4] für $n=2$ Normalformen angegeben, die alle Fälle umfassen, und aus denen sich die topologische Äquivalenz zweier periodischen Abbildungen der Ordnung 2 entscheiden läßt. Man hat dann zu untersuchen, was die Normalformen für die Randabbildungsgruppe $T(E)$ bedeuten, und dann umgekehrt wieder im allgemeinen topologischen Fall von der Randabbildung aus auf die Existenz der Normalformen zu schließen. So läßt sich die genannte Vermutung in der Tat für $n=2$ und analog in einer Reihe von anderen Fällen beweisen.

Ich nenne nur das folgende Resultat aus diesen Untersuchungen: Auf einer regulären, unverzweigten, n-blättrigen Riemannschen Fläche mit zyklischer Monodromiegruppe gibt es immer n einfache Kurven über derselben Spur, die die Fläche in n Teile zerlegen. Eine Konsequenz daraus ist folgender Satz: Zwei Abbildungsklassen endlicher Ordnung n zweier Flächen gleichen Geschlechtes $p>1$, die beide durch bis zur n-ten Potenz fixpunktfreie Abbildungen repräsentierbar sind, sind in dem Sinne topologisch äquivalent, daß sich die eine in eine primitive Potenz der anderen transformieren läßt.

Das Problem, um das es sich hier handelt, läßt sich so formulieren: Man hat auf E die Gruppe T aus topologischen Abbildungen mit der

Gruppe F aus hyperbolischen Substitutionen als Normalteiler. Man soll E so auf einen anderen Kreis E' abbilden, daß die ganze Gruppe T in eine Gruppe T' von gebrochen-linearen Substitutionen übergeht. Denn T' läßt sich ja dann auch im Inneren Φ' von E' deuten, sodaß man zu periodischen Abbildungen kommt.

Hier ist es nun von Interesse, daß man unabhängig von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Vermutung wesentliche Eigenschaften der periodischen Abbildungen auf die Abbildungsklassen endlicher Ordnung übertragen kann. Dazu muß man die folgenden Begriffe benutzen:

Im periodischen Fall (unter 1) sind ja die Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche φ Fixpunkte bei τ oder Potenzen von τ. Im jetzt betrachteten allgemeinen Fall *teilt man zunächst die Fixpunkte in Klassen ein*, indem man zwei Fixpunkte P und Q dann und nur dann zur selben Klasse rechnet, wenn man sie durch einen Bogen verbinden kann, der zusammen mit seinem Bild eine auf φ zusammenziehbare geschlossene Kurve gibt. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn P und Q bei der gleichen Abbildung aus T als Fixpunkte in Φ in die Erscheinung treten. Einer solchen Fixpunktklasse ordnet man in bekannter Weise eine ganze Zahl als *Index* zu, indem man die Richtungsänderung eines Strahles von Punkt zu Bildpunkt bei Umfahrung dieser Punktgruppe mißt. Dieser Index ist *bei Abbildungsklassen endlicher Ordnung* immer $+1$ oder 0, und nur im ersten Fall sprechen wir von einer wesentlichen Fixpunktklasse. Also ist die Anzahl der wesentlichen Klassen gleich der *Indexsumme* Ξ, und diese ist von Herrn ALEXANDER [5] bestimmt worden: Man bildet für eine beliebige Homologiebasis die Matrix Γ, die den der Abbildung $\tau\varphi$ entsprechenden *Automorphismus der Homologiegruppe* beschreibt, also die Projektion des Automorphismus I der Fundamentalgruppe F auf das kommutative Gebiet: Die Homologiegruppe ist ja die Faktorgruppe der Kommutatorgruppe von F. Bezeichnet $s(\Gamma)$ die Spur von Γ, so ist nach Alexander

$$\Xi=2-s(\Gamma),$$

eine Formel, deren Erweiterung durch Herrn LEFSCHETZ zu einer der schönsten Anwendungen der Homologiegruppe in der Theorie der Abbildungen geführt hat. Diese Richtung ist von Herrn HOPF [6] weitergeführt worden, und in allerletzter Zeit hat Herr REIDEMEISTER [7] sie kombinatorisch für die einzelnen Fixpunktklassen durchführen können.

Ich erwähne, daß man im Fall der periodischen Abbildungen die Alexandersche Formel ablesen kann, indem man die Rolle der einzelnen Eigenwerte von Γ verfolgt. Im Fall der birationalen Transformationen sind das diejenigen n-ten Einheitswurzeln, mit denen sich geeignet gewählte

Differentiale erster Gattung bei der Transformation multiplizieren. Das ergibt sich aus den Untersuchungen von Hurwitz [2], die auch die Formel von Alexander für diesen Spezialfall enthalten. Hier ist es also natürlich, den Koeffizientenring der Homologiegruppe ins komplexe Gebiet zu erweitern.

Andererseits entsprechen die Verzweigungspunkte im Fall der periodischen Abbildungen gruppentheoretisch den elliptischen Substitutionen, also den Elementen endlicher Ordnung von T, und diese gruppentheoretische Eigenschaft läßt sich auf den allgemeinen Fall von Abbildungsklassen endlicher Ordnung übertragen. Man bekommt dann unter Benutzung der Formel von Alexander *für beliebige Abbildungsklassen endlicher Ordnung die obige Hurwitzformel.* Dabei ist p das Geschlecht von φ, n die Ordnung der Abbildungsklasse, $2p_1$ die Multiplizität des Eigenwertes $+1$ in Γ, und der Summe auf der linken Seite entspricht eine gewisse Abzählung der Elemente endlicher Ordnung in T. Weiter ergibt sich die *Ungleichung von Wiman* auf dieser Grundlage. Für periodische Abbildungen hat Herr Steiger [8] diese Ungleichung schon mit rein topologischen Hilfsmitteln bewiesen. Sie ist aber auch ein gültiger Satz schon für Abbildungsklassen endlicher Ordnung [9].

Selbst wenn die oben erwähnte Vermutung sich als richtig erweisen sollte, also die hier untersuchten Invarianten von Abbildungsklassen endlicher Ordnung nicht über das hinausgehen, was man für periodische Abbildungen ableiten kann, so zeigt sich doch, wie man die Beweise für gewisse Sätze, die man in der Funktionentheorie antrifft, auf allgemeiner topologischer Grundlage mit gruppentheoretischen Hilfsmitteln führen kann. Das ist ja eine Tendenz, die man von verschiedenen Richtungen her verfolgt hat, z. B. von einem anderen Ausgangspunkt aus in den Arbeiten von Herrn Stoilow [10] oder von Herrn v. Kerékjártó [11].

3. Wir wenden uns nun zu den Abbildungsklassen, die keine endliche Ordnung haben. Für diese ist T/F auch auf E allein eine *unendliche* Gruppe. Hier müssen wir zunächst die Abbildungen von E näher betrachten, die durch die einzelnen Abbildungen von T bewirkt werden, z. B. die Abbildung tE. Durch Transformation mit t wird F isomorph in sich abgebildet. Sei H diejenige Untergruppe von F, die aus *Fixelementen* besteht, d. h. aus Elementen, die sich bei Transformation mit t nicht ändern, also mit t vertauschbar sind. H ist immer eine *freie Gruppe*, für deren Erzeugendenzahl ν

$$0 \leqq \nu \leqq 2p-1$$

gilt. Die abgeschlossene Hülle der Endpunkte der den Elementen aus H entsprechenden geodätischen Linien in Φ bildet im allgemeinen Fall eine perfekte nirgends dichte Menge auf E, die bei der Abbildung t punktweise festbleibt. Überspannt man ihre Restintervalle mit zu E orthogonalen Kreisbögen, so entsteht ein nichteuklidisch-konvexes Gebiet Δ, das „*Kerngebiet*" von t, welches universelle Überlagerungsfläche eines von endlich vielen einfachen geschlossenen geodätischen Linien berandeten Teilgebietes δ von φ ist. Dabei ist H die Fundamentalgruppe von δ. Außer den Randpunkten von Δ kann es noch andere Fixpunkte von tE geben, aber diese sind dann isoliert und abwechselnd bei t „anziehend" und „abstoßend". Verbindet man je zwei aufeinanderfolgende anziehende durch Orthogonalbögen, so entsteht ein Δ umfassendes Gebiet Ω, das „*Hauptgebiet*" von t. Die Zahl untereinander nicht bezüglich F äquivalenter Randpunkte von Ω, die nicht Randpunkte von Δ sind, ist endlich, etwa μ. Nun gilt: ***Das Gebiet Ω wird durch jedes Element von H in sich und durch jedes andere Element von F auf ein ganz außerhalb Ω liegendes Gebiet abgebildet.*** Setzt man dies zu dem nichteuklidischen Flächeninhalt von φ in Beziehung, so folgt die Ungleichung

$$0 \leqq 2\nu + \mu \leqq 4p - 2,$$

wodurch je nach den Werten von ν und μ eine Einteilung der möglichen Randabbildungen tE in ***endlich viele Typen*** erzielt wird. Für den Index j der durch $t\Phi$ dargestellten Fixpunktklasse findet man

$$j = 1 - \nu - \mu$$

mit der Beschränkung

$$3 - 4p \leqq j \leqq 1\,.$$

Zu einer Abbildungsklasse gehören nur ***endlich viele Fixpunktklassen*** mit einem von Null verschiedenen Index. Ihre Anzahl sei mit Z bezeichnet. Der Fall $j = 1$ entspricht $\nu = \mu = 0$, also fixpunktfreier Randabbildung. — Alles dies hat invariante Bedeutung gegenüber stetiger Änderung von $\tau\varphi$.

Der Rand von Δ auf E bleibt bei t fest. Das heißt natürlich nicht, daß das Gebiet δ auf φ bei $\tau\varphi$ fest zu bleiben braucht, — wir lassen ja beliebige stetige Änderungen von τ zu. Aber diejenigen geodätischen Richtungen, die ganz in δ verlaufenden geodätischen Linien entsprechen, bleiben in dem früher genannten Sinne bei der Abbildung fest. Die Randseiten von Ω, die nicht Ränder von Δ sind, entsprechen ***offenen geodätischen Linien*** auf φ, die weder sich selbst noch einander schneiden. Ihre Endpunkte sind auch Fixpunkte von tE, geben also geodätische Richtungen an, die sich nicht ändern. Zwischen diesen beiden Fällen von geodätischen Fixrichtungen ist aber ein wesentlicher Unterschied, der sich bei Heranziehung der Homologiegruppe ergibt: Die geodätischen Fixrichtungen geschlossener Geodätischer in δ entsprechen Fixelementen aus der Untergruppe

H von F. Demjenigen Teil einer Homologiebasis auf φ, der zu der Teilfläche δ gehört, entspricht also der Eigenwert $+1$ in der Matrix Γ. Zu den isolierten Randpunkten von Ω auf E dagegen gehören nicht Elemente aus F. Wohl aber kann man ihnen *unendliche Folgen* von Elementen aus F zuordnen. Diese Methode der „Entwicklung der unendlich fernen Punkte der universellen Überlagerungsfläche nach der Fundamentalgruppe“ ist für die Durchrechnung jedes speziellen Beispiels das natürliche Werkzeug; neuerdings hat Herr Hedlund [12] sie weiter ausgebaut und zur Lösung von Problemen der Ergodentheorie benutzt. Wenn man nun für einen isolierten Randpunkt von Ω die dieser Elementfolge von F entsprechende Elementfolge der Homologiegruppe bildet, so konvergieren die Verhältnisse der Koeffizienten der Basiselemente dabei gegen bestimmte irrationale Grenzwerte. Man erweitert also zweckmäßig den Koeffizientenring der Homologiegruppe, indem man *ganze algebraische Zahlen als Koeffizienten* zuläßt; dann gehört zu einem isolierten Randpunkt von Ω ein Element der Homologiegruppe in diesem erweiterten Sinn, und dieses entspricht *einem reellen Eigenwert größer als 1 von Γ*. Diese Erweiterung der Homologiegruppe entspringt also einem durchaus anschaulichen Sachverhalt.

Für die Summe der Indizes aller Fixpunktklassen hat man nach Alexander [5] den Wert

$$\Xi = j_1 + j_2 + \cdots\cdots + j_Z = 2 - s(\Gamma)$$

und daher wegen $j \leqq 1$

$$Z \geqq \Xi.$$

Da es in den Abbildungen der betrachteten Abbildungsklasse jedenfalls nicht weniger als Z verschiedene Fixpunkte gibt, hat man durch das algebraische Mittel der Alexanderschen Formel eine *untere Schranke für die Minimalzahl der Fixpunkte* gefunden, falls $\Xi > 0$ ist. Für negative Werte von j hängt j von dem Flächeninhalt von $\omega = \Omega \pmod H$ ab, und indem man dies wieder zu dem Flächeninhalt von φ in Beziehung setzt, gewinnt man die Abschätzung

$$Z \geqq -\Xi - 4(p-1),$$

welche für $\Xi < -4(p-1)$ brauchbar ist. Es gibt genau einen Fall eines negativen j, welcher keinen Teil des Flächeninhalts von φ beansprucht, nämlich den Fall $\nu=0$, $\mu=2$, $j=-1$: Für diesen artet das Hauptgebiet zu einer offenen geodätischen Linie aus, indem die Gruppe H nur aus der Identität besteht und auf E nur vier Fixpunkte auftreten, von denen zwei anziehend und zwei abstoßend sind. Wir sprechen dann von einem „strichförmigen“ Hauptgebiet. Wenn daher Ξ negativ und numerisch groß ist, so folgt, daß fast alle Klassen von negativem Index von diesem Typus sind, nämlich mindestens

$$|\Xi|-8(p-1).$$

Es ergibt sich also generell *aus dem Geschlecht der Fläche eine Beschränkung für die Anzahl derjenigen Fixpunktklassen, die einen Index kleiner als —1 haben.*

4. Wenn tE Fixpunkte hat, so haben t^2E, t^3E, $\cdots\cdots$ dieselben Fixpunkte, also dieselben Zahlen ν und μ und daher auch denselben Index $j \leqq 0$. Anders im Fall $j > 0$, also $j \doteq 1$: Wenn tE fixpunktfrei ist, so läßt sich aus der oben angeführten Funktionalgleichung schließen, daß eine Potenz, etwa t^n, auf E Fixpunkte hat. Fixpunktklassen von positivem Index sind also als solche *instabil*, d. h. bei passend hoher Iteration der Abbildung gehen sie in einer Fixpunktklasse von einem Index $\leqq 0$ auf. Das ergibt die Möglichkeit, auch mit einer Abbildungsfunktion von positivem Index den Begriff des Haupt- und Kerngebietes zu verbinden, indem man ihr das Hauptgebiet Ω oder Kerngebiet Δ, welches zu t^n gehört, zuordnet. *Dadurch bekommt der Spezialfall der Abbildungsklassen endlicher Ordnung eine weiterreichende Bedeutung*: Wenn nämlich zu t^n ein Kerngebiet $\delta(t^n)$ vom Geschlecht q mit ϱ Randkurven auf φ gehört, so ist die betrachtete Abbildungsklasse τ bezüglich dieses Kerngebietes allein als eine solche von endlicher Ordnung n anzusehen, d. h. t induziert in der Fundamentalgruppe H dieses Flächenteils einen Automorphismus der endlichen Ordnung n. Dabei spielt eine Randkurve von δ, die bei τ in eine mit einer anderen Randkurve homotope Kurve übergeht, die Rolle eines Nichtfixpunktes, während eine Randkurve von δ, die mit ihrem Bilde bei τ homotop ist, einen Fixpunkt vertritt. Stellt man sich diese Festsetzung anschaulich als eine *Zusammenschnürung* der Randkurven von δ auf einen Punkt vor, so kann man wieder die für geschlossene Flächen gebildeten Begriffe auf δ anwenden. Dadurch schließt sich der Ring unserer Betrachtungen, indem der algebraische Fall, von dem wir (unter 1) unsern Ausgangspunkt nahmen, und den wir (unter 2) auf Abbildungsklassen endlicher Ordnung erweiterten, nunmehr auch für den (unter 3 und 4) betrachteten allgemeinen Fall in der Anwendung auf das zugehörige Gebiet δ Bedeutung gewinnt. Insbesondere gibt es also auch hier eine *Hurwitzformel* und eine *Wimansche Ungleichung* zur Beschränkung der möglichen Werte von n. Ferner kann man mittels der *Formel von Alexander* die Anzahl der jeweils zu einem Kerngebiet δ gehörigen positiven Fixpunktklassen ermitteln. *Da nun die zu den verschiedenen Elementen von T gehörigen Haupt- und Kerngebiete sich auf der Fläche nicht überdecken*, ergibt sich für diejenigen unter ihnen, die positiven Flächeninhalt haben, d. h. nicht „strichförmig“ au arten, eine Beschränkung der Gesamtzahl von

positiven Fixpunktklassen. Andererseits bildet man leicht **Beispiele von** Abbildungsklassen mit beliebig großer Indexsumme Ξ. Für solche **müssen** also fast alle positiven Fixpunktklassen — d. h. alle bis auf eine **Anzahl,** für die sich von vornherein eine nur vom Geschlecht p von φ abhängende obere Schranke angeben läßt — zu einem in obigem Sinn ausgearteten Hauptgebiet (einer offenen geodätischen Linie) gehören, und dies gestattet für n nur den Wert 2, der einer Umkehrung der Linie entspricht. Bei Vorhandensein sehr vieler positiver Fixpunktklassen sind also *fast alle so unstabil wie möglich*, indem der Index $+1$ solcher Klassen sich schon bei einmaligem Iterieren der Abbildung in -1 verwandelt.

Hier mögen zur Erläuterung zwei Beispiele angeführt werden: In einer Abbildungsklasse kann es vorkommen, daß jedes Hauptgebiet mit seinem Kerngebiet identisch ist (d. h. $\mu=0$), und daß die verschiedenen Kerngebiete die Fläche vollständig ausfüllen. Man erhält dann eine Abbildung der Klasse, indem man die einzelnen Kerngebiete identisch auf sich abbildet bis auf schmale Streifen längs der Randkurven, in denen die Abbildung dann den Charakter einer „Verschraubung" hat. Derartige Abbildungen kommen als Hilfsmittel in den Arbeiten von Herrn Dehn und seinen Schülern vor. — Als ein Beispiel anderer Art nenne ich eine Abbildungsklasse, bei der zwei Hauptgebiete ohne Kern (d. h. $\nu=0$) mit positiven Flächeninhalten (d. h. $\mu>2$) vorkommen, die zusammen den Inhalt der ganzen Fläche ausmachen. Bei den Potenzen der Abbildung treten noch unbegrenzt viele „strichförmige" Hauptgebiete auf, die auf der von den beiden erstgenannten ausgelassenen Restmenge vom Masse null Platz finden.

5. Wenn man somit auch wohl sagen kann, daß die algebraischen Invarianten von Abbildungsklassen, die auf der Anwendung der Homologiegruppe beruhen und daher in der Funktionentheorie zuerst Anwendung gefunden haben, weiter reichen, als man von vornherein erwarten konnte, so möchte ich sie doch als die sekundären, abgeleiteten Invarianten bezeichnen. Die wesentliche Beschreibung einer Abbildungsklasse $\tau\varphi$ geschieht durch diejenigen Abbildungen aus der Gruppe T, für die $\nu+\mu \neq 1$ ist, die also eine Fixpunktklasse mit einem von 0 verschiedenen Index darstellen. Nun haben wir gesehen, daß man nicht nur (wie unter 3) für negativen Index j, sondern durch Hineinbeziehen der Potenzen von τ (unter 4) auch für positives j den einzelnen Fixpunktklassen Haupt- und Kerngebiete auf φ zuweisen kann, in denen sie „sich abspielen" in dem Sinn, daß das betreffende Teilgebiet der Fläche der Fixpunktklasse eindeutig zugeordnet ist; jede negative Fixpunktklasse hat ihr eigenes Gebiet, während mehrere positive Fixpunktklassen zum gleichen Gebiet gehören, wenn sie sich bei Iteration der Abbildung zu einer negativen Fixpunktklasse vereinigen. Dabei

kann dieses Hülfsmittel nicht etwa dadurch versagen, daß man $\nu+\mu=1$ für alle Elemente aus T hat. Es gilt nämlich für eine indikatrixerhaltende Abbildung $\tau\varphi$ einer geschlossenen zweiseitigen Fläche vom Geschlecht $p>1$ der Satz: Für mindestens eine der Abbildungen $\tau, \tau^2, \cdots\cdots, \tau^{2p}$ ist die Indexsumme Ξ von 0 verschieden [13]. *Insbesondere können also die ersten $2p$ Potenzen einer Abbildung nicht sämtlich fixpunktfrei sein.* Es gibt also sicher immer Hauptgebiete. Es ergibt sich die Frage, ob sie die Fläche immer ganz ausfüllen, wie es in allen mir bekannten Beispielen der Fall ist. — Die Abbildungsklassen endlicher Ordnung sind in diesem Zusammenhang dadurch zu charakterisieren, daß es für sie nur ein Hauptgebiet gibt, und dieses die ganze Fläche selbst ist.

Den weitgehendsten Aufschluß über eine Abbildungsklasse erhält man durch die Bestimmung der gegenseitigen Lagerung aller Haupt- und Kerngebiete auf φ, die zu der Abbildungsklasse und ihren Potenzen gehören. Aus dieser invariant zu der Abbildungsklasse gehörigen Figur lassen sich alle bisher bekannten Eigenschaften ablesen. Insbesondere erhält man aus dieser Figur die Aufspaltung der Indexsumme Ξ in ihre einzelnen Summanden. Dadurch erhält man zugleich eine Handhabe für die Konstruktion von Abbildungen möglichst einfacher Struktur in der betreffenden Abbildungsklasse. Ferner dürfte die Entscheidung über die topologische Äquivalenz zweier vorgelegten Abbildungsklassen durch Benutzung eben dieser gestaltlichen Invarianten zu suchen sein, was bisher nur in einigen Fällen durchgeführt ist [14].

Es ergeben sich hier mannigfache ungelöste Fragen. Mein Hauptziel ist es gewesen, Ihnen eine Skizze der Ableitung und der Bedeutung dieser gestaltlichen Invarianten in der Topologie der Flächenabbildungen zu geben.

Literatur:

Eine ausführliche Darstellung der Grundlagen des hier besprochenen Teilgebietes der Topologie der Flächenabbildungen hat der Vortragende in drei Abhandlungen unter dem Titel „Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen" in den Bänden 50, 53 und 58 der Acta Mathematica gegeben. Die Literaturstellen, auf die im Text durch eingeklammerte Zahlen verwiesen wird, sind die folgenden:

[1] L. E. J. Brouwer, Über topologische Involutionen. Amsterdam Proceedings Vol. 21, 1919.

[2] A. Hurwitz, Algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. Math. Annalen 32, 1888.

[3] A. Wiman, Über die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlecht $p=3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen. Bihang till K. svenska Vet.-Akad. Handlingar; Bd. 21, 1895.

[4] W. Scherrer, Zur Theorie der endlichen Gruppen topologischer Abbildungen von geschlossenen Flächen in sich. Comm. Math. Helv. 6, 1929.

[5] J. W. Alexander, Invariant points of a surface transformation of given class. Transact. Amer. Math. Soc. Vol. 25, 1923.

[6] H. HOPF, Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. Math. Zeitschrift Bd. 29, 1929, und: Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 1928.
[7] K. REIDEMEISTER, Automorphismen von Homotopiekettenringen. Math. Annalen 112, 1936.
[8] FRANZ STEIGER, Über die maximalen Ordnungen periodischer topologischer Abbildungen geschlossener Flächen in sich. Comm. Math. Helv. 8, 1935.
[9] J. NIELSEN, Topologischer Beweis eines Satzes von Wiman. Mat. Tidsskr. B 1936.
[10] S. STOILOW, Les propriétés topologiques des fonctions analytiques d'une variable. Annales de l'institut H. Poincaré, t. II, 1932.
[11] B. v. KERÉKJARTÓ, Sur le caractère topologique des représentations conformes. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, t. 198, 1934.
[12] G. A. HEDLUND, On the metrical transitivity of the geodesics on closed surfaces of constant negative curvature. Annals of math., Vol. 35, 1934.
[13] J. NIELSEN, Einige Sätze über topologische Flächenabbildungen. Acta scient. math. Szeged, Tom. 7, 1935.
[14] J. NIELSEN, Topologie des transformations des surfaces. L'enseignement mathématique, 1936.

Zusatz bei der Korrektur:

Eine spezielle Untersuchung der Abbildungen endlicher Ordnung einschließlich der Lösung des Äquivalenzproblems für solche und der Aufstellung einer Normalform für die in der Fundamentalgruppe und in der Homologiegruppe induzierten Automorphismen habe ich inzwischen veröffentlicht in der Abhandlung: Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser XV. 1, 1937.

NEUERE FORTSCHRITTE IN DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN MODULFUNKTIONEN

Von ERICH HECKE, Hamburg.

Von den neueren Erkenntnissen, welche sich in den letzten Jahren in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen ergeben haben, möchte ich hier die folgenden besprechen:

1) Die grundsätzliche Klärung des Zusammenhanges zwischen Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung des bekannten Typus — und automorphen Funktionen (insbesondere elliptischen Modulfunktionen). Ein spezieller Fall ist die bekannte Beziehung zwischen der Riemannschen Zetafunktion und der Thetafunktion $\vartheta(\tau)$. Dabei wird sich eine genaue Übersicht über die Menge aller Dirichlet-Reihen mit fester Funktionalgleichung ergeben, insbesondere ein neuer Beweis des Eindeutigkeitssatzes für $\zeta(s)$, der über den Satz von HAMBURGER hinausgeht, und weiter auch die eindeutige Bestimmung der Zetafunktion imaginär-quadratischer Zahlkörper durch Funktionaleigenschaften.

2) Eine allgemeine Eigenschaft der Entwicklungs-Koeffizienten elliptischer Modulformen, welche zeigt, daß für die nach 1) zugeordneten Dirichlet-Reihen bei geeigneter Normierung stets eine Eulersche Produktentwicklung existiert; dadurch werden auch diese Modulfunktionen mit der Primzahltheorie in Verbindung gebracht. Das Euler-Produkt ist das Äquivalent für eine algebraische Eigenschaft der Modulfunktionen.

3) Die Anwendung der Sätze unter 2) auf Thetareihen ergibt neuartige Tatsachen über die Darstellung von Zahlen durch ganzzahlige, zunächst noch definite quadratische Formen, Sätze, die rein arithmetischen Charakter haben, aber bisher in der Arithmetik noch nicht bewiesen oder auch nur vermutet worden sind. Man kann sie als Verallgemeinerung der bekannten Tatsache auffassen, daß die Klassen binärer quadratischer Formen gegebener Diskriminante eine Abelsche Gruppe bilden, und daß die Darstellung von Zahlen durch ein volles Formensystem analytisch durch die L-Reihen mit Klassencharakteren aus imaginär-quadratischen Körpern beherrscht wird. Es ist hervorzuheben, daß dabei Formen mit beliebiger *grader* Variabelnzahl auftreten.

1. Es seien λ, k, γ gegebene Zahlen, dabei $\lambda, k > 0$. Mit einer analytischen Funktion $\varphi(s)$ bilde man den Ausdruck

$$R(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\,\varphi(s) \tag{1}$$

und suche alle $\varphi(s)$ mit folgenden Eigenschaften:

I) $(s-k)\varphi(s)$ ist eine ganze Funktion von endlichem Geschlecht.

II) $R(s)=\gamma R(k-s)$ (also $\gamma=\pm 1$).

III) $\varphi(s)$ ist in eine spezielle Dirichlet-Reihe entwickelbar,

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

die irgendwo konvergiert.

Eine Funktion mit den Eigenschaften I)—III) heiße

„Von der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$".

Dieses Problem wird durch die Mellin'sche Formel in ein solches aus der Theorie der automorphen Funktionen übergeführt. Man ordne nämlich der Reihe $\varphi(s)$ die Potenzreihe zu:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{2\pi}{\lambda} n x}. \tag{2}$$

Dann ergibt die Formel von Mellin

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma_0)} R(s) x^{-s} ds.$$

Die Integration ist dabei in der s-Ebene längs der Vertikalen $\Re(s)=\sigma_0$ zu erstrecken. Durch Verschiebung des Integrationsweges folgt unter Berücksichtigung von I aus der Funktionalgleichung II)

$$\gamma M a+F(x)=\frac{\gamma}{x^k}\left(\gamma M a+F\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

mit

$$M=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-k}\Gamma(k), \quad a=\text{Residuum von } \varphi(s) \text{ bei } s=k.$$

Daher hat die durch $\varphi(s)$ eindeutig bestimmte Funktion

$$f(\tau)=\gamma M a+F(-i\tau) \tag{3}$$

die Eigenschaften:

$$\frac{f\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k}=\gamma f(\tau). \tag{4}$$

Wegen III) ist

$$\left\{\begin{array}{l} f(\tau+\lambda)=f(\tau) \\ \text{und } f(\tau) \text{ ist regulär, gemessen in } e^{\frac{2\pi i\tau}{\lambda}} \text{ in der oberen Halbebene.} \end{array}\right. \tag{5}$$

Überdies kann wegen der Konvergenz der Dirichlet-Reihe a_n nur wie eine Potenz von n wachsen, also wird $f(\tau)$ bei Annäherung an die reelle Achse auch nur so schwach unendlich, daß bei reellem x, y mit einem konstanten K

$$f(x+iy) = O(y^{-K}) \text{ für } y \rightarrow +0. \tag{6}$$

Umgekehrt zeigt die aus dem Γ-Integral folgende Gleichung

$$R(s) = \int_0^\infty F(x)\, x^{s-1}\, dx,$$

daß jede Funktion $f(\tau)$ mit den Eigenschaften (4), (5), (6) zu einer $\varphi(s)$ von der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$ führt.

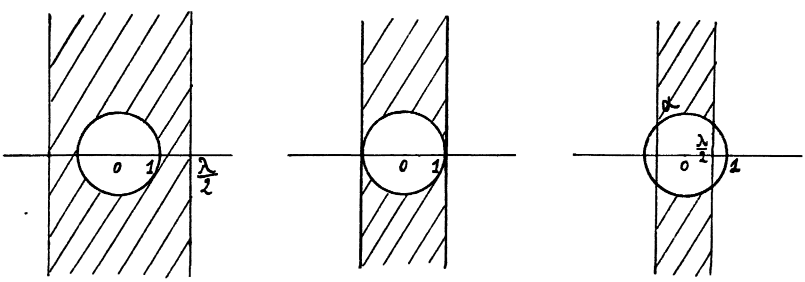
Durch (4), (5) ist das Verhalten von $f(\tau)$ bei derjenigen unendlichen Gruppe linearer Substitutionen der Variabeln τ bestimmt, welche von den beiden Substitutionen

$$\tau' = \tau + \lambda, \qquad \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

erzeugt wird. Diese Gruppe heiße $\mathfrak{G}(\lambda)$. Hat $f(\tau)$ die Invarianz-Eigenschaften (4), (5), so braucht man nur das Verhalten von $f(\tau)$ in dem Teilbereich B der τ-Ebene zu kennen, wo

$$|\tau| \geqq 1, \quad -\frac{\lambda}{2} \leqq \Re(\tau) \leqq \frac{\lambda}{2},$$

weil jeder Wert τ mit einem Punkt aus B nach $\mathfrak{G}(\lambda)$ äquivalent ist. Unter den Bereichen B gibt es nun *drei* verschiedene Typen:



$\lambda > 2$ $\qquad$ $\lambda = 2$ $\qquad$ $\lambda < 2$

1) Ist $\lambda > 2$, so ist $\mathfrak{G}(\lambda)$ vom Schottky-Typus. Der Bereich B ist mehrfach zusammenhängend und erstreckt sich von der oberen in die untere Halbebene. Es gibt zu jeder Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$ *unendlich viele* linear unabhängige Funktionen $\varphi(s)$ bezw. $f(\tau)$, weil durch die Forderungen (4), (5) das Verhalten von $f(\tau)$ in der *unteren* Halbebene garnicht bestimmt wird.

2) Bei $\lambda=2$ ist $\mathfrak{G}(2)$ die wohlbekannte Untergruppe der Modulgruppe vom Index 3, welche mit den Thetafunktionen verknüpft ist. B zerfällt in zwei Stücke, die bei $\tau=\pm 1$ zusammenstoßen. Die Funktionen $f(\tau)$, welche in der oberen Halbebene existieren, haben die reelle Achse zur singulären Linie. Es gibt für jedes $k>0$ Funktionen mit der Signatur $\{2, k, 1\}$, aber die Anzahl der linear unabhängigen ist *endlich* und zwar gleich $\left[\frac{k}{4}\right]+1$; ebenso ist diese Anzahl für die Signatur $\{2, k, -1\}$ gleich $\left[\frac{k-2}{4}\right]+1$, wenn $k\geqq 2$; bei $k<2$ ist die Anzahl gleich 0. Hier bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl $\leqq a$.

Danach ist also $\varphi(s)=\zeta(2s)$ bis auf konstanten Faktor die *einzige Funktion mit der Signatur* $\left\{2, \frac{1}{2}, 1\right\}$, und hier ist sogar noch $\varphi\left(\frac{s}{2}\right)$ eine spezielle Dirichlet-Reihe! Ferner hat die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{-1})$ bekanntlich die Signatur $\{2, 1, 1\}$ und ist nach dem obigen hierdurch ebenfalls bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Für $k=2$ endlich hat man als einzige Lösung

$$\zeta(s)\zeta(s-1)(1-2^{2-2s}). \tag{7}$$

Es erscheint also $\zeta(2s)$ als Element einer Schar von Funktionen der Signaturen $\{2, k, 1\}$ mit $\frac{1}{2}\leqq k\leqq 2$, die stetig von $\zeta(2s)$ bis (7) variieren. Anfangs- und Endelement haben dabei offenbar das gleiche Nullstellenproblem.

3) Ist schließlich $0<\lambda<2$, so muß zunächst wieder $\mathfrak{G}(\lambda)$ in der oberen Halbebene eigentlich diskontinuierlich sein, damit zugehörige Funktionen $f(\tau)$ existieren. Die Bedingung dafür ergibt sich aus der Gestalt des Bereiches B. Den Teil von B in der oberen Halbebene zerlege man durch seine vertikale Mittellinie in zwei spiegelbildlich gleiche Kreisbogendreiecke mit den Winkeln $\left(0, \frac{\pi}{2}, \alpha\right)$, wobei

$$\cos\alpha=\frac{\lambda}{2}, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Aus der Theorie der zugehörigen Dreieckfunktionen ergibt sich, daß $\mathfrak{G}(\lambda)$ dann und nur dann diskontinuierlich ist, wenn α von der Form $\frac{\pi}{q}$ mit einer natürlichen Zahl $q\geqq 3$ ist. Aus den Nullstellenanzahlen von $f(\tau)$ folgt weiter, daß k die Gestalt

$$(9)\qquad k=\frac{4K}{q-2}+1-\gamma,\qquad K=1,2,3,\cdots$$

besitzen muß, wenn zugehörige Funktionen $f(\tau)$ existieren. Die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen mit der Signatur $\left\{2\cos\frac{\pi}{q}, k, \gamma\right\}$ ist dann

$$\left[\frac{K+\frac{\gamma-1}{2}}{q}\right]+1.$$

Demnach gibt es für $0<\lambda<1$ überhaupt keine Funktionen mit der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$.

Für $q=3$ ist $\mathfrak{G}(\lambda)=\mathfrak{G}(1)$ die Modulgruppe.

Für $q=6$ ist $\lambda=\sqrt{3}$. Die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{-3})$ hat nun die Signatur $\{\sqrt{3}, 1, 1\}$ und ist also durch diese Angabe bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Die Zetafunktionen der anderen imaginär quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{D})$ haben die Signaturen $\{|\sqrt{D}|, 1, 1\}$ mit $|D|>4$ und sind also dadurch nach 1) noch keineswegs festgelegt Um hier einen Endlichkeitssatz beweisen zu können, hat man diese Zetareihen durch Kongruenzbedingungen mod $\sqrt{D}$ aufzuspalten und für solche Systeme von Funktionen das ursprüngliche Problem in folgender Art zu modifizieren:

Gegeben sind:

zwei positive Größen λ, k,

eine quadratische Matrix N-ten Grades mit komplexen Elementen

$$\mathfrak{C}=(c_{rl})\qquad r,l=1,\cdots,N$$

eine natürliche Zahl q,

N ganze rationale Zahlen $b_1, b_2, \cdots, b_N$.

Gesucht werden N Funktionen $\varphi_l(s)$ $(l=1,\cdots,N)$ mit den Eigenschaften:

I) $(s-k)\varphi_l(s)$ sind ganze Funktionen von endlichem Geschlecht.

II) Mit $R_l(s)=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s}\Gamma(s)\varphi_l(s)$ ist

$$R_l(k-s)=\sum_{p=1}^{N} c_{lp}R_p(s),$$

III) $\varphi_l(s)$ ist in eine Dirichletsche Reihe entwickelbar von der Gestalt $\sum\limits_n a_n^{(l)} n^{-s}$, wo nur die Zahlen n der Restklasse b_l mod q vorkommen.

Sind die $\varphi_l(s)$ linear unabhängig, so muß offenbar die Substitution $\mathfrak{C}$ die Periode 2 haben, was wir gleich auch noch voraussetzen wollen.

Genau wie oben entspricht den $\varphi_l(s)$ ein System von Potenzreihen

(10) $$f_l(\tau)=M\varrho_l+\sum_n a_n^{(l)} e^{2\pi i\frac{n\tau}{\lambda}}$$

$$\text{mit } \varrho_l=\sum_r c_{lr} a_r$$

$$a_r=\text{Residium von } \varphi_r(s) \text{ bei } s=k.$$

Diese Reihen sind nicht nur periodisch in τ mit der Periode λ, sondern für sie gilt nach III) überdies

(11) $$f_l\left(\tau+\frac{\lambda}{q}\right)=\varepsilon_l f_l(\tau)+M\varrho_l(1-\varepsilon_l). \qquad \left(\varepsilon_l=e^{2\pi i\frac{b_l}{q}}\right)$$

Nach II) ist ferner

(12) $$\frac{f_l\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k}=\sum_{r=1}^{N} c_{lr} f_r(\tau).$$

Beschränken wir uns weiterhin auf den Fall $\lambda=q$, so folgt aus (11), (12) das Verhalten der $f_l(\tau)$ bei beliebigen Modulsubstitutionen. Aus der Existenz der Substitution mit der Periode 3 in der Modulgruppe ergibt sich als erste wichtige Tatsache, daß die Residuen a_l der $\varphi_l(s)$ nicht beliebig sind, sondern es ist

$$\varrho_l(1-\varepsilon_l)=0, \text{ d. h. } \sum_r c_{lr} a_r=0, \text{ wenn } \varepsilon_l \neq 1.$$

Die Substitution (11) ist also homogen, die zugehörige Diagonalmatrix mit den Elementen ε_l heiße $\mathfrak{U}$. Durch Heranziehung der Diskriminante $\Delta(\tau)$ erkennt man dann, daß die Gruppe linearer homogener Substitutionen in N Variabeln, welche erzeugt wird aus

$$\mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{U}_1=\mathfrak{U}\cdot e^{-\frac{\pi i k}{6}},$$

eine Darstellung der unendlichen Modulgruppe ist. Die notwendige Bedingung dafür ist das Bestehen der Gleichung

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{U}_1)^3=1, \text{ also } (\mathfrak{C}\mathfrak{U})^3=e^{\frac{\pi i k}{2}}.$$

Die Elemente der Modulgruppe, denen bei dieser Darstellung die Identität entspricht, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Modulgruppe. Ist dieser von endlichem Index, so kommt die Bestimmung der $f_l(\tau)$ auf die Untersuchung des algebraischen Funktionenkörpers über dem Körper der Modulfunktionen hinaus, welcher durch die Invarianten von $\mathfrak{N}$ definiert ist. In diesem Falle gilt ein *Endlichkeitssatz.* Die genaue Bestimmung der Lösungszahl wird durch die Methoden der algebraischen Gruppentheorie geleistet und ist für den Fall bereits durchgeführt, daß $\mathfrak{N}$ die Hauptkongruenzgruppe der Stufe q ist. Dieser Fall liegt bei den Zetafunktionen der imaginärquadratischen Körper (auch bei denen mit „Größencharakteren") vor; das k ist dabei eine ganze rationale Zahl. Die genannten Funktionen sind so durch ein System von Funktionalgleichungen als Elemente einer linearen Schar mit *endlich vielen Erzeugenden* zu erkennen. Um sie in dieser Schar *eindeutig* festzulegen, ist eine weitere Eigenschaft hinzuzunehmen, welche in den Gedankenkreis unter **2.** gehört.

2. Man betrachte nun die ganzen Modulformen der Dimension $-k$ und der Stufe q, d. h. alle homogenen Funktionen der beiden komplexen Variabeln ω_1, ω_2, welche außer gewissen Regularitätsbedingungen folgende Bedingungen erfüllen:

$$f(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-k} f(\omega_1, \omega_2),$$

$$f\left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\omega_1, \omega_2\right) \equiv f(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2).$$

Dabei soll die Substitution mit der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der homogenen Modulgruppe angehören und mod q der Identität kongruent sein. Diese Gruppe heiße $\Gamma(q)$, also $\Gamma(1)$ die volle Modulgruppe. Dabei sind k, q als natürliche Zahlen vorausgesetzt. Aus $f(\omega_1, \omega_2)$ entsteht die Funktion

$$f(\tau) = \omega_2^k f(\omega_1, \omega_2), \quad \tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

der komplexen Variabeln τ, welche in der oberen Halbebene regulär ist. Sie werde auch als (inhomogen geschriebene) Modulform bezeichnet. Die bekanntesten Beispiele solcher Formen sind die Invarianten g_2, g_3 aus der Theorie der Weierstraß'schen $\wp$-Funktion und weiter die allgemeinen Eisenstein-Reihen

$$G_k(\tau) = \sum_{\substack{m \equiv a_1 \\ n \equiv a_2}(q)}' (m\tau + n)^{-k}$$

(die Summation ist über die ganzen Zahlen m, n der Restklassen a_1, a_2 mod q zu erstrecken). Alle diese Formen f sind in Potenzreihen

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{q}}$$

entwickelbar, die in der oberen Halbebene konvergent sind, z. B. ist

$$G_k(\tau)=a_k+\beta_k\sum_{m\cdot n>0,\ n\equiv a_1(q)} m^{k-1}\cdot\operatorname{sgn} m\cdot\zeta^{a_2 m}e^{2\pi i\frac{mn\tau}{q}}.$$

Hier sind a_k, β_k von τ unabhängige Konstanten,

$$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{q}},\quad \operatorname{sgn} m=\pm 1,\quad m\cdot\operatorname{sgn} m>0.$$

(Für $k=1, 2$ ist eine kleine Modifikation anzubringen). Mit festem k, q gibt es nur endlich viele linear-unabhängige ganze Formen f, bei $q=1$ muß k gerade und $\geqq 4$ sein; man weiß, daß hier alle f als Polynome in G_4, G_6 mit konstanten Koeffizienten darstellbar sind.

Das volle System der Modulformen ist im übrigen nur für einige kleine Werte von k, q bekannt in dem Sinne, daß man die Koeffizienten durch elementare Rechenvorschriften aus n definieren kann. Alle bisher bekannten Reihen entlehnen ihr Bildungsgesetz der Arithmetik, die meisten sind $2k$-fache Theta-Reihen (wie sie nachher bei Gl. (21) beschrieben werden), und viele dieser Reihen haben ein bemerkenswertes Koeffizientengesetz, das einen Zusammenhang mit den *Primzahlen* herstellt. Es läßt sich am einfachsten durch eine Eigenschaft der zu f gehörigen Dirichlet-Reihe aussprechen:

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Dieses φ besitzt nämlich eine Eulersche Produkt-Entwicklung der Gestalt

$$\varphi(s)=\prod_p (1-\lambda_p p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1},$$

p durchläuft die Primzahlen, λ_p ist nur von p, nicht von s abhängig.

Es zeigt sich nun, daß hinter diesen empirisch gefundenen Spezialfällen ein allgemeines Gesetz steckt; *für jedes k, q besitzt das volle System der Dirichlet-Reihen ein solches Euler-Produkt,* allerdings erst *nach Adjunktion gewisser, mit einander vertauschbarer Matrizen,* und zwar ist die Existenz dieses Euler-Produktes das Äquivalent für eine algebraische Eigenschaft der Modulformen.

Der Beweis beruht auf der Einführung eines linearen Operators T_n, welcher jede Modulform vermittels Transformation höherer Ordnung in eine Modulform mit demselben k, q verwandelt. Die Theorie soll hier an dem einfachsten Falle $q=1$ auseinandergesetzt werden:

Durch das klassische Transformationsprinzip wird aus einer Funktion $f(\omega_1, \omega_2)$ der ersten Stufe eine solche der Stufe n erzeugt: Für jede natürliche Zahl n bleibt

$$f\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\omega_1, \omega_2\Big) = f(n\,\omega_1, \omega_2)$$

nicht mehr bei der vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$, sondern nur bei der Untergruppe mit $c \equiv 0 \pmod{n}$, also jedenfalls bei $\Gamma(n)$ invariant. Es gibt nun bekanntlich nur endlich viele verschiedene „Klassen" von Transformationen mit der Determinante n, repräsentiert etwa durch

$$L_h = \begin{pmatrix} a_h & b_h \\ 0 & d_h \end{pmatrix} \text{ mit } a_h \cdot d_h = n,\ d_h > 0,\ b_h \bmod d_h \qquad (h = 1, 2, \cdots)$$

dergestalt, daß die endlich vielen Formen

$$f(L_h(\omega_1, \omega_2)) \qquad (h = 1, 2, \cdots)$$

sich bei beliebigen Modulsubstitutionen nur unter einander permutieren, also die Summe wieder bei $\Gamma(1)$ invariant bleibt. Somit entsteht, wenn wir zur inhomogenen Funktion übergehen, aus einer Form $F(\tau)$ der Stufe 1 wieder eine solche der Stufe 1 durch

$$T_n(F) = n^{k-1} \sum_{ad = n,\, b \bmod d} F\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) d^{-k}. \tag{13}$$

Zwei dieser linearen Operatoren T_n und T_m lassen sich zusammensetzen zu dem mit $T_n \cdot T_m$ bezeichneten Operator, indem auf F erst T_m und auf das Resultat $T_m(F)$ der Operator T_n ausgeübt wird. Ferner verstehen wir für beliebige komplexe Konstanten α, β unter $\alpha T_n + \beta T_m$ den Operator S der F überführt in

$$S(F) = \alpha \cdot T_n(F) + \beta \cdot T_m(F);\ \alpha T_n = T_n \alpha.$$

Durch Iteration dieser Kompositionsvorschriften wird so durch T_n ein *Ring von Operatoren* bestimmt, welcher nun vermöge der Definition der T_n folgende wichtige Eigenschaften hat:

Alle T_n sind vertauschbar, der Ring ist also kommutativ,

$$T(n) \cdot T(m) = \sum_{d \mid n, m} T\left(\frac{n \cdot m}{d^2}\right) d^{k-1},$$

wobei der Deutlichkeit halber $T(n)$ statt T_n steht. Hier durchläuft d die positiven gemeinsamen Teiler von n und m. In dem Ring ist T_1 (der identische Operator) das Einselement.

Nunmehr untersuchen wir den Effekt der Operatoren auf die *ganzen* Modulformen der Dimension $-k$. Die Anzahl linear unabhängiger dieser Formen sei $\varkappa$ und $F^\varrho(\tau)\,(\varrho = 1, 2, \cdots, \varkappa)$ sei ein volles System von erzeugenden Formen. Da durch T_n die Schar in sich übergeht, so gibt es zu n eine Matrix $\lambda(n)$ des Grades $\varkappa$ mit Elementen $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$, welche komplexe Zahlen sind, derart daß

$$(14)\qquad T_n(F^\varrho)=\sum_{\sigma=1}^{\varkappa}\lambda_{\varrho\sigma}(n)\,F^\sigma(\tau). \qquad \varrho=1,\cdots,\varkappa.$$

Bei der Zuordnung von T_n und $\lambda(n)$ entspricht Produkt und Summe der Operatoren auch Produkt und Summe der zugeordneten Matrizen und daher erzeugen die $\lambda(n)$ einen mit dem Operatorenring isomorphen *Ring von Matrizen*, in welchem

$$(15)\qquad \lambda(n)\cdot\lambda(m)=\lambda(m)\cdot\lambda(n)=\sum_{d\mid n,m}\lambda\left(\frac{n\cdot m}{d^2}\right)d^{k-1}.$$

Geht man von den F^ϱ durch eine lineare Substitution $F^*=A(F)$ mit der Matrix A zu einem linear-äquivalenten System über, so erhält man an Stelle von $\lambda(n)$

$$\lambda^*(n)=A\cdot\lambda(n)\cdot A^{-1}.$$

Nun hängen weiter die $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$ mit den Koeffizienten $a^\varrho(N)$ in den Potenzreihen

$$F^\varrho(\tau)=\sum_{N=0}^{\infty}a^\varrho(N)\,e^{2\pi iN\tau}$$

zusammen. Aus (14) folgt durch Vergleichung des Koeffizienten von $e^{2\pi iN\tau}$

$$\sum_{d\mid n,N}a^\varrho\left(\frac{nN}{d^2}\right)d^{k-1}=\sum_{\sigma=1}^{\varkappa}\lambda_{\varrho\sigma}(n)\,a^\sigma(N). \qquad (N=0,1,\cdots;\ \varrho=1,\cdots,\varkappa)$$

Daraus ergibt sich leicht, daß bei geeigneter Definition der Matrix $\lambda(0)$ die $\varkappa^2$ Funktionen

$$f_{\varrho\sigma}(\tau)=\lambda_{\varrho\sigma}(0)+\sum_{N=1}^{\infty}\lambda_{\varrho\sigma}(N)\,e^{2\pi iN\tau}$$

linear äquivalent mit den $\varkappa$ Funktionen F^ϱ sind. Man bilde nun die Funktionsmatrix

$$(16)\qquad B(\tau)=(f_{\varrho\sigma}(\tau))=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(n)\,e^{2\pi in\tau}$$

und ebenso mit den zugehörigen Dirichlet-Reihen

$$\varphi^\varrho(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a^\varrho(n)\,n^{-s};\quad \varphi_{\varrho\sigma}(s)=\sum_{N=1}^{\infty}\lambda_{\varrho\sigma}(N)\,N^{-s}$$

die Matrix

$$(17)\qquad \Phi(s)=(\varphi_{\varrho\sigma}(s))=\sum_{N=1}^{\infty}\lambda(N)\,N^{-s}.$$

Dann folgt aus (15) der *Hauptsatz* der Theorie:

Zu dem System der $\varkappa$ Funktionen $F^{\varrho}(\tau)$ bezw. $\varphi^{\varrho}(s)$ gibt es $\varkappa$ konstante linear unabhängige Matrizen B^{ϱ} des Grades $\varkappa$, welche einen kommutativen Ring vom Range $\varkappa$ konstituieren, und die Matrix

$$\Phi(s)=\sum_{\varrho=1}^{\varkappa}\varphi^{\varrho}(s)\,B^{\varrho}$$

hat die Eulersche Produkt-Entwicklung

$$\Phi(s)=\prod_{p}(E-\lambda(p)\cdot p^{-s}+p^{k-1-2-s}E)^{-1}. \tag{18}$$

E ist dabei die Einheitsmatrix $\lambda(1)$. Die absolute Konvergenz der Reihe und des Produktes in der Halbebene $\Re(s)>k$ ist gesichert durch die Voraussetzung, daß die $F^{\varrho}(\tau)$ *ganze* Modulformen sein sollen.

Durch passende Wahl der Erzeugenden F^{ϱ} in ihrer Schar lassen sich die B^{ϱ} in eine Normalform mit möglichst vielen Nullen bringen. Zunächst kann man bekanntlich vertauschbare Matrixen $\lambda(n)$ mit Hilfe einer Matrix A durch $A\cdot\lambda\cdot A^{-1}$ simultan in Dreieckform bringen, wo unterhalb der Diagonale lauter Nullen stehen. Es mögen $\lambda(n)$, $\Phi(s)$ bereits diese Gestalt haben. Dann gilt also für die Diagonalelemente in Φ, d. h. für die charakteristischen Wurzeln von Φ eine gewöhnliche Eulersche Produktentwicklung

$$\varphi_{\varrho\varrho}(s)=\prod_{p}(1-\lambda_{\varrho\varrho}(p)p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Sind diese Funktionen alle verschieden, so folgt aus der Vertauschbarkeit, daß Φ schon reine Diagonalform hat, und diese $\varkappa$ Elemente sind dann nach dem Obigen sogar linear unabhängig und können als Erzeugende der ganzen Formenschar gewählt werden. In jedem Falle sind aber die Wurzeln der Matrix $B(\tau)$ bis auf konstante Faktoren als diejenigen Modulformen zu kennzeichnen, welche *Eigenfunktionen des Operatoren-Ringes der T_n sind*, d. h. für jedes n

$$T_n(f)=f\cdot\text{konst.}$$

erfüllen. Insbesondere gibt es stets genau eine Eigenfunktion, welche bei $\tau=\infty$ nicht verschwindet. Dies ist die Eisenstein-Reihe der Stufe 1, ihre Dirichlet-Reihe ist

$$\zeta(s)\,\zeta(s-k+1). \qquad (k\geqq 4).$$

Für $k\leqq 10$ und $k=14$ ist $\varkappa=1$, es gibt keine weitere Formen. Für $k=12$ und $k\geqq 16$ dagegen gibt es noch Formen, die bei $\tau=\infty$ verschwinden, und diese Teilschar vom Range $\varkappa-1$ geht offenbar bei allen T_n in sich über, es existiert dann also mindestens noch eine weitere Eigenfunktion aller T_n. Bei $k=12$, $16\cdots 22$ ist $\varkappa-1=1$. Die bei $\tau=\infty$ verschwindenden Modulformen lassen sich hier mittels der Diskriminante

$$\Delta(\tau)=e^{2\pi i\tau}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i n\tau})^{24}$$

in der Gestalt

$$\Delta,\ \Delta G_4,\ \Delta G_6,\ \Delta G_8,\ \Delta G_{10}$$

angeben, und die zugehörigen Dirichlet-Reihen sind also ein Euler-Produkt. Für Δ ist dies von Ramanujan vermutet und darauf 1917 von Herrn Mordell bewiesen worden. In den nächsten Fällen $k=24,\ 26,\ 28,\cdots 34$ läßt sich die Matrix B auch noch auf reine Diagonalform bringen, wie ich mich durch Rechnung überzeugt habe. Bei dieser Reduktion treten numerische Irrationalitäten auf. Zum Beispiel ist bei $k=24$ zur Konstruktion der beiden Euler-Produkte in der aus Δ^2 und ΔG_{12} erzeugten Schar die Adjunktion von $\sqrt{D}$ mit $D=$ Primzahl 144169 notwendig. Diese Funktionen, auch Δ selbst, hängen mit den ganzzahligen definiten quadratischen Formen in $8,\ 16,\ 24\cdots$ Variabeln mit der Determinante 1 zusammen. Die Bedeutung der erwähnten Irrationalitäten für die quadratischen Formen wird sich wohl erst aus der allgemeinen Theorie für beliebige Determinanten erkennen lassen, deren Ansätze und Ziele nachher unter Nr. 3 besprochen werden.

Für Formen einer Stufe $q>1$ ist der Ansatz zu modifizieren. Das volle System ganzer Formen der Stufe q und der Dimension $-k$ erfährt bei beliebigen Modulsubstitutionen eine lineare homogene Substitution, und diese endliche Gruppe ist eine Darstellung der Faktorgruppe $\Gamma(1)/\Gamma(q)$, der binären Modulargruppe mod q, bezeichnet mit $\mathfrak{M}(q)$. Es kommt für die allgemeine Theorie darauf an, diese Darstellung in ihre irreduziblen Bestandteile zu zerlegen und für die entsprechenden Teilsysteme von Formen die Theorie der Operatoren T_n zu entwickeln. Die Darstellungen müssen nach etwas verschiedenen Methoden behandelt werden, je nachdem, wie sie sich bei den Automorphismen der Gruppe $\mathfrak{M}(q)$ verhalten. Grade die, welche bei den Automorphismen nicht in äquivalente Darstellungen übergehen, sind von besonderem Interesse, da hier in gewissen Anzahlen Ausdrücke auftreten, welche vermöge der Dirichlet'schen Formel die Bedeutung von *Klassenzahlen binärer definiter quadratischer Formen* haben.

Bei der Theorie des Operators T_n sind naturgemäß diejenigen n besonders zu behandeln, wo n mit der Stufe q einen Teiler gemein hat. Für einige auch nachher noch zu betrachtende Funktionsklassen wird das Resultat schließlich sehr einfach und soll daher hier formuliert werden: Man betrachte das System aller ganzen Formen der Dimension $-k$, welche bei der Untergruppe $\Gamma_0(q)$ (d. h. der mit $c\equiv 0 \bmod q$) invariant bleiben. Für diese Formen ist der Operator T_n, falls $(n,q)=1$, wie früher zu definieren. Ist dagegen Q eine natürliche Zahl, deren sämtliche Primfaktoren in q aufgehen, so ist zu setzen

$$T_Q(F) = Q^{-1} \sum_{l \bmod Q} F\left(\frac{\tau + l}{Q}\right).$$

Diese T_Q sind unter einander und mit allen T_n, wo $(n, q) = 1$, vertauschbar; und dann definiere man

$$T_{n \cdot Q} = T_n \cdot T_Q = T_Q \cdot T_n.$$

Mit den so für alle natürlichen Zahlen n erklärten Operatoren T_n läßt sich die Theorie wie bei der Stufe 1 entwickeln und man erhält den *Satz:*

Zu dem vollen System von $\varkappa$ ganzen Formen $F^{(1)}, \cdots, F^{(\varkappa)}$ der Dimension $-k$, welche bei $\Gamma_0(q)$ invariant bleiben, gibt es wieder $\varkappa$ linear unabhängige konstante Matrizen B^ϱ des Grades $\varkappa$, welche einen kommutativen Ring vom Range $\varkappa$ konstituieren, mit der Eigenschaft: Man bilde die Dirichlet-Reihen

$$\varphi^{(\varrho)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a^\varrho(n) n^{-s}, \quad \text{wo } F^\varrho(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a^\varrho(n) e^{2\pi i n \tau}$$

und damit die Matrix

$$\Phi(s) = \sum_{\varrho=1}^{\varkappa} \varphi^\varrho(s) B^\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-s}, \text{ mit } \lambda(n) = \sum_{\varrho=1}^{\varkappa} a^\varrho(n) B^\varrho.$$

Diese ist das Euler-Produkt

$$\Phi(s) = \prod_{q_1 | q} (E - \lambda(q_1) q_1^{-s})^{-1} \cdot \prod_{p \nmid q} (E - \lambda(p) p^{-s} + p^{k-1-2s} E)^{-1}. \tag{19}$$

Hier durchläuft q_1 die Primfaktoren der Stufe q, p die übrigen Primzahlen.

Es sei zum Schluß noch erwähnt, daß für die Formen halbzahliger Dimension, wie die einfachen Thetareihen und deren Potenzprodukte, sich eine ähnliche Theorie *nicht* aufbauen läßt. Da nämlich für diese die Zuordnung zu einer Stufe und zu einer Kongruenzgruppe bekanntlich nicht mehr so einfach wie bei ganzzahliger Dimension ist, so kann man die Operatoren T_m nur für Quadratzahlen $m = n^2$ definieren, und man erhält so einen Zusammenhang nur zwischen den Koeffizienten $a(N)$ und $a(Nn^2)$. Eine singuläre Stellung nimmt da die einfache Thetareihe ein, wo die entsprechende Dirichlet-Reihe die Riemannsche Funktion für das Argument $2s$, $\zeta(2s)$ ist. Hier sind ja alle Koeffizienten $a(n) = 0$, wenn n keine Quadratzahl ist. Deshalb sind die erwähnten Zusammenhänge ausreichend, damit ein Euler-Produkt möglich ist.

3. Etwas Neuartiges auch für die Arithmetik ergibt sich, wenn man die entwickelte Theorie auf spezielle Systeme von Modulfunktionen anwendet, welche durch mehrfache Thetareihen definiert werden. Es sei

(20) $$2\,Q(x_1,\cdots,x_{2k})=2\,Q((x))=\sum_{r,s} a_{rs}x_r x_s = a_{11}x_1^2+2\,a_{12}x_1x_2+\cdots$$

eine positiv definite quadratische Form mit der graden Variabelnzahl $2k$. Alle a_{rs} seien ganze, die a_{rr} überdies grade Zahlen. In der Matrix $A=(a_{rs})$ mit der Determinante D seien A_{rs} die Unterdeterminanten $(2k-1)$-ten Grades, und es bedeute K den größten gemeinsamen Teiler aller (stets ganzen) Zahlen A_{rs}, $\frac{A_{rr}}{2}$. Man setze $D/K=q$, dann ist die $2k$-fache Thetareihe

(21) $$\vartheta(\tau,Q)=\sum_{((n))} e^{2\pi i\tau Q(n_1,\cdots,n_{2k})}$$

eine ganze Modulform der Stufe q und der Dimension $-k$. Daneben betrachte man noch die durch einen gewissen Differentiations-Prozeß entstehenden Reihe: Man bilde mit $2k$ komplexen Konstanten $\xi_1,\cdots,\xi_{2k}$, wobei $Q((\xi))=0$, den Ausdruck

$$L(\xi,n)=\sum_{rs} a_{rs}\xi_r n_s$$

und damit für jede Zahl $w=0,1,2,\cdots$ die Funktionen

(22) $$\vartheta_w(\tau,Q)=\sum_{(n)} L(\xi,n)^w e^{2\pi i\tau Q((n))}.$$

Auch diese Reihe — welche bei $w\geqq 1$ vielleicht in τ identisch verschwindet — ist eine ganze Modulform von der Stufe q, aber der Dimension $-(k+w)$.

Für feste Stufe und Dimension bilden diese Reihen in vielen Fällen eine lineare Schar, die durch alle Operatoren T_n in sich übergeht und auf welche daher die Theorie von Nr. 2 angewandt werden kann. Das trifft z. B. für $k=1$ (binäre Form) und alle $w=0,1,2\cdots$ zu. Die zugehörigen Dirichlet-Reihen sind die Zetafunktionen von imaginär-quadratischen Zahlkörpern $K(\sqrt{-D})$, gebildet mit Klassen- und Größencharakteren. Bei allen diesen ist die Zurückführung auf Euler-Produkte aus der Arithmetik schon bekannt, sie wird also hier durch die Theorie der Modulfunktionen aus No. 2 nur von neuem bewiesen. Analoge Tatsachen für $k\geqq 2$ sind aber in der Arithmetik (außer $w=0$ und $Q=$ Summe von Quadraten) bisher noch nicht festgestellt, sie werden hier durch die Mittel der Funktionentheorie aufgedeckt. Ich setze an einem einfachen nicht-trivialen Beispiel den Sachverhalt auseinander:

Es sei $D=q^2$ und $K=q$. In diesem Falle gehören die Reihen $\vartheta_w(\tau,Q)$ nicht nur zur Stufe q, sondern bleiben sogar bei $\Gamma_0(q)$ invariant, sodaß der Schluß von Nr. 2 anwendbar wird. Wir nehmen $k=2$ und q als Primzahl $\equiv 3 \pmod 4$. Solche quaternären quadratischen Formen sind in der

Theorie der verallgemeinerten Quaternionen, besonders durch Herrn Brandt, diskutiert worden.

Nun besteht für eine Primzahl q das volle System der ganzen Modulformen zu $\Gamma_0(q)$ von der Dimension -2 aus einem Teilwert der $\wp$-Funktion (auch als bedingt konvergente Eisenstein-Reihe darstellbar) mit der Entwicklung

$$E_q(\tau) = \frac{q-1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} d_q(n)\, e^{2\pi i n \tau},$$

($d_q(n)$ ist die Summe der positiven zu q primen Teiler von n) — und weiter aus dem System der p_0 Integranden 1. Gattung zu $\Gamma_0(q)$. Das Geschlecht p_0 ist für $q \geqq 3$

$$p_0 = p_0(q) = \frac{q}{12} - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_8}{3} - \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left(\varepsilon = \left(\frac{-1}{q}\right), \; \varepsilon_8 = \left(\frac{-3}{q}\right)\right),$$

und die Zahl $\varkappa$ hat also den Wert $\varkappa = 1 + p_0$.

Sei jetzt $q = 31$. Hier ist $p_0 = 2$ und es gibt also 3 ganze Modulformen zu $\Gamma_0(31)$ mit $k = 2$. Sie lassen sich alle durch die oben definierten vierfachen Thetareihen mit quadratischen Formen der Determinante $D = 31^2$ darstellen. Es gibt 9 verschiedene Klassen dieser Formen $2Q$, darunter 3 Klassen, wo Q die Eins darstellt, nämlich

$$Q_1 = x_1^2 + x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_4^2 + x_1 x_4 + x_2 x_3 .$$
$$Q_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 9x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2 x_3 + x_2 x_4 + 4 x_3 x_4 .$$
$$Q_3 = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + x_1 x_4 + x_2 x_3 .$$

Von den übrigen 6 Klassen sind je zwei uneigentlich äquivalent, liefern also die gleichen Thetareihen; drei Repräsentanten für Q sind

$$B_1 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 2x_1 x_3 + x_1 x_4 - x_2 x_3 + 2 x_2 x_4 .$$
$$B_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + x_1 x_4 - x_2 x_3 .$$
$$B_3 = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_4^2 + 2x_1 x_2 + x_1 x_4 + 3 x_2 x_3 + 2 x_2 x_4 + 4 x_3 x_4 .$$

Die zu Q_1, B_1, B_2 gehörigen Reihen erweisen sich als linear unabhängig, sodaß die drei andern und auch $E_q(\tau)$ sich durch diese linear ausdrücken lassen. Bezeichnen wir der Kürze wegen die Dirichlet-Reihen mit denselben Buchstaben, also

$$Q_1(s) = \sum_{(n)} Q_1(n_1, \cdots, n_4)^{-s} \text{ u. s. w.}$$

so lauten die Relationen

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
Q_2(s) &= \frac{1}{2}Q_1(s) && && +\frac{1}{2}B_2(s)\\
Q_3(s) &= \frac{1}{2}Q_1(s) &&+\frac{1}{2}B_1(s) && \\
B_3(s) &= && \frac{1}{2}B_1(s) &&+\frac{1}{2}B_2(s)
\end{aligned}
$$

$$
(1-q^{1-s})\zeta(s)\zeta(s-1) = \frac{1}{4}Q_1(s) + \frac{1}{2}B_1(s) + \frac{1}{2}B_2(s).
$$

Die letzte Reihe ist die Dirichlet-Reihe zu $E_q(\tau)$. Die Berechnung der nach Nr. 2 aus den drei Thetas von Q_1, B_1, B_2 entstehenden Matrix $\Phi(s)$ ergibt nun das einfache Resultat, daß die Elemente von Φ die 6 Dirichlet-Reihen Q, B selbst, abgesehen von Zahlfaktoren, sind,nämlich

$$
(24)\qquad \Phi(s) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}Q_1, & \frac{1}{2}B_1, & \frac{1}{2}B_2 \\ \frac{1}{4}B_1, & \frac{1}{2}Q_2, & \frac{1}{2}B_3 \\ \frac{1}{4}B_2, & \frac{1}{2}B_3, & \frac{1}{2}Q_3 \end{Bmatrix}(s).
$$

Nach den Sätzen von No. 2 ist diese Matrix ein Euler-Produkt. Sie ist weiter offenbar mit einer symmetrischen Matrix äquivalent. Eine solche läßt sich aber auf Diagonalgestalt transformieren. Somit sind die charakteristischen Wurzeln von Φ drei unabhängige Reihen. Eine davon ist natürlich

$$
\zeta(s)\zeta(s-1)(1-q^{1-s}).
$$

Diese hat bei $s=2$ einen Pol; die beiden andern, ganze Funktionen, sind Wurzeln einer quadratischen Gleichung, zu deren Auflösung die Adjunktion der *Irrationalität* $\sqrt{5}$ erforderlich ist. Die Wurzeln sind

$$
(25)\qquad \psi = \frac{1}{4}Q_1(s) - \frac{1+a}{8}B_1(s) - \frac{1-a}{8}B_2(s), \qquad (a=\pm\sqrt{5}).
$$

und sie haben also ein Euler-Produkt.

Die Gesamtheit dieser Aussagen bedeutet einen neuartigen Satz über die Darstellung ganzer Zahlen durch das System jener 6 quadratischen Formen, d. h. über die Arithmetik der betr. Quaternionen-Bereiche. Die Bedeutung der beiden Funktionen ψ für die Arithmetik ist vorläufig noch unbekannt. Einen Hinweis erhält man von dem Fall binärer Formen ($k=1$)

mit der Diskriminante $-q$. Die den ψ entsprechenden Funktionen sind hier die Zetafunktionen von $K(\sqrt{-q})$ mit Idealklassen-Charakteren, und ihr Produkt, das etwa das Analogon zur Determinante der Matrix Φ ist, ist die *Zetafunktion des Klassenkörpers* von $K(\sqrt{-q})$.

Während in den Entwicklungskoeffizienten der $\vartheta_w(\tau, Q)$ mit $w=0$ nur die *Anzahlen* der Darstellungen von n durch die Form Q auftreten, enthalten die $\vartheta_w(\tau, Q)$ bei $w \geqq 1$ in den Koeffizienten die *Komponenten* der genannten Darstellungen explizite. Schon im binären Falle führt dieser Ansatz zu bekannten, arithmetisch wichtigen Funktionen, nämlich den Zetafunktionen mit Größencharakteren. Auch für alle Formen mit größerer (grader) Variabelnzahl gibt es also den Größencharakteren analoge Funktionen, die wegen des Euler-Produktes einfache multiplikative Eigenschaften haben.

Die Wichtigkeit der oben entwickelten funktionentheoretischen Sätze für die Arithmetik tritt in den angeführten Spezialfällen besonders deutlich hervor. Es entsteht nun das Problem, zunächst einmal von der Arithmetik der quadratischen Formen her diese Sätze allgemein zu begründen. Dabei ist zu bemerken, daß ihre Gültigkeit nicht, wie man nach dem Beispiel vermuten könnte, mit dem Vorhandensein einer Kompositionstheorie der quadratischen Formen zusammenhängt, denn eine solche existiert bekanntlich nur für einige kleine Werte der Variabelnzahl. Überdies habe ich für die Dimension -1 gezeigt, daß es da Modulformen gibt, welche sich nicht durch binäre Thetareihen linear darstellen lassen. Auch für diese Systeme existiert aber die Dirichlet-Matrix mit dem Euler-Produkt.

Eine ausführliche Darstellung der Theorie von Nr. 1 habe ich in den Mathem. Annalen Bd. 112 (1936) (Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funtionalgleichung) gegeben, wo sich auch nähere Literaturangaben finden. Die in Nr. 2 und 3 referierte Theorie, deren Grundlinien ich bereits an anderer Stelle publiziert habe, erscheint in Mathem. Annalen Bd. 114 (1937), die Diskussion einiger mit diesen Funktionen zusammenhängenden Nullstellen-Probleme in den Sitzungsber. der Münchener Akad. d. Wiss. 1937, I.

ÜBER GRIECHISCHE MATHEMATIK UND IHR VERHÄLTNIS ZUR VORGRIECHISCHEN

Von O. Neugebauer, Kopenhagen.

Jede geschichtliche Darstellung ist mehr oder minder gezwungen, ein in Wirklichkeit von einer großen Anzahl von Parametern sehr kompliziert abhängendes Geschehen auf ein bloß *ein*dimensionales Koordinatensystem, die Zeitachse, zu beziehen. Trotzdem werde ich versuchen, im Folgenden mich nicht nur darauf zu beschränken, gewisse Ereignisse aus der Entwicklungsgeschichte der Mathematik gewissen Punkten dieser Zeitachse zuzuordnen, sondern ich werde versuchen, auch die tiefern Zusammenhänge, die den Ablauf dieser Ereignisse bedingt haben, nach Möglichkeit hervortreten zu lassen. Der leitende Gesichtspunkt wird dabei sein, Ihnen zu zeigen, daß wenigstens die Geschichte der antiken Mathematik im Wesentlichen eine Geschichte der *Symbolik* ist. Dabei kann man den Begriff „antik" sehr viel weiter fassen, als es im allgemeinen üblich ist. Die Grenze zwischen der antiken Mathematik und der modernen liegt, wie mir scheint, in der Zeit von Newton und Leibniz, wird also bestimmt durch die Entstehung der Symbolik der Differential- und Integralrechnung und damit der ganzen modernen Analysis und Mechanik, während alles, was vor dieser Zeit liegt, unter einander viel näher verknüpft ist, als mit der Entwicklung der spätern Zeit. Die Mathematik der Renaissance wiederholt eine Reihe von Entwicklungsschritten, die sich schon einmal ganz ähnlich in der vorgriechischen Mathematik abgespielt haben, und ebenso steht Kepler den Gedankengängen und Methoden der antiken Astronomie ungleich näher als den Methoden, die die analytische Mechanik nur wenig später entwickelt hat.

Ich will damit beginnen, Ihnen an einem astronomischen Beispiel auseinander zu setzen, wie ein Problem, das seinem Kern nach ein Problem der Infinitesimalrechnung zu sein scheint, von der antiken (in diesem Falle babylonischen[1]) Astronomie doch gelöst werden konnte unter charakteristischer Umgehung von infinitesimalen Betrachtungen — und es ist typisch, daß ganz ähnliche Gedankengänge sich auch bei Kepler wiederfinden. Die Aufgabe, die ich meine, ist folgende: Die babylonische Astronomie beschreibt periodische Vorgänge in erster Näherung durch „lineare Zackenfunktionen", d. h. durch Differenzenreihen erster Ordnung, die zwischen zwei Extremwerten hin- und herschwanken. Mehrfach ergibt sich aber die Notwendigkeit, einen Funktionsverlauf genauer zu beschreiben als durch lineare Interpolation.

[1] Die babylonische rechnende Astronomie ist relativ jung. Sie gehört dem Intervall von etwa -600 bis 0 an.

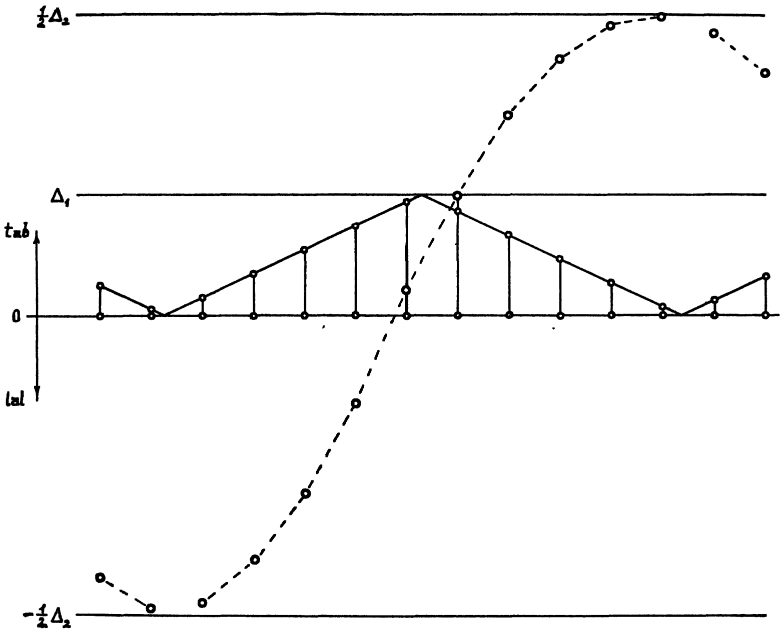


Fig. 1.

Man bildet dann Differenzenreihen zweiter Ordnung durch Summation von solchen erster Ordnung und setzt sie mit geeigneten Vorzeichen (bezeichnet mit „tab“ bzw. „lal“ gemäß Fig. 1) zusammen. Das Problem das sich so ergibt, ist offenbar die Frage, welchen Wert die Extrema der summierten Funktion haben, wenn die der ursprünglichen linearen Zackenfunktion als bekannt (etwa gleich 0 und Δ_1) anzusehen sind (vgl. Fig. 1). Man möchte glauben, daß die Lösung einer solchen Aufgabe die Kräfte der vorgriechischen Mathematik übersteigen müsse, denn entweder scheint man eines Integrationsprozesses zu bedürfen oder doch mindestens algebraischer Hilfsmittel, die gestatten, die Lage der Scheitel von Parabeln zu bestimmen. Die Methode, wie die babylonische Astronomie diese Aufgabe doch löst, ist für sie sehr charakteristisch. Sie beruht nämlich auf dem Gedanken, daß man, wenn man nicht Genauigkeit im Kleinen erreichen kann, so doch im Mittel korrekte Ergebnisse erzielen kann dadurch, daß man Übereinstimmung mit den äußeren Bedingungen wenigstens nach Ablauf großer Perioden erzwingt. In unserm Fall geschieht dies folgendermaßen: Da die Steigung der linearen Zackenfunktion rational ist, kehrt nach einer gewissen (oft sehr großen) Anzahl Π von Intervallen derselbe Zahlenwert wieder. Über eine solche große Periode läßt sich nun leicht die Summe aller Werte der linearen Zackenfunktion bestimmen. Denn es herrscht ja von beiden Enden her

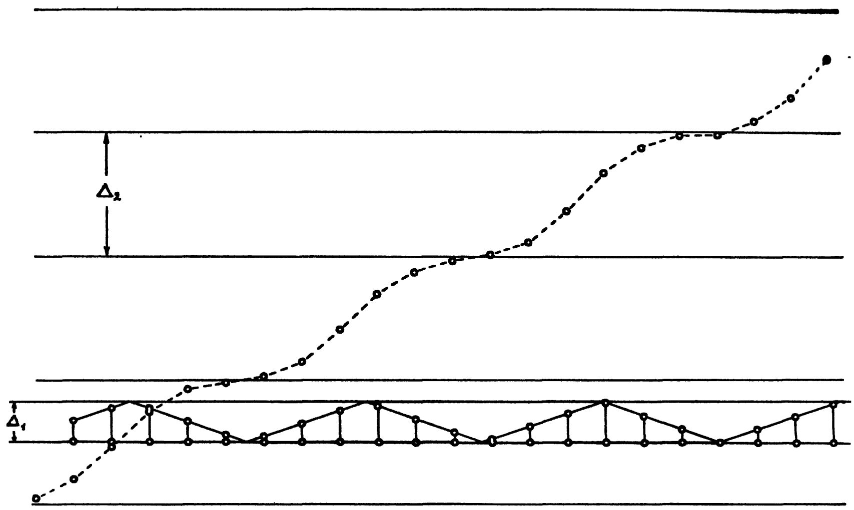


Fig. 2.

volle Symmetrie, so daß sich alle Ordinaten von links und rechts stets zur vollen Intervallhöhe Δ_1 zusammenfassen lassen, so daß man $\frac{\Pi}{2}\Delta_1$ für diese Summe erhält. Andererseits entspricht jeder Schwingung der Länge P_1 der linearen Funktion zwischen zwei benachbarten Nullstellen ein Übergang von einem Extremum der summierten Funktion bis zum nächsten, so daß die Anzahl ihrer vollen Wellen durch $\frac{1}{2}\cdot\frac{\Pi}{P_1}$ gegeben ist. Die Gesamtänderung der summierten Funktion ist aber gleich der Ordinatensumme der linearen Funktion (vgl. Fig. 2[1]), so daß der gesuchte Zusammenhang zwischen der Amplitude Δ_2 der summierten Funktion und der der ursprünglichen Funktion durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\Delta_1 = 2\frac{\Delta_2}{P_1}.$$

Diese hier geschilderten numerischen Methoden, die wir analog auch in der babylonischen Mathematik wiederfinden werden, sind, wie gesagt, für die gesamte babylonische Astronomie charakteristisch. Im vollen Gegensatz zu ihr steht die griechische Astronomie, die sich zwar in allen numerischen Konstantenbestimmungen der babylonischen Resultate bedient, zur Beschreibung der Vorgänge im Ganzen aber die rein numerischen Verfahren

[1] Dabei ist der Übersichtlichkeit halber für die summierte Funktion die Darstellung in Periodenstreifen gewählt.

der Babylonier verlassen hat und an deren Stelle mit kinematischen Modellvorstellungen operiert, nämlich mit den bekannten Exzenter- und Epizykelmodellen. Es scheint vielleicht naheliegend, diesen Kontrast zwischen den numerischen Methoden der Babylonier und den geometrischen Modellen der Griechen dadurch erklären zu wollen, daß man sagt, daß sich uns hier die typisch anschauliche Begabung der Griechen, ihr Sinn für die geometrische Form, offenbare im Gegensatz zu der Denkweise der orientalischen Kulturen. Mir scheint aber, daß eine solche Betrachtungsweise etwa dem Verfahren entspricht, Schwierigkeiten einer physikalischen Theorie dadurch zu lösen, daß man sich einfach auf eine Laune der Schöpfung beruft. Sich mit solchen „Lösungen" zufriedengeben heißt auf das Fundament unserer gesamten wissenschaftlichen Methodik zu verzichten. Alles, was ich im Folgenden vorzubringen habe, soll Ihnen zeigen, daß es komplizierte historische Prozesse gewesen sind, die diese scheinbar so klaren Endergebnisse gezeitigt haben.

Wir beginnen die Diskussion der griechischen Mathematik sogleich mit der Frage, ob es berechtigt ist, ihr einen überwiegend geometrischen Charakter zuzusprechen. Im Rahmen dieser Frage ist es wichtig, sich darüber Klarheit zu verschaffen, ob z. B. in der Tat der Existenzbeweis der Lösung eines Problems verknüpft ist mit der Konstruierbarkeit derselben durch Zirkel und Lineal, wie dies ja oft als gesicherte Tatsache hingestellt wird. Nun ist es leicht, bereits an einem Beispiel zu zeigen, daß wenigstens in der ältern Zeit der griechischen Mathematik ein solches Postulat nicht bestanden haben kann. Ich erinnere zu diesem Zweck nur an die von Archytas gegebene und als solche anerkannte „Lösung" des Problems der Würfelverdopplung. Dieses Problem erweist sich bekanntlich als Verallgemeinerung der Auffindung des geometrischen Mittels x zwischen zwei Größen a und b, indem nämlich die Aufgabe, x so zu bestimmen, daß $a:x=x:b$ erfüllt ist, erweitert wird zu der Aufgabe, zwei Größen x und y so zu bestimmen, daß $a:x=x:y=y:b$ gilt (wobei $b=2a$ dem Fall der „Würfelverdopplung" entspricht). Die Lösung des Archytas beruht nun auf einer naheliegenden Übertragung des im Fall des geometrischen Mittels

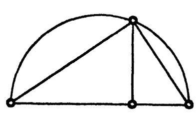


Fig. 3.

trivialen Verfahrens, das durch Fig. 3 gekennzeichnet wird. Unmittelbar aus Ähnlichkeitsbetrachtungen folgt nämlich wie dort, daß in dem in Fig. 4 gekennzeichneten Streckenzug die mit x und y bezeichneten Strecken die

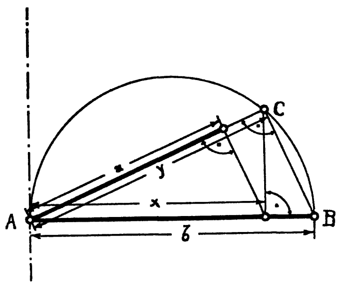


Fig. 4.

Lösungen darstellen, falls die durch einen Bogen hervorgehobenen Winkel wirklich alle Rechte sind. Bei gegebenem a und b $(a<b)$ ist dies natürlich im Allgemeinen nicht der Fall. Um dies aber doch zu erreichen, bedient sich nun Archytas einer kontinuierlichen Abänderung der Figur, dadurch, daß er den Halbkreis über b um die in Fig. 4 punktiert gezeichnete, in A tangierende Achse dreht, so daß der für die Lösung entscheidende Punkt C einerseits auf einem Torus der Öffnung Null liegen muß; andererseits kann man leicht zeigen, daß er auch auf einem Zylinder des Durchmessers b sowie auf einem gewissen Kegel mit der Spitze in A liegen muß. So ergibt sich die Lösung als Schnittpunkt zwischen Raumkurven, die ihrerseits Schnitte zwischen einfachen Rotationsflächen sind. Die Einzelheiten dieses Verfahrens sind im gegenwärtigen Zusammenhang nebensächlich. Worauf es uns hier allein ankommt, ist die Hervorhebung der Tatsache, daß es sich hier um ein als Lösung anerkanntes Verfahren handelt, das gewiß nicht Zirkel-Lineal-konstruierbar ist. Darüber hinaus hat eine sorgfältige Untersuchung dieses ganzen Fragenkreises durch A. Steele[1] gezeigt, daß auch sonst von einer systematischen Einschränkung auf erlaubte Konstruktionsmittel nicht die Rede sein kann. Unterstrichen wird dieser Zusammenhang noch dadurch, daß Archytas selbst mit aller Deutlichkeit betont hat, daß dort, „wo die Geometrie versagt, erst die Rechentechnik („Logistik") Beweise zustande bringt". Wir sehen also, daß mindestens zu Beginn der klassischen Periode der griechischen Mathematik von einem beabsichtigten Vorrang der Geometrie nicht gesprochen werden kann.

Anders scheint dies am Schluß der klassischen Periode, etwa bei Apollonius, zu stehen. Ein Beispiel soll dies wieder erläutern. Ausgehend von dem Schnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel läßt sich durch einfache Überlegungen zeigen, daß die in Fig. 5 als y bezeichnete Größe der Relation genügt

$$y^2 = x\left(\eta - \frac{\eta}{\xi}\, x\right). \tag{1}$$

[1] Bonner Dissertation (bei O. Toeplitz). Siehe das Literaturverzeichnis am Schluß.

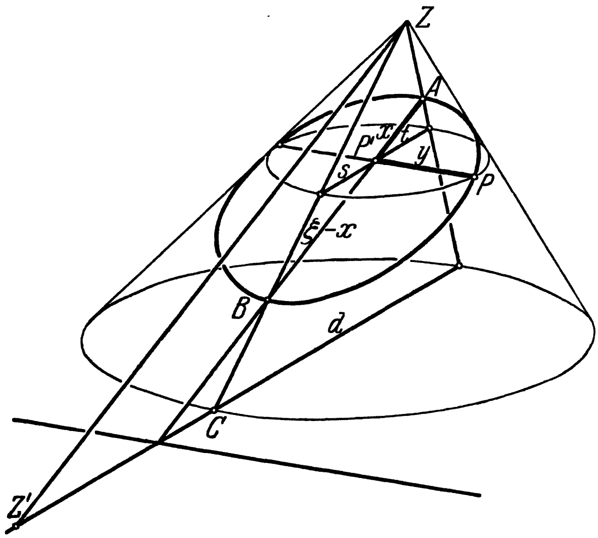


Fig. 5.

Dies folgt einfach daraus, daß ja y auch dem in Fig. 5 eingezeichneten basisparallelen Hilfskreis angehört, so daß $y^2 = st$ ist, und sich die Größen s und t leicht durch die charakteristischen Parameter, die die Lage des Schnittes kennzeichnen, ausdrücken lassen. So entsteht die Gleichung (1), wobei ξ den Durchmesser der Schnittellipse bezeichnet, während η eine andere, leicht geometrisch interpretierbare Konstante bedeutet. Das Wesentliche ist aber, daß diese „Ellipsengleichung" und alle daraus zu ziehenden Folgerungen bei Apollonius nicht in der Form einer Gleichung zwischen algebraischen Symbolen auftritt, sondern als Relationen zwischen Flächeninhalten interpretiert wird. Im Fall der Ellipsengleichung heißt diese Interpretation der Formel (1) folgendermaßen: Das Quadrat über der Strecke y ist gleich einem Rechteck, das an die Strecke η „angelegt" wird, aber nicht ganz die Kante η beansprucht, sondern um ein Stück zurückbleibt, so daß der freigelassene Raum ein Rechteck bildet, dessen Diagonale die vorgeschriebene Steigung $\frac{\eta}{\xi}$ hat (vgl. Fig. 6). Diese Aufgabe der Verwandlung einer vorgelegten Fläche in eine Rechtecksfläche mit einem Defizit vorgeschriebener Form bzw. im hyperbolischen Fall mit vorgeschriebener Art des Überschusses wird als die Aufgabe der „*Flächenanlegung*" bezeichnet.

Wie gesagt, ist dies die Form, mit der bei Apollonius die Lehre von den Kegelschnitten behandelt wird. Er hat damit die Behandlung der zunächst räumlich definierten Kurven reduziert auf Beziehungen zwischen Arealen der Ebene. Historisch wichtig und äußerst merkwürdig ist aber

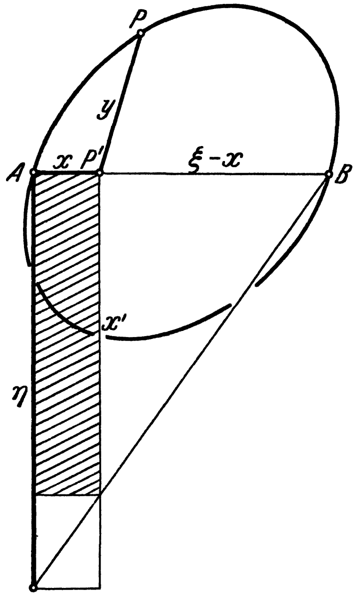


Fig. 6.

dabei der Umstand, daß die Aufgabe der Flächenanlegung nicht etwa, wie es zunächst scheinen könnte, etwas ist, was aus der Theorie der Kegelschnitte in der oben angegebenen Weise entstanden ist, sondern daß diese Aufgabe als solche viel älter ist, älter als die Theorie der Kegelschnitte überhaupt. Sie bildet nämlich das Kernstück großer Abschnitte bei Euklid. Vor allem ZEUTHEN hat erkannt,[1] daß es sich hier um die geometrische Form algebraischer Methoden handelt, nämlich um die Behandlung der quadratischen Gleichungen. Er hat für diesen ganzen Fragenkreis den treffenden Ausdruck *„geometrische Algebra"* geprägt. So stehen wir also vor der eigentümlichen Tatsache, daß es einerseits eine Reihe von Erscheinungen gibt, die zeigen, daß in der frühgriechischen Mathematik keineswegs eine klare Beschränkung auf eine rein geometrische Formulierung der Probleme existiert, andererseits aber rein algebraische Fragen in einer so merkwürdigen geometrischen Einkleidung erscheinen, daß es zunächst ganz unverständlich erscheint, wie gerade diese Einkleidung an der Spitze der Entwicklung stehen soll.

Die Erklärung für diesen merkwürdig komplexen Charakter der griechischen Mathematik liegt einfach darin, daß die „griechische" Mathematik von den Anfängen mathematischen Denkens ungefähr ebensoweit entfernt ist,

[1] Vgl. das Literaturverzeichnis.

wie wir von der griechischen. Die Träger dieser vorgriechischen Mathematik sind die Kulturen Ägyptens und Mesopotamiens. Ich werde im Folgenden hauptsächlich über die letztere zu sprechen haben. Die Gründe für diese ungleiche Behandlungsweise werde ich noch ganz am Schluß streifen.

Die Verknüpfung zwischen griechischer und babylonischer Wissenschaft liegt vor allem auf astronomischem Gebiet ganz klar zutage. Ptolemäus zitiert im Almagest immer wieder „chaldäisches" Beobachtungsmaterial und auch bei andern griechischen Astronomen, so vor allem bei Geminus, findet sich eine Reihe von detaillierten Angaben über die Methoden der babylonischen Astronomie. Die Erschließung der astronomischen Keilschrifttexte, die man vor allem den hervorragenden Arbeiten von F. X. KUGLER verdankt,[1] haben die griechischen Angaben nicht nur in allen Einzelheiten bestätigt, sondern die Nähe der Berührung aufs Deutlichste und in zahlreichen Einzelheiten erwiesen. Auf mathematischem Gebiet ist der Kontakt zweifellos kein geringerer, nur haben wir keine so direkten Zeugnisse wie bei der Astronomie, da ja nicht wie bei dieser die Notwendigkeit expliziter Quellenangaben vorlag. Aber der Begriff „griechische" Mathematik ist ja keineswegs etwas Einheitliches. Was man im Allgemeinen darunter versteht, ist ja nur ihr höchst entwickelter Zweig, wie er uns aus den Werken von Euklid, Archimedes und Apollonius entgegentritt. Einen ganz andern Typus hat aber beispielsweise der Heronisch—Diophantische Schriftenkreis, der seinem ganzen Typus nach die engsten Beziehungen zur altorientalischen Mathematik aufweist. Es kann heute nicht mehr bezweifelt werden, daß ein großer Teil des materiellen Inhaltes dieser Schriften aus vorgriechischen, d. h. in erster Linie aus babylonischen Quellen stammt. Eine Fülle von elementargeometrischen Kenntnissen, Flächen- und Volumbestimmungen und dergleichen findet sich in allen Texten während der anderthalb Jahrtausende babylonischer Mathematik. Hier ist also der Anschluß praktisch genau so eng und genau so evident wie bei der Astronomie. Das eigentlich Überraschende an der babylonischen Mathematik ist aber die Tatsache ihres erstaunlich algebraischen Charakters. Ähnlich wie bei Heron tritt nämlich schon dort eine vollständige Gleichgültigkeit gegen die geometrische Bedeutung der Größen, mit denen operiert wird, zutage. Strecken werden zu Flächen addiert, Flächen multipliziert u. s. w., d. h., es handelt sich um Aufgaben, bei denen nur das wesentlich ist, was wir heute als algebraische Relationen bezeichnen. So gibt es Auflösungen von linearen Gleichungen mit zahlreichen Unbekannten, ferner Probleme 2-ten, 4-ten und 6-ten Grades (sämtlich quadratisch lösbar), Gleichungen 3-ten Grades, Zinzeszinsaufgaben

[1] Vgl. das Literaturverzeichnis.

und manches Ähnliche mehr. Ein Kernstück dieser Algebra ist offenbar die Lehre von den quadratischen Gleichungen, die ganz in unsererer Weise durch quadratische Ergänzung gelöst werden. An die eingangs erwähnten Methoden knüpft die Tatsache an, daß auch rein numerische Methoden eine große Rolle zu spielen scheinen. So haben wir eigene Tabellen z. B. für die Zahlen n^3+n^2, womit man spezielle kubische Geichungen lösen kann, für a^n und anderes mehr. Die Mehrzahl der eben erwähnten algebraischen Aufgaben ist an numerischen Beispielen durchgerechnet. WASCHOW hat aber neuerdings einen Text gefunden,[1] der auch den längst erwarteten Beweis erbringt, daß es Aufgaben gibt, die in voller Allgemeinheit durchgerechnet sind, d. h. ohne jede Benutzung spezieller Zahlen, nur unter Kombination der für die einzelnen Größen und Operationen gebräuchlichen Symbole. Besonders deutlich tritt der algebraische Charakter der babylonischen Mathematik in einer als „Serientexte" bezeichneten Klasse von Tontafeln hervor. Es handelt sich dort um viele Hunderte von systematisch geordneten Aufgaben, die vom einfachen zum komplizierten fortschreitend angeordnet sind. Dieses Anordnungsprinzip führt übrigens auf Grund eines schematischen Variierens der Angaben der Beispiele unter anderm auch dazu, daß man sich nicht scheut, die rechte Seite einer linearen Verknüpfung zwischen den Unbekannten als „negative" Zahlen zu bezeichnen, eben mit jenem Symbol „lal", das uns schon bei den astronomischen Texten (vgl. Fig. 1) begegnet war. Man kann aus dem Anordnungsprinzip der Aufgaben viel über die zugrundeliegende Theorie entnehmen. Ein Hauptergebnis ist das, daß man bei den quadratischen Gleichungen für zwei Unbekannte ein komplizierteres System auf eine „Normalform" zu reduzieren suchte, nämlich auf Produkt und Summe oder Differenz der Unbekannten als gegebene Größen. Daraus läßt sich dann unmittelbar die übliche Auflösungsformel gewinnen.

Die Existenz einer solchen Theorie der quadratischen Gleichungen gibt nun auch den Schlüssel für das Verständnis der oben erwähnten eigentümlichen Form der „geometrischen Algebra", insbesondere der „Flächenanlegung". Das Problem der Flächenanlegung ist nämlich nichts anderes als die geometrische Einkleidung jener Normalform. Die gegebene Fläche ist durch das Produkt der Unbekannten repräsentiert und die Strecke, an die angelegt werden soll, entspricht der Summe der Unbekannten, wobei ein Quadrat freibleibt (vgl. Fig. 7). Auch das Auflösungsverfahren bei Euklid ist nichts anderes als eine Übertragung des babylonischen Verfahrens ins Geometrische.[2]

---

[1] Er wird im Rahmen eines in Vorbreitung befindlichen Ergänzungsheftes meiner „Mathematischen Keilschrift-Texte" publiziert werden (BM 34568).

[2] Für die Einzelheiten vgl. meine Arbeit „Zur geometrischen Algebra" (s. Literaturverzeichnis).

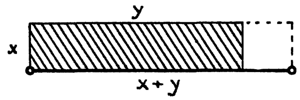


Fig. 7.

Materiell erweist sich somit die geometrische Algebra als die direkte Fortsetzung der vorgriechischen Algebra, nur mit einem charakteristischen Wechsel der Symbolik. An Stelle einer mit gewissen konventionellen Symbolen operierenden Algebra (über die Art dieser Symbole wird gleich noch zu sprechen sein) tritt die rein geometrische Ausdrucksweise. Neu ist aber nur die Form, nicht der Inhalt.

Die Gründe für die Geometrisierung großer Teile der griechischen Mathematik sind an sich seit langem bekannt. Es sind im Wesentlichen zwei Strömungen, die sich hier begegnen. Einerseits die Schwierigkeiten, die sich aus den gegen den Kontinuumsbegriff gerichteten Paradoxieen ergaben (was z. B. für jene Art Stetigkeitsschlüsse, wie wir sie in der kinematischen Methode des Archytas vorfanden, sehr wesentlich war), andererseits die Musiktheorie, deren Rolle für die Entwicklung der Proportionenlehre und die Entdeckung der Irrationalitäten wohl P. Tannery als erster erkannt hat.[1] Um nur auf den letzten Punkt kurz hinzuweisen, sei daran erinnert, daß ungefähr in der Epoche des Archytas der Zusammenhang der Klänge mit einfachen Zahlenverhältnissen entdeckt worden ist, samt dem zugehörigen Kompositionsgesetz, das angibt, daß diese Verhältniszahlen multiplikativ zusammen zu fassen sind. So erscheint beispielsweise die Entstehung der Oktav aus Quart und Quint als $\frac{2}{1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$. Die Frage, ob sich die Oktav nicht auch in zwei gleiche Töne zerlegen lasse, führt dann unmittelbar zu der Frage, ob es möglich sei, $\frac{2}{1}$ als $\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$ darzustellen. Und dies ergibt sogleich den bekannten Widerspruch, daß dann p und q „gleichzeitig gerade und ungerade" sein müßten. Von dieser arithmetischen Einsicht aus ergibt sich schließlich wegen des Pythagoreischen Lehrsatzes (der seinerseits schon seit einem Jahrtausend in den keilschriftlichen Texten immer wieder vorkommt) die Tatsache der Inkommensurabilität von Quadratdiagonale und Quadratseite, kurz alle Erkenntnisse, die zeigen, daß der Bereich der geometrischen Größen allgemeiner ist als der der rationalen Zahlen. Eine Konsequenz dieses Sachverhaltes ist es dann, daß man daran ging, alles, was bisher aus dem Bereich der elementaren Arithmetik und Algebra bekannt war, in eine geometrische und gleichzeitig

[1] Vgl. die im Literaturverzeichnis genannten Arbeiten von Tannery und E. Frank.

vor dem philosophischen Angriff möglichst gesicherte Form zu umschreiben. Die eigentliche Leistung der Griechen liegt dann in dem verfeinerten Ausbau und der logischen Analyse dieser neuen mathematischen Sprache.

Wir haben gesehen, daß die entscheidenden Ereignisse in der Geschichte der griechischen Mathematik erst verständlich werden, wenn man sie in ihrer Relation zu einer langen Vorgeschichte betrachtet, die das Material bereitgestellt hat, dessen Ordnung und Klärung die Griechen unter dem neuen Gesichtspunkt der größeren Allgemeinheit des geometrischen Bildes vorgenommen haben. Aber auch in der griechischen Mathematik ist die Geometrie in gewisser Hinsicht immer nur die um ihrer Strenge und Allgemeinheit willen bevorzugte Ausdrucksform für algebraische oder analytische Prozesse geblieben und nicht so sehr um ihrer selbst willen als gesonderte Disziplin entwickelt worden. Erst in ihrer allerletzten Periode finden sich Ansätze zu projektiven oder synthetischen Betrachtungsweisen, die an sich eine sehr viel weitere Entwicklung gestattet hätten, wie die Geschichte des 19-ten Jahrhunderts lehrt. Die Hauptrichtung der Entwicklung war aber während der ganzen Zeit bedingt durch die von den Anfängen her bestimmte Richtung nach der Schaffung einer verallgemeinerten Symbolik zum Ausdruck von Beziehungen, deren Ursprung eigentlich ein anderer war. Dies zeigt sich noch deutlich in dem eigentümlichen Algorithmus von Relationen zwischen Flächengrößen in der Theorie der Kegelschnitte und ebenso bei den Archimedischen Infinitesimalmethoden.

In der gesamten vorgriechischen Mathematik liegt überhaupt kein Anlaß zu einer Bevorzugung des Geometrischen vor. Überall zeigt sich da, daß die Geometrie nur eines der Anwendungsgebiete der Rechentechnik ist, und daß eine fruchtbare Entwicklung erst dort einsetzt, wo die arithmetisch-algebraischen Verfahren weit genug ausgebildet sind. Hier ist der Punkt, wo der Vergleich zwischen der ägyptischen und der babylonischen Mathematik besonders lehrreich ist. In beiden Kulturen können wir heute aus sprachlichem und archäologischem Material die Entstehung der Zahlzeichen, der Zahlworte und der allmählich sich ausbildenden Rechentechnik verfolgen. Die Anfänge der Rechentechnik sind sowohl in Ägypten wie in Babylonien rein additiv,[1] in Ägypten noch bis in die späteste Zeit erhalten in der ursprünglichsten Form eines fast rein dyadischen Rechenalgorithmus. Dieser elementarste Algorithmus erstreckt sich dabei keineswegs auf einen homogenen Bereich von Zahlen, sondern es ist nur eine kleine Gruppe

[1] So ist beispielsweise das Keilschriftzeichen für das „positive Vorzeichen“ „tab“, das wir oben erwähnt haben, und dessen Bedeutung „hinzufügen“, „addieren“ ist, dann auch „multiplizieren“ bedeutet, ursprünglich das Bild des „Verdoppelns“, ausgedrückt durch zwei parallele Striche.

von ganzen Zahlen und Brüchen, mit denen ernstlich gerechnet wird. Die merkwürdige ägyptische Bruchrechnung, die noch die griechische und römische Logistik im Wesentlichen beibehalten hat, läßt sich verstehen als ein eigentümliches Reduktionsverfahren des allmählich sich ausdehnenden Zahlbereichs auf jenen ältesten Kern unter ausschließlicher Verwendung einer dyadischen Methodik. In Babylonien ist in einer sehr frühen Phase dieser Entwicklungsprozess abgebrochen worden. Das Wesentliche dabei ist die Entstehung einer positionellen Ziffernschreibung, das heißt einer Ausdrucksweise der Zahlen, die nur mit einer geringen Anzahl immer wiederholter Symbole auskommt. Auch diese Symbolik ist natürlich keine beabsichtigte Konstruktion, sondern erwachsen aus komplizierten Prozessen der Ordnung der sich allmählich entwickelnden Maßsysteme, Vorgänge, deren Einzelheiten ich hier nicht auseinandersetzen kann.[1] Für die weitere Entwicklung ist aber die Existenz eines derartigen positionellen Rechenverfahrens von einschneidender Bedeutung gewesen. Ohne dieses hätte die babylonische Mathematik nie jenen Grad der Entwicklung erreichen können, der sie so deutlich vor der ägyptischen Mathematik mit ihrem schwerfälligen und komplizierten Rechenmechanismus auszeichnet. So stand der babylonischen Mathematik von ihrer frühesten Zeit an der ganze Bereich der Rationalzahlen wirklich zur Verfügung. Aus dieser Rechentechnik hat ein Jahrtausend später nicht nur die babylonische Astronomie den größten Nutzen gezogen, sondern auch die daran anschließende griechische und arabisch-mittelalterliche.[2]

Für die weitere Entwicklung der babylonischen Mathematik ist aber noch ein zweites Moment von mindestens ebenso großer Bedeutung, nämlich die Entstehung einer in ihrem Effekt „algebraisch" zu nennenden Symbolik. Auch hier handelt es sich keineswegs um eine bewußte Erfindung, sondern um das Resultat geschichtlicher Phänomene ganz anderer Herkunft. Hier greift nämlich die Geschichte der Keilschrift ein. Sie wurde als Bilderschrift von den ersten Bewohnern Mesopotamiens, den Sumerern, erfunden.[3] Dem Charakter einer Bilderschrift entsprechend ist dadurch eine Abbildung

---

[1] Vgl. diesbezüglich meine im Literaturverzeichnis genannten „Vorlesungen".

[2] Es scheint mir höchst wahrscheinlich, daß die Wirkung dieses Positionssystems noch sehr viel weiter geht, nämlich daß die Idee der Position eben auf dem Umweg über die Astronomie von Griechenland nach Indien gekommen ist und dort den Anstoß zur Erfindung unseres dezimalen Positionssystems gegeben hat. Vgl. dazu meine Bemerkungen in meiner Rezension des Buches von Datta und Singh „History of Hindu Mathematics" in „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik" Abt. B 3, S. 263 ff.

[3] Wie weit der Begriff „sumerisch" wirklich etwas Einheitliches umfaßt, wird gegenwärtig viel diskutiert. Für unsere Zwecke genügt die ungefähre Datierung der Schriftentstehung in die Mitte des vierten Jahrtausends, während die ältesten eigentlich mathematischen Texte etwa der Zeit um 1900 angehören.

von Begriffen auf Einzelzeichen hergestellt. Im Lauf des dritten vorchristlichen Jahrtausends ist diese ältere Bevölkerungsschicht allmählich ersetzt worden durch die semitischen Akkader, die die Keilschrift übernommen haben und in doppelter Weise für die Schreibung ihrer Sprache verwendet haben. Einmal, indem sie die Einzelzeichen nach wie vor als Symbole für Begriffe benutzten, dann aber, indem sie auch die Zuordnung dieser Zeichen zu den sumerischen Worten rein als Lautsymbole benutzten und so dieselbe Zeichenmenge auch zu einem silbenschriftlichen Ausdruck ihrer eigenen Sprache verwenden konnten. Dieses Wechselspiel zwischen Silbenschrift und Symbolschrift ist für die Entwicklung der Mathematik entscheidend geworden. Denn immer mehr hat man die Möglichkeit erkannt, diese Symbole zum Ausdruck mathematischer Operationen zu benutzen und so eine reine Formelschrift zu entwickeln, die sich unmittelbar Zeichen für Zeichen in unsere moderne algebraische Formelschrift übersetzen läßt.

Auch diese Entwicklung wäre nicht möglich gewesen, wenn nicht tiefere sprachliche Phänomene dahinterständen. Die eben skizzierte doppelte Verwendungsmöglichkeit der Keilschriftzeichen beruht nämlich ganz wesentlich auf einem grundsätzlichen Unterschied der Sprachtypen des Sumerischen und des Akkadischen, der sich unter anderm darin ausspricht, daß das Sumerische im Gegensatz zum Akkadischen ein Sprache ist, die im Wesentlichen mit einsilbigen und vokalkonstanten Elementen operiert. Nur dadurch ist ja die Möglichkeit gegeben, die sumerischen Wortzeichen gleichzeitig als Silbenzeichen mit bestimmtem Lautwert zum Aufbau einer Silbenschrift zu verwenden. So sehen wir, daß es in letzter Linie sprachgeschichtliche Phänomene sind, die den eigentümlichen Charakter der babylonischen Mathematik bestimmt haben. Die Beziehung zu einem der interessantesten Zweige der modernen Philologie, der vergleichenden Sprachwissenschaft, ist aber nicht die einzige, die die älteste Geschichte der Mathematik mit der Philologie verknüpft. Auch die Analyse der Entstehungsgeschichte der Zahlbegriffe überhaupt, z. B. der wechselnden Rolle zwischen Ordinalzahlbegriff und Kardinalzahlbegriff, führt, wie vor allem SETHE's bahnbrechende Untersuchungen gelehrt haben, hinüber zu rein sprachgeschichtlichen Untersuchungen. Mir scheint, daß dies mehr ist als eine bloß zufällige Verkettung historischer Ereignisse. Ist doch die Sprache nur die älteste Form einer Symbolik, aus der sich in einer wechselvollen Geschichte einer stets verfeinerten Analyse eine höchste Form menschlicher Symbolik entwickelt hat: die Mathematik.

Literaturverzeichnis.

FRANK, E., Plato und die sogenannten Pythagoreer. Halle 1923.

KUGLER, F. X., Die babylonische Mondrechnung. Freiburg 1900.

— Sternkunde und Sterndienst in Babel. Münster 1907 ff.

NEUGEBAUER, O., Mathematische Keilschrift-Texte. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. A 3, Berlin 1935, 1937.

— Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. Bd. 1: Vorgriechische Mathematik. Berlin 1934.

— Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung. Berlin 1926.

— Zur geometrischen Algebra. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B 3, S. 245 ff. 1936.

SETHE, K., Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern. Straßburg 1916.

STEELE, A. D., Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B 3, S. 287 ff. 1936.

TANNERY, P., Mémoires Scientifiques III, S. 68 ff.: Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure. 1902.

ZEUTHEN, H. G., Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Kopenhagen 1886.

Korrekturzusatz.

Für die mathematischen Methoden der babylonischen Astronomie vgl. jetzt noch:

NEUGEBAUER, O., Untersuchungen zur antiken Astronomie II. Datierung und Rekonstruktion von Texten des Systems II der Mondtheorie. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B 4, S. 34 ff, 1937.

— Untersuchungen zur antiken Astronomie III. Die babylonische Theorie der Breitenbewegung des Mondes. Erscheint in Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B 4.

Für den algebraischen Charakter der Serientexte und ihre Beziehungen zur griechischen Mathematik siehe

VOGEL, K., Bemerkungen zum Nachleben der babylonischen Mathematik. Diese Kongreßberichte Bd. 2, S. 277 f., 1937.

PROBLEME DER GEOMETRISCHEN OPTIK

Von C. W. Oseen, Stockholm.

Hochgeehrte Anwesende! Welche Bedeutung die geometrische Optik sowohl für die Mathematik wie für die Physik, die experimentelle so wie die theoretische, gehabt hat, das ist Ihnen allen wohlbekannt. Wenn es notwendig wäre einen Zweifelnden davon zu überzeugen, so würde es genügen einen Namen zu nennen, den Namen William Rowan Hamilton. Durch seine geometrisch-optische Arbeiten wurde Hamilton zu der Entdeckung der jetzt so genannten Berührungstransformationen geführt. Andererseits hat Hamilton durch die nach ihm benannten Gleichungen eine Brücke zwischen der Newtonschen Mechanik und der Optik geschlagen. Auf dieser Brücke fand Schrödinger in unseren Tagen den Grundgedanken der Wellenmechanik.

Aber die geometrische Optik hat nicht nur für die Mathematik und für die Physik Bedeutung. Es gibt noch eine Wissenschaft, die mit den Lichtstrahlen arbeitet, die Ophthalmologie. Wir haben in Schweden einen hervorragenden Vertreter dieser Wissenschaft gehabt. Ich glaube, daß viele von Ihnen den Namen Allvar Gullstrand gehört haben. Ich war während achtzehn Jahre sein Kollege an der Universität in Uppsala. Wenn ich hier von geometrisch-optischen Problemen spreche, so ist der Grund dazu meine Beschäftigung mit dem Lebenswerk von Gullstrand.

Allvar Gullstrand war seinem Beruf und seiner Ausbildung nach ein Arzt. Seiner Natur nach war er ein Mathematiker und ein Erfinder. Seine mathematischen Erkenntnisse hat er selbst erworben. Er war als Mathematiker Autodidakt.

Wenn jemand in unseren Tagen auf eigene Faust Mathematik treibt, so läuft er offenbar das Risiko auf langen Dornenpfäden Ergebnisse suchen zu müssen, die ohne alle Mühe erreichbar sind. Ich will durch ein Beispiel zeigen, daß Gullstrand dieser Gefahr nicht entgangen ist. Einer seiner bekanntesten Sätze sagt aus, daß die optische Abbildung nicht punktweise zu Stande kommt, daß es dagegen auf einem beliebigen Flächenelement des Objektraumes zwei einparametrige Scharen von abbildbaren Kurven gibt, denen im Bildraum zwei auf verschiedenen Flächenelementen gelegenen Bildkurven entsprechen. Bei Gullstrand ist dieser Satz ein Korollar einer s.g. Fundamentalgleichung, zu deren Ableitung er lange und mühsame Rechnungen bedarf. Der wesentliche Inhalt des Satzes läßt sich anschaulich ableiten. Ein Punkt des Objektraumes und die entsprechende Brennfläche im Bildraum bestimmen eine Berührungstransformation zwischen dem Objektraum und Bildraum. Einem Punkte P eines Flächenelementes F des Objektraumes kann man auf einer entsprechenden Fläche des Bildraums die Kurve, C, zuordnen, in welcher diese Fläche von derjenigen Brennfläche geschnitten wird, die dem Punkt P entspricht. Den verschiedenen Richtungen durch P entsprechen die verschieden Linienelemente von C. Wenn man jetzt dafür sorgt, daß nur ein Element der Bildfläche beleuchtet wird, so heißt das, daß man unter den verschiedenen Richtungen durch P eine Wahl getroffen hat. Dem Punkte P ist dadurch eine bestimmte Richtung auf F zugeordnet. Wenn es gelingt die Blenden so anzuordnen, daß dies für jeden Punkt des Flächenelementes F stattfindet, hat man das geometrisch-optisch mögliche in bezug auf die Abbildung geleistet. Dies war jedenfalls die Anschauung von Gullstrand. Die Abbildung der beiden Flächenelemente auf einander kommt hier nicht punktweise zu Stande. Sie ist eine Abbildung gewisser abbildbaren Linien auf F auf die entsprechenden Bildlinien des entsprechenden Flächen-Elementes im Bildraum. Die zwei Scharen, von denen Gullstrand spricht, rühren von den zwei Mänteln der Brennfläche her.

Es ist erlaubt zu hoffen, daß man in dem großen Werk von Gullstrand viele Sätze finden wird, für welche eine anschauliche Ableitung möglich ist. Es ist aber sicher, daß die Vereinfachung seines Werkes im großen, die notwendig ist, wenn dieses Werk nicht in Vergessung geraten wird, darin bestehen muß, daß man seine analytische Methoden durch andere, zweckmäßigere, aber immer noch analytische Methoden ersetzt. Selbst schätzte Gullstrand keine andere Geometrie als die Analytische.

Ich wende mich nach dieser Einleitung zu dem Problem der geometrischen Optik, dem die erste Periode in Gullstrands wissenschaftlichen Leben (1890—1904) gewidmet war. Man kann das Problem so aussprechen: welche verschiedene Arten von Lichtbündeln sind nach den Gesetzen der geometrischen Optik möglich? Zu diesem Problem wurde Gullstrand durch einen Widerspruch zwischen den ophthalmologischen Erfahrungen und der geometrischen Optik seiner Jugendzeit geführt. Nach dieser geometrischen Optik sollte das astigmatische Lichtbündel stets zwei Brennlinien besitzen. Ophthalmologisch sollten sie in der Ackomodationsfähigkeit des Auges zum Vorschein kommen. Die beiden Ackomodationsgrenzen sollten durch das Einfallen je einer Brennlinie auf die Netzhaut gekennzeichnet sein. Nach der Entdeckung des Wesens der Ackomodation war diese Lehre nicht mehr haltbar.

Wie war man denn zu dieser Lehre von den zwei Brennlinien geführt worden?

Die Grundlage jeder Theorie der geometrisch-optischen Lichtbündel muß der Satz von Malus sein. Er sagt bekanntlich u. a. aus, daß ein Lichtbündel, das von einem leuchtenden Punkt ausgegangen ist, nach beliebig vielen Brechungen und Spiegelungen in einem isotropen, homogenen Medium eine Normalkongruenz ist, mit anderen Worten, daß die Lichtstrahlen stets gegen eine gewisse Fläche, die Wellenfläche, senkrecht sind. Die ältere Theorie nahm jetzt an, daß man die Wellenfläche durch ein Paraboloid:

$$z = \frac{x^2}{2r_1} + \frac{y^2}{2r_2}$$

approximieren kann. Die beiden Mäntel der Brennfläche dieses Paraboloids haben je eine Rückkehrkante, welche durch die beiden Punkte $x=y=0, z=r_1$ und $x=y=0, z=r_2$ hindurchgehen und dort Tangenten haben, welche mit der y-, bez. der x-Achse parallel sind. Sturm zog aus diesen Tatsachen den Schluß, daß ein genügend dünnes, astigmatiches Lichtbündel dadurch gekennzeichnet ist, daß die Lichtstrahlen zwei gegen einander und gegen den Hauptstrahl senkrechten Brennlinien schneiden. Dies ist der Inhalt der Lehre vom Sturmschen Konoid.

Um den Widerspruch zwischen dieser geometrisch-optischen Lehre und den ophthalmologischen Erfahrungen zu beseitigen, erweiterte Gullstrand in seiner Dissertation (1890) den obigen Ansatz für die Wellenfläche, indem er auch die Glieder dritten Grades in x und y berücksichtigte. Die Beiwerte dieser Gleichung lassen sich durch die Werte der Hauptkrümmungen der Wellenfläche im Anfangspunkt und der Ableitungen derselben in den Richtungen der Krümmungslinien darstellen. Das Sturmsche Konoid ist dadurch gekennzeichnet, daß die vier Ableitungen der Hauptkrümmungen alle den Wert Null haben. Es gibt eine Zwischenform, wo zwei Ableitungen verschwinden und es eine Brennlinie gibt. Im allgemeinen verschwindet keine Ableitung und es gibt keine Brennlinie. Insbesondere hat Gullstrand durch eine ophthalmologische Untersuchung festgestellt, daß das Lichtbündel im Auge keine Brennlinie hat. Nach der Ansicht Gullstrands war hiermit die Lehre vom Sturmschen Konoid widerlegt. In seinem ganzen folgenden Leben hat er diese Lehre bekämpft. So zuletzt in dem Vortrag, den er den 13. März 1926 vor der preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin hielt.

Man kann die Frage stellen, ob Gullstrand mit seiner Kritik des Sturmschen Konoids durchgedrungen ist. In der letzten deutschen Optik, in dem schönen Buch, das Born im Jahre 1933 veröffentlichte, sind 66 Seiten der geometrischen Optik gewidmet. Man findet hier u. a. eine Darstellung des astigmatischen Lichtbündels. Hier wird gelehrt, daß jedes Lichtbündel zwei Brennlinien besitzt. Es wird bemerkt, daß nicht „wie vielfach zu lesen ist“ die Brennlinien immer gegen den Hauptstrahl senkrecht stehen. Die matematisch scharfe Kritik des Sturmschen Konoids, die Gullstrand im Jahre 1890 gegeben hatte und die er dann in vielen anderen deutschen Artikeln und Büchern widerholt hatte, ist spurlos vorbeigegangen. Das Bedürfnis eines anschaulichen Bildes ist stärker gewesen als das Interesse an einer sachlich richtigen Darstellung[1].

Der Grund der Tatsache, daß die Physik sich mit einer geometrischen Optik begnügt, die schon lange für die Ophthalmologie ungenügend war, ist offenbar, daß man in der Praxis noch immer mit Strahlen, nicht mit Strahlenbündeln rechnet. Es sollte nicht vergessen werden, daß schon Kepler die Unzulänglichkeit einer optischen Theorie dargelegt hat, die mit Strahlen statt mit Strahlenbündeln rechnet.

In seiner großen Abhandlung „Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie" (1900) nahm Gullstrand das Studium der astigmatischen Lichtbündel wieder auf. Diesmal berücksichtigte er in der Gleichung der Wellenfläche auch Glieder vierten Grades in x und y. Zur Kennzeichnung eines Lichtbündels benutzte er wieder die Hauptkrümmungen der Wellenfläche und ihre ersten Ableitungen in den Richtungen der Krümmungslinien, außerdem aber vier der Ableitungen zweiter Ordnung der Hauptkrümmungen längs den Krümmungslinien und endlich die ersten Ableitungen der geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien. Gullstrand begnügte sich aber nicht mit dieser Kennzeichnung eines Lichtbündels. Es kommt noch etwas zufälliges darin vor. Es gibt ja unendlich viele Wellenflächen, die alle gleichberechtigt sind. Aus den oben erwähnten Größen, die sich auf eine bestimmte Wellenfläche beziehen, leitete Gullstrand deshalb ein System von zehn Größen ab, die auf jedem Lichtstrahl konstante Werte haben.

Ich habe gesagt, daß, wenn Gullstrands Lebenswerk nicht zu Grunde gehen wird, eine Vereinfachung seiner Darstellung notwendig ist. Ich kann jetzt sagen, welche Vereinfachung ich für möglich halte. Das Ziel Gullstrands war stets zu invarianten Größen vorzudringen. Aber die rechnerischen Methoden, die er aus der alten Mathematik gelernt hatte, die elementaren Rechnungsarten und die Differentiation, führten ihn immer wieder zu Ausdrücken, die eine direkte optische oder geometrische Bedeutung vermissen. Ein sehr wesentlicher Teil seines wissenschaftlichen Lebens war ein Kampf gegen diese Schwierigkeit. Die wesentliche Vereinfachung von Gullstrands Werk, die ich für möglich halte, besteht darin überall die elementaren, nicht invarianten Rechnungsarten gegen die neueren, invarianten Methoden zu vertauschen.

Ich will ein Moment bei der Frage stehen bleiben, wie man in bezug auf die Lichtbündel am bequemsten invariante Rechnungsmethoden einführen

[1] F. Auerbach reproduziert in seinem Buch: Ernst Abbe, Eine Lebensbeschreibung (1918) die Sturmsche Lehre. Dagegen gibt Herr Försterling in seinem Lehrbuch der Optik (1928) eine kurze, aber richtige Darstellung.

soll. In betracht kommen hier vielleicht zunächst die Methoden der Liniengeometrie. Gegen diese Methoden kann man doch den Einwand erheben, daß sie auf einen speziellen Fall zugeschnitten sind, den Fall, wo das Licht sich in einem homogenen und isotropen Medium fortpflantzt. Wenn man verlangt, daß die Methoden auch in dem allgemeinen Fall verwendbar sind, muß man auf die Methoden der Liniengeometrie verzichten.

Ich bin von der Bemerkung ausgegangen, daß einem Punkt in einem Lichtbündel nicht nur eine Richtung, die Richtung des Strahls, zugeordnet ist, sondern auch zwei gegen einander und gegen den Strahl senkrechten Richtungen. Es gibt ja zwei gegen einander senkrechte Ebenen durch den Strahl, welche die benachbarten Strahlen enthalten, welche den ersten Strahl schneiden. Es liegt dann nahe, zunächst in dem homogenen, isotropen Falle, ein bewegliches Dreibein einzuführen. Ein solches Dreibein ist durch drei gegen einander senkrechte, ortsabhängige Vektoren $\vec{L}^{(1)}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{L}^{(2)}, \vec{L}^{(3)})$ gegeben. Wir nehmen an, daß $\vec{L}^{(3)}$ in bezug auf die Richtung mit dem Strahl zusammenfällt und daß $\vec{L}^{(1)}, \vec{L}^{(2)}, \vec{L}^{(3)}$ ein Rechtssystem bilden.

Es entsteht jetzt die Frage, wie man einen Überblick über die Orientierung der Dreibeine in der Umgebung eines bestimmten Punktes erhalten kann. Es empfiehlt sich zu diesem Zweck einen Tensor $\varkappa^l_m$ einzuführen.

$$\varkappa^1_m = \sum_{j,k} L^{(2)} \frac{\partial L_j^{(3)}}{\partial x_k} L_k^{(m)}, \quad \varkappa^2_m = \sum_{j,k} L_j^{(3)} \frac{\partial L_j^{(1)}}{\partial x_k} L_k^{(m)},$$

$$\varkappa^3_m = \sum_{j,k} L_j^{(1)} \frac{\partial L_j^{(2)}}{\partial x_k} L_k^{(m)}.$$

Eine Größe $\varkappa^l_m$ hat offenbar eine ganz bestimmte geometrische Bedeutung. $\varepsilon \varkappa^l_m$ gibt die Drehung um den $L^{(l)}$-Vektor an, die das Dreibein bei der Verschiebung ε in der Richtung des Vektors $\vec{L}^{(m)}$ erfährt.

Die neun Größen $\varkappa^l_m$ sind nicht von einander unabhängig. Wenn mann die Vektoren L in der oben angegebenen Weise wählt, so hat man:

$$\varkappa^1_1 = \varkappa^2_2 = \varkappa^3_3 = 0, \quad \varkappa^1_3 = \varkappa^2_3 = 0.$$

Das sind die Differentialgleichungen des geometrisch-optischen Problems. Die Merkmale eines Lichtbündels, die man in dieser Näherung erhält, sind vier: $\varkappa^1_2, \varkappa^2_1, \varkappa^3_1, \varkappa^3_2$. Wenn $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$ die Entfernungen des betrachteten Punktes von der Brennfläche des Bündels sind, positiv gerechnet in der Richtung $\vec{L}^{(3)}$, so hat man:

$$\varkappa^2_1 = \frac{1}{t^{(1)}}, \quad \varkappa^1_2 = \frac{-1}{t^{(2)}}.$$

Eine bestimmte Bedeutung haben auch die Ableitungen in den Richtungen $\vec{L}^{(1)}$, $\vec{L}^{(2)}$, $\vec{L}^{(3)}$. Ich setze:

$$\sum_j L_j^{(p)} \frac{\partial \varkappa_m^l}{\partial x_j} = \varkappa_{mp}^l, \quad \sum_j L_j^{(q)} \frac{\partial \varkappa_{mp}^l}{\partial x_j} = \varkappa_{mpq}^l$$

u. s. w.

Es entsteht jetzt die Frage, wie man Größen finden kann, die auf einem Strahl konstante Werte haben oder, wie wir sagen wollen, invariant sind. Man kann diese Frage in der einfachsten Weise beantworten. Man kennt schon eine Reihe von Größen, welche diese Eigenschaft haben. In der Tat sagen die Gleichungen $\varkappa_3^1 = \varkappa_3^2 = \varkappa_3^3 = 0$ aus, daß die neun Größen $L_m^{(l)}$ auf jeden Strahl konstant sind. Nun gibt es außerdem zwei Differentiationsprozesse, die auf eine Invariante angewandt neue Invarianten ergeben. Es sind:

$$\frac{1}{\varkappa_1^2} \sum_j L_j^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ und } \frac{1}{\varkappa_2^1} \sum_j L_j^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Man erhält also durch einfache Differentiationen das ganze System von Invarianten. Ich Stelle ein System auf, das mit den zehn Invarianten von Gullstrand gleichbedeutend ist:

$$\frac{1}{\varkappa_1^2} + \frac{1}{\varkappa_2^1}, \quad \frac{\varkappa_1^3}{\varkappa_1^2}, \quad \frac{\varkappa_2^3}{\varkappa_2^1}, \quad \frac{\varkappa_{11}^2}{(\varkappa_1^2)^3}, \quad \frac{\varkappa_{22}^1}{(\varkappa_2^1)^3}, \quad \frac{\varkappa_{11}^3}{(\varkappa_1^2)^2}, \quad \frac{\varkappa_1^3 \varkappa_{11}^2}{(\varkappa_1^2)^3},$$

$$\frac{\varkappa_{12}^3 + (\varkappa_1^3)^2}{\varkappa_2^1 \varkappa_1^2}, \quad \frac{\varkappa_{22}^3}{(\varkappa_2^1)^2} - \frac{\varkappa_2^3 \varkappa_{22}^1}{(\varkappa_2^1)^3}, \quad \frac{\varkappa_{222}^1}{(\varkappa_2^1)^4} - 3\frac{(\varkappa_{22}^1)^2}{(\varkappa_2^1)^5}, \quad \frac{\varkappa_{111}^2}{(\varkappa_1^2)^4} - 3\frac{(\varkappa_{11}^2)^2}{(\varkappa_1^2)^5}.$$

Es liegt im Wesen der Sache, daß diese zehn Größen Angaben über die Brennfläche enthalten. Man kann sie ohne Schwierigkeit durch Größen ausdrücken, welche sich auf die Geometrie der Brennfläche beziehen.

Die weitere Aufgabe wäre jetzt ein anschauliches Bild eines Strahlenbündels mit bestimmten Werten der zehn Invarianten für den Hauptstrahl zu geben. Eine Lösung dieser Aufgabe ist meines Erachtens zur Zeit nicht möglich. Ein intimes Studium der Beziehungen zwischen einer Wellenfläche und der Brennfläche würde wohl zu diesem Ziel führen. Gullstrand hat dieses Studium angefangen und hat einer sehr große Arbeit darauf niedergelegt. Er gibt aber selbst zu, daß seine Methode nicht vollständig genügt. Sie bestand darin, den Verlauf der Kurven zu untersuchen, welche auf der Brennfläche den Krümmungslinien der Wellenfläche entsprechen. Diese Methode ist sehr gut, wenn man schon die Gestalt der Brennfläche kennt, aber weniger gut, wenn es sich darum handelt diese Gestalt zu bestimmen.

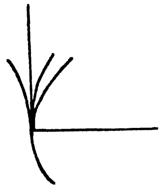


Fig. 1.

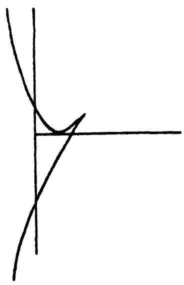


Fig. 2.

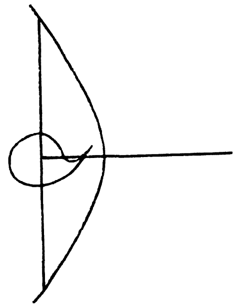


Fig. 3.

Die Schwierigkeiten mit denen man auf diesem Gebiet zu kämpfen hat, sind dieselben, welcher wir schon bei dem Sturmschen Konoid begegnet sind. Wenn man sich ein geometrisches Bild des Strahlenbündels machen will, so muß man notwendig mit Ausdrücken rechnen, die nicht exakt gültig sind, sondern nur Annäherungen darstellen. Ob diese Annäherungen ausreichen um die Gestalt der Brennfläche zu berechnen, muß in jedem besonderen Fall besonders untersucht werden. In bezug auf das Sturmsche Konoid ist die Entscheidung leicht. Wenn man einen Punkt, die zugehörige Tangentenebene und die drei Krümmungsgrößen der Wellenfläche kennt, so ist dadurch ein Punkt und eine Tangentenebene der Brennfläche bestimmt, weiter nichts. Schwieriger ist die Entscheidung in anderen Fällen. Auch bei Gullstrand kommen Sätze vor, die nicht richtig sind.

Ich will als Beispiel die Brennfläche in dem Fall betrachten, wo das Strahlenbündel anastigmatisch ist. Die beiden Mäntel der Brennfläche haben in diesem Fall entweder je drei oder je eine reelle Rückkehrkante. Die Brennfläche besteht im ersten Fall aus zwei Trichtern die beide ihre Spitzen im Fokalpunkt haben. Im zweiten Fall kommen keine Trichter vor. Ich betrachte den Zwischenfall zwischen diesen beiden Hauptfällen. Gullstrand gibt für diesen Fall ein Bild der Brennfläche (Fig. 1). Außerdem gibt er eine Beschreibung, wonach die eine Evolutenschale eine in der Fokalebene liegende, mit der y_2-Achse parallele Kante hat und längs dieser umgebogen ist.

Bei der analytischen Untersuchung dieser Fläche mit den gewöhnlichen Methoden der analytischen Geometrie bekommt man in erster Näherung eine Fläche sechster Ordnung. Man kann sich leicht eine Vorstellung derselben bilden, wenn man den Schnitt mit einer mit der Fokalebene parallelen Ebene betrachtet. Er hat die in Fig. 2 dargestellte Form. Bei Verschiebung der Ebene bewegt sich die Spitze auf einer Parabel, die durch den Anfangspunkt, also den Brennpunkt hindurchgeht. Außerdem hat die Fläche längs der y_2-Achse eine Rückkehrkante, deren Tangentenebene aber nicht senkrecht gegen die Fokalebene ist, sondern vielmehr mit der Fokalebene zusammenfällt. Schon in der ersten Näherung kann man zeigen, daß diese Rückkehrkante keine geometrische oder optische Bedeutung haben kann. In zweiter Näherung behält die Fläche auf der einen Seite der Fokalebene im Großen und Ganzen dieselbe Gestalt wie sie in der ersten Näherung hatte. Auf der anderen Seite der Fokalebene hat der Schnitt mit einer mit der Fokalebene parallellen Ebene die in Fig. 3 dargestellte Form. Aus der in erster Näherung erhaltenen Fläche hat sich also ein Trichter ausgelöst, der in den Brennpunkt ausmündet. Dieser Trichter trägt auf dieser Seite der Fokalebene die uns schon bekannte Rückkehrkante. Die Rückkehrkante längs der y_2-Achse ist verschwunden. Statt dessen bekommt man in der Fokalebene eine gekrümmte Schnittkurve, welche durch den Brennpunkt geht und dort die y_2-Achse berührt. In einem speziellen Fall kan man die Untersuchung weiter führen. Der Schnitt der Fläche mit einer Ebene y_2=Konst. hat in diesem Spezialfall in dem Schnittpunkt mit der Fokalebene einen (3, 4)-Punkt, d. h. er läßt sich durch Gleichungen von der Form:

$$y_1 = c_1 u^4 + \cdots, \; y_3 = c_3 u^3 + \cdots.$$

darstellen. Bei oberflächlicher Betrachtung unterscheidet sich ein solcher Punkt nicht von gewöhnlichen Flächenpunkten.

Gullstrands Bild der Fläche ist nicht unrichtig, aber unvollständig. Dagegen ist seine Beschreibung der Fläche direkt unrichtig. Wie ist er dazu gekommen? Wahrscheinlich hat er durch das Studium der Krümmungslinien der Wellenfläche und ihren Bildlinien auf der Brennfläche den in seiner Figur dargestellten Schnitt gefunden. Die Vorstellung, daß die y_2-Achse eine Rückkehrkante sei, beruht einmal auf der Spitze, die in dieser Figur zum Vorschein kommt und dann auf der Vermutung, daß die Brennfläche zwei Rückkehrkanten haben müsse. Nun war es ja aber doch so, daß die Fläche eine Rückkehrkante und außerdem zwei zusammenfallenden Rückkehrkanten haben sollte. Ein (3, 4)-Punkt ist mit zwei Spitzen äquivalent. Eine Kurve, die in der oben dargelegten Weise aus (3, 4)-Punkten besteht, ist mit zwei Rückkehrkanten äquivalent. Sie kann als die Verschmelzung von zwei Rückkehrkanten aufgefaßt werden. Man sieht, daß die Methoden von Gullstrand tatsächlich nicht ausreichen, während die gewöhnlichen Methoden der analytischen Geometrie ein vollauf befriedigendes Resultat geben.

Mit dem Problem der Brechung eines Lichtbündels hatte Gullstrand sich schon in seiner Habilitationsschrift beschäftigt. Er gab dort vollständige Formeln, welche die „Asymmetrien", d. h. die Invarianten:

$$\frac{\varkappa_1^3}{\varkappa_1^2}, \frac{\varkappa_2^3}{\varkappa_2^1}, \frac{\varkappa_{11}^2}{(\varkappa_1^2)^3}, \frac{\varkappa_{22}^1}{(\varkappa_2^1)^3}$$

des gebrochenen Lichtbündels durch die Asymmetrien des einfallenden Lichtbündels ausdrücken. In der großen Abhandlung über die monochromatischen Aberrationen gab Gullstrand dann Formeln für die Berechnung der „Aberrationen", d. h. der fünf letzten Invarianten. Er beschränkte sich doch dabei auf den Fall, wo das optische System zwei Symmetrieebenen besitzt.

Nach der Vollendung seiner großen Arbeiten über die Konstitution der Lichtbündel ging Gullstrand zum Studium der optischen Abbildung über. „Die reelle optische Abbildung" (1906) enthält die Ergebnisse dieser Studien. Um eine Vorstellung von der Bedeutung und auch von der Begrenzung dieser Arbeit geben zu können muß ich etwas über die Methode sagen, die Gullstrand hier benutzt. Bei der optischen Abbildung hat man nicht nur mit einem Lichtbündel zu tun, sondern mit unendlich vielen. Eine Theorie der optischen Abbildung muß irgendwie diese unendlich viele Lichtbündel bezeichnen. Es ist für Gullstrands Methode kennzeichnend, daß er jedem Lichtbündel einen besonderen Strahl desselben zuordnet und diesen Strahl als Vertreter des Lichtbündels benutzt. Er erreicht dieses Ziel durch eine Annahme, die man so ausdrücken kann, daß irgendwo im optischen System eine punktförmige Blende steckt. Der Strahl eines Bündels, der durch das Zentrum der punktförmigen Blende geht, ist der Vertreter dieses Bündels. Er wird Hauptstrahl genannt. Offenbar bilden die Hauptstrahlen überall im optischen System eine Normalkongruenz. Durch die Einführung der punktförmigen Blende gelingt es also das ganze System von Lichtbündeln mit den Hilfsmitteln der Flächengeometrie zu beherrschen.

Wie wurde Gullstrand zu der Hypothese der punktförmigen Blende geführt? In den Jahren 1901—1906 beschäftigte er sich eingehend mit der physiologischen Theorie des Sehens. Er hatte dabei Gelegenheit die optische Industrie durch Klarstellung der Bedeutung des Augendrehpunkts zu fördern. Wahrscheinlich stammt die punktförmige Blende aus dem Augendrehpunkt. Aber auch die intime Kenntnis der Normalkongruenzen und die weniger intime Kenntnis anderer Linienkongruenzen, die Gullstrand besaß, hat sicher mitgewirkt.

Die Gesetze der Abbildung hängen nicht von der Größe der Blende ab. Von diesem Gesichtspunkt ist also nichts gegen Gullstrands Einführung der punktförmigen Blende einzuwenden. Andererseits ist es offenbar, daß die Größen, welche Gullstrand zur Beschreibung der Abbildung benutzt, von der Lage der Blende abhängen müssen. Dies gilt z. B. auch für so wichtige Größen wie die Vergrößerungskoeffizienten. In Gullstrands letzter Abhandlung bereitet ihm dieser Umstand sehr große Schwierigkeiten. Auch in diesem Fall handelt es sich um eine Komplikation, die dadurch bedingt ist, daß Größen eingeführt werden, die keine invariante Bedeutung haben.

Um zu den Gesetzen der optischen Abbildung zu kommen geht Gullstrand von dem Satze von Fermat aus, daß auf dem Lichtstrahl die optische Weglänge stationär ist. In dem Ausdruck für die optische Weglänge gehen die Koordinaten $x_0, y_0, z_0 = z_0(x_0, y_0)$ des Punktes der brechenden Fläche ein, in welchem die Brechung stattfindet. Der Satz von Fermat sagt aus, daß die Ableitungen der optischen Weglänge zwischen zwei Punkten auf verschiedenen Seiten einer brechenden Fläche (oder auf derselben Seite einer spiegelnden Fläche) in bezug auf x_0 und y_0 den Wert Null haben. Die so erhaltenen Gleichungen enthalten Beziehungen zwischen den Richtungen des einfallenden und des gebrochenen (oder gespiegelten) Lichtstrahls. Diese Beziehungen müssen gültig sein, in welchem Punkt der brechenden (oder spiegelnden) Fläche auch die Brechung stattfinden mag. Es ist also erlaubt die optische Weglänge beliebig viele Male in bezug auf x_0 und y_0 zu differenzieren und das Ergebnis gleich Null zu setzen. Man erhält in dieser Weise die Brechungsgesetze. Aber das Brechungsgesetz muß außerdem für alle die unendlich vielen Lichtbündel gültig sein. Wenn man nach Gullstrand ein Lichtbündel durch den Punkt $\xi_0, \eta_0, z_0(\xi_0, \eta_0)$ festlegt, in welchem der Hauptstrahl die brechende Fläche trifft, so hängt also die optische Weglänge auch von ξ_0 und η_0 ab und es ist erlaubt das Brechungsgesetz beliebig viele Male in bezug auf ξ_0, η_0 zu differenzieren. Durch diese zwei Differenziationsprozesse leitet Gullstrand alle seine Ergebnisse ab.

Ich habe diese Darstellung der Methode von Gullstrand geben müssen um zeigen zu können, wo, meiner Meinung nach, eine Vereinfachung möglich ist. Den Differentiationen in bezug auf x_0, y_0 entsprechen Verschiebungen längs der brechenden (oder spiegelnden) Fläche. Man stellt diese Verschiebungen am zweckmäßigsten durch die kovariante Differentiation von Ricci und Levi-Civita dar. Man gewinnt dadurch, daß man bei jedem Schritt der Rechnung mit wohl definierten geometrischen Größen zu tun hat. Ein großer Teil der Arbeit, die Gullstrand nötig hatte, fällt weg.

Der Wert dieser Methode dürfte daraus hervorgehen, daß ich mit ihrer Hilfe ohne Schwierigkeit die allgemeinen Brechungsgesetze für die Aberrationen ableiten konnte.

Ich wende mich jetzt zu der Theorie der optischen Abbildung. Wenn man nicht die punktförmige Blende anwenden will, so muß die Berechnung in anderer Weise als bei Gullstrand ausgeführt werden. Ich betrachte zunächst den Fall, wo das Lichtbündel im Objektraum nur von einer Parameter, X, abhängt. Man kann z. B. auf den Fall denken, wo eine leuchtende Linie abgebildet wird. X gibt in diesen Fall den Ort des betrachteten Leuchtzentrums auf der Linie an. Es ist offenbar, daß die X-Abhängigkeit des einfallenden Lichtbündels sich durch die Gesetze der Brechung auf das gebrochene Lichtbündel überträgt. Durch Differentiation in bezug auf X eines Brechungsgesetzes erhält man sofort ein Gesetz, welches die Ableitungen in bezug auf X der einfallenden und gebrochenen Größen mit einander verbindet. Hier liegt also keine Schwierigkeit vor. Dagegen kann es so scheinen, als ob ein anderer Umstand Schwierigkeiten hervorrufen würde. Die Ableitungen einer Größe in bezug auf X sind ja nicht vom Orte unabhängig. Sie variieren, wenn man von Punkt zu Punkt geht, selbst wenn man sich längs einem Strahl des von X ausgesandten Lichtbündels bewegt. Es stellt sich doch heraus, daß man diese Ortsabhängigkeit leicht darstellen kann. Man kann auch jetzt Invarianten bilden, welche überall auf einem von X ausgegangenen Strahl dieselben Werte haben. Wenn man eine genügend große Zahl von solchen Invarianten bilden kann, so ist es offenbar möglich alle Ableitungen in bezug auf X in einem beliebigen Punkt zu berechnen.

Um einige Invarianten zeigen zu können, muß ich einige neue Zeichen einführen. Ich setze:

$$\sum_j L_j^{(2)} \frac{\partial L_j^{(3)}}{\partial X} = \Pi_X^1, \quad \sum_j L_j^{(3)} \frac{\partial L_j^{(1)}}{\partial X} = \Pi_X^2, \quad \sum_j L_j^{(1)} \frac{\partial L_j^{(2)}}{\partial X} = \Pi_X^3.$$

Invariant sind dann die Größen:

$$\frac{\Pi_X^1}{\varkappa_2^1}, \quad \frac{\Pi_X^2}{\varkappa_1^2}, \quad \Pi_X^3 - \frac{\varkappa_2^3}{\varkappa_2^1}\Pi_X^1 - \frac{\varkappa_1^3}{\varkappa_1^2}\Pi_X^2.$$

Daß es gerade so viele Invarianten gibt, wie man braucht, geht aus dem folgenden Satz hervor: Wenn I eine Invariante ist, so ist auch:

$$\frac{\partial I}{\partial X} - \frac{\Pi_X^1}{\varkappa_2^1} I_2 - \frac{\Pi_X^2}{\varkappa_1^2} I_1$$

$$\left(I_1 = \sum_j L_j^{(1)} \frac{\partial I}{\partial x_j}, \quad I_2 = \sum_j L_j^{(2)} \frac{\partial I}{\partial x_j}\right)$$

eine Invariante.

Keine neue Schwierigkeiten treten auf, wenn die Lichtbündel von mehreren Parametern abhängen.

Wenn man nach dieser geometrischen Optik das durch ein optisches System entworfene Bild eines Gegenstandes berechnen will, was hat man dann zu tun? Zunächst muß man einen von einem Punkt des Gegenstandes ausgehenden Strahl durchrechnen. Dann kann man einen Punkt dieses Strahles im Bildraum wählen und für diesen Punkt die Größen x^l_m, x^l_{mn} u. s. w. sowie ihre Ableitungen in bezug auf die Koordinaten des Objektpunktes, X_1, X_2, X_3, berechnen. Diese Zahlen enthalten alle Angaben über die Abbildung, welche die geometrische Optik zu liefern vermag. Es ist mir leider nicht möglich hier auf diese Fragen einzugehen. Man kann sie aber auch dazu anwenden die ersten Glieder der Reihenentwicklungen zu berechnen, welche die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes des Brennfläche in der Umgebung des Strahls als Funktionen zweier Parameter darstellen. Die Beiwerte der Glieder dieser Entwicklungen sind Funktionen von X_1, X_2, X_3. Die ersten Glieder ihrer Taylorschen Reihen sind bekannt. Offenbar kann der Inhalt dieser Gleichungen auch durch eine Beziehung von der Form:

$$F(x_1, x_2, x_3;\ X_1, X_2, X_3) = 0$$

dargestellt werden. Eine solche Beziehung definiert eine Berührungstransformation zwischen den beiden Räumen. Einem Flächenelement des Objektraumes entspricht dabei ein Flächenelement des Bildraumes. Die beiden Flächenelemente werden punktweise auf einander abgebildet.

Wir sind zu einem Satze angelangt, der in direktem Widerspruch zu einem der bekanntesten Sätze von Gullstrand zu stehen scheint. Nach Gullstrand ist es ja nicht möglich ein Flächenelement des Objektraumes punktweise auf auf ein Flächenelement des Bildraumes abzubilden. Dagegen gibt es auf der Objektfläche zwei Systeme von abbildbaren Linien. Ich habe oben eine anschauliche Ableitung dieses Satzes gegeben. Wenn wir diese Ableitung noch einmal durchgehen, so werden wir finden, daß sie wesentlich auf einer stillschweigend gemachten Annahme beruht. Die Bildlinien auf der Bildfläche kommen so zu Stande, daß der Schnitt der Bildfläche mit einer einem Punkte der Objektfläche entsprechenden Brennfläche jedem Punkt der Bildfläche eine Richtung zuordnet. Aber ist es denn sicher, daß es immer solche Schnittkurven gibt? Kann es nicht vorkommen, daß die Brennflächen die Bildfläche berühren? Man sieht, daß es tatsächlich einen Fall gibt, wo der Satz von Gullstrand versagt. Es gibt ein Flächenelement des Bildraumes, auf welches ein bestimmtes Flächenelement des Objektraumes punktweise abgebildet wird, sein Bild.

Warum ist es Gullstrand entgangen, daß jedes Flächenelement des Objektraumes im Bildraum ein Bild haben muß? Der Grund ist, daß er in seinen Untersuchungen den Fall streifender Inzidenz ausschloß. Das Bild in der optischen Abbildung berührt stets den Strahl, der die Abbildung vermittelt. Gullstrand konnte es nicht finden.

Würde Gullstrand, wenn er noch lebte, zugeben, daß es ein Mangel seiner Theorie sei, daß er das Bild eines Flächenelementes übersehen hat? Ich glaube es nicht. Er würde sicher sagen, daß seine Theorie den Zweck habe die Ophthalmologie und die optische Industrie zu fördern und daß er sich nicht mit Gegenständen zu beschäftigen habe, die für diesen Zweck bedeutungslos sind. Man kann diese Antwort gutheißen und doch glauben, daß es auch für die Anwendungen der Theorie am besten ist, daß die Theorie sich nach ihren eigenen Gesetzen entwickelt. Einen Beleg für diese Auffassung kann man auch in den Schriften von Gullstrand finden. Nach seinem schon mehrmals erwähnten Satz gibt es auf einem Flächenelement des Objektraumes und auf einem entsprechenden Flächenelement des Bildraumes zwei einander entsprechende einparametrige Scharen von Kurven. Welcher Art ist die Beziehung zwischen diesen Kurven? In bezug auf diese Frage ist Gullstrand niemals zur Klarheit gelangt. Er sagt in seiner Abhandlung über die reelle optische Abbildung folgendes. „Da eine punktweise zustande kommende Abbildung unter vollständiger Strahlenvereinigung erster Ordnung mithin in noch so kleinen Räumen nicht vorkommt, so kann die Vergrößerung nicht durch das Verhältnis der Linienelemente von abbildbaren Linien und Bildlinien, sondern nur durch das Verhältnis der Linienelemente ihrer orthogonalen Trajectorien ausgedrückt werden." Er hat offenbar die Auffassung gehabt, daß die abbildbaren Linien und ihre Bildlinien sich nur *en bloc* entsprechen. Nach der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen besteht aber zwischen einer abbildbaren Linie und ihrer Bildlinie eine Abbildung Punkt für Punkt. Es hat folglich einen guten Sinn das Verhältnis entsprechender Elemente der Bildlinien und der abbildbaren Linien als einen Vergrößerungskoeffizient anzusprechen.

Man kann die Krümmungsradien und die Orientierung der Hauptkrümmungsrichtungen für das Bild eines Flächenelementes berechnen, wenn man diese Elemente für das Flächenelement selbst kennt. Man kann auch die Rechnung weiter treiben. Doch werden die Ausdrücke im allgemeinen unübersichtlich.

Von einem Punkt einer Objektfläche geht ein Strahl zu dem entsprechenden Punkt der Bildfläche. Man erhält so eine Schar von ∞^2 Strahlen, also, wenn es sich um ein homogenes und isotropes Medium handelt, um eine Kongruenz von Geraden. Diese Kongruenz ist keine Normalkongruenz.

Ich habe hier von der regulären optischen Abbildung gesprochen. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß keine Berührung zwischen den beiden Mänteln der Brennfläche stattfindet. Die singuläre optische Abbildung, wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, hat für die Anwendungen der Theorie sehr große Bedeutung, ist aber noch sehr wenig bekannt. Offenbar gehört diese Frage dem Kapitel der singulären Berührungstransformationen an. Eine reguläre Berührungstransformation ordnet einem Elementenverein (Punkt und hindurchgehende Ebene) des einen Raumes einen Elementenverein des anderen Raumes zu. Einem Oskulationselement (Punkt, hindurchgehende Ebene und drei Größen, welche die Krümmung bestimmen) des ersten Raumes wird dadurch ein Oskulationselement des anderen Raumes zugeordnet. Eine singuläre Berührungstransformation ordnet im allgemeinen gewissen Elementenvereinen des einen Raumes unendlich viele Elementenvereine des anderen Raumes zu. Ganz anders bei der singulären optischen Abbildung. Einem Elementenverein des Objektraumes wird auch im singulären Punkt ein Elementenverein zugeordnet. Einem Oskulationselement im Objektraum entspricht dagegen im allgemeinen kein Oskulationselement des Bildraumes. Vielmehr ist eine notwendige Bedingung hierfür, daß der Elementenverein des Objektraumes einem gewissen Kegel dritter Ordnung zugehört. Wenn eine Fläche des Objektraumes einen Punkt enthält, der in einem Punkt abgebildet wird, wo die beiden Mäntel sich berühren, so hat die Bildfläche in in diesem punkt im allgemeinen eine bestimmte Tangentenebene aber eine unendlich große Krümmung.

Nachdem Hamilton gezeigt hatte, daß die optische Abbildung eine Berührungstransformation ist, lag der Gedanke nahe die Eigenschaften der optischen Abbildung aus dieser Tatsache heraus zu deduzieren. In der Geschichte der Optik ist dieser Gedanke mehrmals aufgetaucht. Nichts wäre gegen denselben einzuwenden, wenn man jede Berührungstransformation durch ein optisches System verwirklichen könnte. So ist es aber sicher nicht. Die berühmte Transformation von Lie, welche eine Kugel in eine Gerade überführt, ist bis jetzt nicht durch ein optisches System verwirklicht worden. Unter diesen Umständen entsteht die Frage, welche besondere Eigenschaften die optischen Abbildungen von anderen Berührungstransformationen unterscheiden. Diese Frage wird wahrscheinlich bald ihre Antwort gefunden haben. Dann wird es möglich sein das Studium der optischen Abbildung unabhängig von dem Studium der optischen Systeme zu treiben. Wir würden damit, unter veränderten Verhältnissen zu dem Standpunkt von Gauss zurückkehren.

Man kann die geometrisch-optische Theorie von Gullstrand als einen Versuch auffassen den Gedanken von Hamilton eine für die Ophthalmologie und die optische Technik verwertbare Form zu geben. Hamilton hat gelehrt, daß die ganze optische Abbildung von einer einzigen Funktion, der karakteristischen Funktion, abhängt. Es wäre sinnlos einen geschlossenen Ausdruck für die karakteristische Funktion zu suchen, die einem komplizierten optischen System entspricht. Was man ausführen kann, ist die Berechnung der ersten Glieder der Taylorschen Entwicklung der karakteristischen Funktion in einem bestimmten Punktpaar. Gullstrand hat sich die Aufgabe gestellt ein für die Praxis brauchbares Schema für die Ausführung dieser Rechnungen zu geben. Die Deduktion dieses Schemas hat er in seinen Schriften gegeben. Den Beweis, daß das Schema wirklich anwendbar ist, konnte er dort nicht geben. Es ist zu hoffen, daß dieser Beweis bald vorliegen wird. In dem optischen Institut, das während der Jahre 1914—1926 unter der Leitung von Gullstrand stand, wurde sein Schema praktisch erprobt. Hoffentlich wird bald ein Auszug dieser Rechnungen veröffentlicht werden können.

Ein Problem, dem zuerst ein Hamilton und dann ein Gullstrand sein Leben gewidmet hat, verdient unsere Aufmerksamkeit. Selbst wenn man sehr klar die Grenzen der geometrischen Optik sieht, kann man doch nicht dafür gleichgültig sein, daß ein Problem, das durch die liebevolle Hingebung dieser und so vieler anderer Männer einen so hohen Wert bekommen hat, eine exakte, möglichst einfache Lösung erhält.

NEW LINES IN HYDRODYNAMICS

By V. Bjerknes, Oslo.

My aim with this address is not so much to present solutions of hydrodynamic problems as to direct the attention of my colleagues mathematicians and physicists to an enormous field of *unsolved problems*, problems belonging to a generalized hydrodynamics.

When the hydrodynamist of to-day writes his system of equations the concluding one is *not the true equation of state*

$$q=f(p,\vartheta) \tag{1,1}$$

which expresses density q of the fluid as a function of two variables, pressure p and temperature ϑ, — *but a simplified form of this equation*, viz.

$$q=f(p) \tag{1,2}$$

where temperature has disappeared. This variable is allowed to enter only implicitely, in as much as it can be expressed as a function of one of the variables p or q.

The hydrodynamist has good reason for making this simplification. It gives him a closed system of equations, with an equal number of variables and equations. But the true equation of state brings in an additional variable, temperature, which makes him look for further equations. And the obvious further equations at disposal bring in still further variables: it is difficult to find new rational boundaries, — while the boundary set by the simplified equation of state (1,2) gives a harmonious science, — a model academic science, — characterized not least by the wonderful theorems of *Helmholtz* and *Kelvin* of the conservation of vortices and circulation.

But what do we loose?

We know that every *real* fluid can serve as working substance in a thermodynamical engine. But the unreal fluid defined by equation (1,2) can not. The science of thermodynamics can be built on no other equation than the true equation of state (1,1). The simplified equation of state keeps the two sciences of hydrodynamics and thermodynamics carefully separated.

Now we are living in a mainly fluid, i. e. mainly hydrodynamical world. With exception of the crusts of the planets and the meteoric stones, everything material in the universe seems to be in the fluid or the gaseous-fluid state; and even the mentioned exceptions, the meteoric stones and the crusts of the planets, are believed to have been fluid. And whenever or whereever deep going material changes are to take place, the fluid or gaseous state has to be passed, while at the same time thermodynamics has its share in determining the process. Keeping these two sciences separated, we loose the full scientific control.

Therefore we can not give up the creation of a generalized *physical hydrodynamics*, which is a synthesis of the two separate sciences. My address is a plea for cooperation for the creation of this combined science. The task is a great one. The synthesis can not be made in one step. It must be created by and by, by systematic work to be performed outside the barrier set by the simplified equation of state.

The ideal aim is of course to arrive at suitable *closed systems of equations*, of suitable generality for the different types of problems in the new field, and to solve well defined problems by exact integration.

But provisionally there are also other ways of performing pioneer work. A consequence of the fundamental hydrodynamic equations (equations of motion and equation of continuity) which has not yet been specialized by the simplified equation of state, will be in no contradiction with the principles of thermodynamics. Such a consequence is therefore open to discussion and to quantitative evaluation even from the point of view of thermodynamics.

I shall occupy myself mainly with *two hydrodynamic theorems* of this kind, twin theorems they may be called on account of their parallelism. Each of them will, in view of practical applications, be given in two forms, a "primary" or "primitive" form, and a "secondary" or "developed" form. The theorems are not new. I gave them for the first time in my lectures at the University of Stockholm in the year 1897. When I still call this address *new lines* in hydrodynamics, it is by two reasons. These theorems and their applications have not yet found their way to the textbooks, the authors of which almost without exception still barricade themselves behind the classical boundary set by the simplified equation of state. And to the great number of earlier applications of the theorems, a series of new applications have quite recently been added.

Summary.

(For the details see V. Bjerknes: Application of Line Integral Theorems to the Hydrodynamics of Terrestrial and Cosmic Vortices. Astrophysica Norvegica 1937.)

Passing to his main subject the lecturer started with two forms of the hydrodynamic equation of motion, one in which the forces are referred to unit of mass and one in which the forces are referred to unit of volume. Integration along a closed curve gives two integral equations, one which does not contain the potential and one which does not contain the pressure. These integral equations contain the circulation theorems in their primitive forms. The developed forms are obtained when the closed curve is sup-

posed to be a physical one, which participates in the motion, and under this supposition a total time derivative is separated from the inertia term of the equation.

The theorems were applied to the following problems.

Calculation of the periods of gravity oscillations of heterogeneous fluid masses.

Calculation of the periods of inertia oscillations of rotating fluid masses.

Calculation of the field of motion when the field of temperature is given and of the field of temperature when the field of motion is given in a circular vortex, with application to the fields of motion and of temperature in waterspouts, in sunspots and in the earth's atmosphere.

Applying these special results the lecturer gave finally a discussion of the general circulation of the earth's atmosphere, and made corresponding remarks on possible circulations in the sun.

ÜBER DIE RIEMANNSCHE VERMUTUNG IN FUNKTIONENKÖRPERN

Von H. HASSE, Göttingen.

Einleitung.

Eine Reihe neuerer zahlentheoretischer Untersuchungen beschäftigt sich mit Fragestellungen, die an eine irreduzible algebraische Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

in zwei Unbestimmten mit rationalen Koeffizienten anknüpfen.

Vom Standpunkte des Zahlentheoretikers kann als letztes Ziel dieser Untersuchungen die Frage nach den ganzzahligen Lösungspaaren (a, b) einer solchen Diophantischen Gleichung angesehen werden. Anders ausgedrückt also die Frage nach den Gitterpunkten (a, b) auf einer algebraischen Kurve $f(x, y)=0$.

Darüber hat vor einigen Jahren Siegel einen tiefliegenden Satz bewiesen. Er hat nämlich gezeigt, daß es im allgemeinen nur endlich viele solche ganzzahligen Lösungen gibt. Nur wenn die Gleichung das Geschlecht 0 hat, kann es sein, daß es unendlich viele ganzzahlige Lösungen gibt; die beiden wesentlichen Typen dafür sind die linearen Gleichungen (Geraden) und die indefiniten quadratischen Gleichungen (Hyperbeln).

Dieser Siegelsche Satz stellt aber doch nur eine erste Annäherung an das dar, was man als Zahlentheoretiker wissen möchte. Ziehen wir zu unserer Orientierung den Spezialfall der quadratischen Gleichungen

$$Q(x, y) - m = 0$$

heran, wo $Q(x, y)$ eine quadratische Form mit ganzen rationalen Koeffizienten und m eine ganze rationale Zahl ist. Über die bloße — hier leicht entscheidbare — Frage hinaus, ob es nur endlich oder unendlich viele ganzzahlige Lösungen gibt (Darstellungen von m durch Q), liegt hier eine umfangreiche arithmetische Theorie vor, die über die Lösbarkeit zu entscheiden gestattet und auch die Lösungsanzahl, wenn sie endlich ist, arithmetisch auszudrücken gestattet. Darüber — und über die Verallgemeinerung auf quadratische Formen einer beliebigen Anzahl von Unbestimmten — hat ja der gestrige Vortrag von Siegel berichtet. Analoge genauere arithmetische Einsichten möchte man auch bei der allgemeinen binären Diophantischen Gleichung $f(x, y)=0$ haben. Siegels Endlichkeitssatz kann als ein analytisches Resultat bezeichnet werden, wie auch sein Beweis hervortreten läßt, der tiefliegende Hilfsmittel aus der Analysis heranzieht. Der Zahlentheoretiker möchte gerne genauere und nach Möglichkeit reinarithmetisch begründete arithmetische Einsichten haben.

Betrachtet man den Spezialfall der quadratischen Formen etwas genauer, so ist allerdings zu sagen, daß hier die genannten genaueren arithmetischen Einsichten über die Lösbarkeit und die Lösungsanzahl sich nicht direkt auf die eigentlich erstrebte ganzzahlige Lösbarkeit beziehen, sondern auf einen Zwischenbegriff zwischen „ganzzahliger Lösbarkeit“ and „rationalzahliger Lösbarkeit“, den man nach Artin „quasiganzzahlige Lösbarkeit“ nennt, und der bedeutet, daß bei den rationalzahligen Lösungen beliebig vorgegebene endlich viele Primzahlen im Nenner vermeidbar sind. Das liegt an folgendem: Jedem der genannten drei Lösbarkeitsbegriffe entspricht eine adäquate Klasseneinteilung der quadratischen Formen: ganzzahlige Klassen, quasiganzzahlige Klassen, rationalzahlige Klassen. Für die rationalzahligen Klassen gibt es ein vollständiges arithmetisches Invariantensystem, das im Wesentlichen aus quadratischen Restcharakteren in Form von Hilbertschen Normenrestsymbolen besteht; darüber handeln meine Anfängerarbeiten. Auch für die feineren quasiganzzahligen Klassen gibt es noch ein solches vollständiges arithmetisches Invariantensystem, das im Wesentlichen aus quadratischen Restcharakteren in Form von Legendreschen Restsymbolen besteht; es sind das die von H. J. St. Smith und Minkowski allgemein eingeführten Geschlechtscharaktere, und es ist das Verdienst dieser beiden Forscher, erkannt zu haben, daß sich die Geschlechter quadratischer Formen auch durch die einfache Deutung als quasiganzzahlige Klassen in ein dem Erlanger Programm ähnliches gruppentheoretisches Schema einbauen lassen. Dagegen gibt es für die noch feineren ganzzahligen Klassen kein solches vollständiges arithmetisches Invariantensystem mehr; die quasiganzzahligen Klassen sind vielmehr die engsten, die noch rein-arithmetisch beschreibbar sind. Zur Hervorhebung einer ganzzahligen Klasse aus ihrem Geschlecht bedarf es der wesentlich analytischen Reduktionstheorie.

Merkwürdigerweise ist die historische Entwicklung bei den quadratischen Formen genau umgekehrt gegangen, wie es methodisch dem Fortschritt von einfacherem zu komplizierterem entspricht:

Historisch: ganzzahlig, quasiganzzahlig, rationalzahlig.
Methodisch: rationalzahlig, quasiganzzahlig, ganzzahlig.

Und ebenso ist jetzt auch Siegels Resultat über die Endlichkeit der ganzzahligen Lösungsanzahl von $f(x,y)=0$ einer noch ausstehenden genauen arithmetischen Theorie zunächst einmal der rationalzahligen Lösbarkeit von $f(x,y)=0$ vorangegangen. Allerdings stützt sich Siegel doch auf einen ganz entsprechenden Endlichkeitssatz über die rationalzahligen Lösungen von $f(x,y)=0$, der im Spezialfall des Geschlechtes 1 bereits von Mordell gefunden war, für beliebiges Geschlecht $g \geqq 1$ dann von A. Weil bewiesen wurde, und zwar wieder mit tiefliegenden analytischen Hilfsmitteln:

Man betrachte die Systeme von je g konjugierten algebraischen Lösungen

$$(a_i,\ b_i) \qquad (i = 1, \cdots, g)$$

deren symmetrische Funktionen also rational sind. Diese Systeme bilden im Sinne des zur Gleichung $f(x,y)=0$ gehörigen Abelschen Additionstheorems der g-gliedrigen Lösungssysteme einen endlichen Modul; bildet man also die g-gliedrigen Systeme $(a_i,\ b_i)$ durch ein System von g Integralen erster Gattung $\int du_j$ in das Periodenparallelotop ab:

$$\sum_i \int_{(a_{i0},\ b_{i0})}^{(a_i,\ b_i)} du_j \equiv u_j \text{ mod. Per.}, \ (a_{i0},\ b_{i0}) \text{ festes Lösungssystem,}$$

so bilden die entsprechenden Punkte (u_j) dort einen endlichen Modul. Natürlich sind unter den konjugierten algebraischen Lösungen speziell auch die rationalen Lösungen enthalten, sodaß der Satz von A. Weil insbesondere auch eine Endlichkeitsaussage über diese liefert.

Nach dem oben über quadratische Formen Gesagten wird man zunächst einmal eine genauere arithmetische Einsicht in diesen die rationalen Lösungen betreffenden Sachverhalt anstreben. Auch hinsichtlich der Methodik dafür gibt die Theorie der quadratischen Formen einen Anhalt. Dort zeigt sich nämlich, daß man das vollständige Invariantensystem für die rationalen Klassen einfach erhält, wenn man die vollständigen Invariantensysteme für die p-adischen Klassen für alle Primzahlen p (inkl. p_∞) zusammenfaßt. Ferner bedeutet die Untersuchung der fraglichen Gleichung in einem p-adischen Körper nicht anders als ihre Untersuchung als Kongruenz nach beliebig hohen Potenzen von p als Modul, und diese wiederum führt sich elementar zurück auf die Untersuchung als Kongruenz nach einer festen kleinen Potenz von p als Modul, die für fast alle p schon als p^1 genommen werden kann. Man kommt so wesentlich auf die Aufgabe zurück, die fragliche Gleichung statt im Körper R der rationalen Zahlen vielmehr im endlichen Körper P der Restklassen nach einer Primzahl p zu untersuchen. Im Falle der quadratischen Formen liefert gerade diese Untersuchung die auf p bezügliche wesentlich einzige Invariante, das Hilbertsche Normenrestsymbol.

So wird man auch für die rationalzahlige Theorie der allgemeinen binären Diophantischen Gleichung $f(x,y)=0$ als Grundlage eines späteren nach Möglichkeit ganz analogen Aufbaus zunächst einmal die Gleichung als Kongruenz nach einer Primzahl p, d. h. im endlichen Körper P der Restklassen mod. p untersuchen. Losgelöst von dem Zusammenhang, den ich vorstehend zur Motivierung dieser Fragestellung entwickelt habe, hat man dann also die folgende Frage:

Gegeben ein Polynom $f(x,y)$ über P, dessen Koeffizienten also Restklassen nach einer festen Primzahl p sind, und das über P irreduzibel ist. Man untersuche arithmetisch die Anzahl N der Lösungen (a,b) in P von

$$f(x,y)=0.$$

Dieser Frage sind meine letzten Arbeiten gewidmet. Die Frage hat auch an sich ein zahlentheoretisches Interesse. Sie wurde in Spezialfällen vor einigen Jahren von Mordell und Davenport aufgegriffen, und teilweise beantwortet. Davenport z. B. bewies, daß für

$$y^2-f_3(x)\equiv 0 \bmod. p \qquad (f_3(x) \text{ Polynom dritten Grades})$$

die Lösungsanzahl N durch

$$|N-p|\leqq cp^{\frac{3}{4}}, \quad c \text{ von } p \text{ unabhängig,}$$

abschätzbar ist, und Mordell verbesserte den Exponenten $\frac{3}{4}$ zu $\frac{2}{3}$. p ist der mittlere Wert von N; es liegt die Auffassung zugrunde, daß $f_3(x)$ ganzrationale Koeffizienten hat und alle möglichen Primzahlen p zugelassen sind. Beide Forscher vermuteten, daß der Exponent zu $\frac{1}{2}$ verbessert werden könnte, was wie man leicht sieht, der bestmögliche Wert ist. Sie konnten dies aber mit ihren der elementaren Zahlentheorie entnommenen Hilfsmittel nicht beweisen. Etwas ungläubig an der Kraft der modernen zahlentheoretischen Methoden mit ihrer starken begrifflichen Durchsetzung für elementarzahlentheoretische Fragestellungen, forderte Davenport mich heraus, damit doch wenigstens ein greifbares zahlentheoretisches Resultat zu beweisen, etwa die eben genannte Vermutung.

Das ist mir dann auch gelungen, zu meiner eigenen Freude und Genugtuung, und zur vollen Zufriedenheit meines Freundes Davenport. Es ergab sich dabei mehr, als eine bloße genaueste Abschätzung der obigen Anzahl N, nämlich eine genaue Einsicht in die algebraische Struktur der Lösungsmannigfaltigkeit.

Vom Standpunkte der obigen Fragestellung kann der Davenport-Mordellsche Spezialfall als der Fall des Geschlechts 1 charakterisiert werden, also der einfachste nicht-triviale Fall; denn den Fall des Geschlechts 0 beherrscht man mittels rationaler Uniformisierung in ganz trivialer Weise. Die von mir entwickelte Methode ist aber so allgemein, daß sie auch den Fall beliebigen Geschlechtes $g>1$ anzugreifen gestattet. Zwar sind die Untersuchungen darüber noch nicht ganz abgeschlossen, aber ganz kürzlich hat Deuring die wesentliche Schwierigkeit, die der Verallgemeinerung von $g=1$ auf $g>1$ entgegenstand, aus dem Wege geräumt, sodaß wohl in kurzer Zeit die oben genannte Fragestellung vollständig gelöst sein wird.

Ich will im folgenden einen kurzen Überblick über die Methoden und Resultate im Falle $g=1$ geben, und dann zum Schluß auch noch kurz den zur Verallgemeinerung auf $g>1$ führenden Gedanken Deurings schildern.

Ich möchte noch bemerken, daß in einer eben erschienenen vorläufigen Mitteilung Frl. Lütz, eine Schülerin von A. Weil, die Aufgabe behandelt hat, von meinem Resultat für den Fall $g=1$ im Restklassenkörper P nach p zu der Lösungstheorie im p-adischen Zahlkörper überzugehen; doch kann ich darauf hier nicht eingehen.

Hauptteil.

1. *Der algebraische Funktionenkörper.*

Der erste Schritt für meinen Ansatz besteht darin, die ganze Fragestellung in eine algebraisch-invariante und den modernen Methoden zugängliche Form zu setzen. Er hat noch nichts mit der Beschränkung auf $g=1$ zu tun.

Die über P irreduzible Gleichung

$$f(x, y)=0$$

definiert einen *algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten*

$$K_0=P(x, y),$$

der in mannigfacher Weise durch Gleichungen über P erzeugbar ist (birationale Transformation). Ich sehe diesen Körper und nicht die zufällig zu seiner Erzeugung dienende Gleichung als das Wesentliche an. Es kann nun sein, daß $f(x, y)$ zwar über P irreduzibel ist, aber doch bei algebraischer Erweiterung von P zerfällt. Sei k_0 der über P endliche Körper der Koeffizienten eines der algebraisch konjugierten absolut-irreduziblen Faktoren $f_0(x, y)$ von $f(x, y)$. Dann stellt sich K_0 auch so dar:

$$K_0=k_0(x, y) \text{ mit } f_0(x, y)=0.$$

k_0 ist dabei ein endlicher Körper von einer Elementanzahl $q=p^f$; er heißt der *Konstantenkörper* von K_0; invariant ist er definiert als die algebraisch-abgeschlossene Hülle von P in K_0. Die in der Einleitung gestellte Frage nach der Lösungsanzahl N von $f(x, y)=0$ reduziert sich dann elementar auf die Frage nach der Lösungsanzahl N_0 von $f_0(x, y)=0$ in k_0.

Diese Lösungsanzahl N_0 ist nun ihrer Definition nach nicht invariant dem Körper K_0 zugeordnet, sondern auf die spezielle Erzeugung von K_0 durch die Gleichung $f_0(x, y)=0$ bezogen.

Zu einer invarianten Anzahl N_1 kommt man, wenn man statt der Lösungen (a, b) von $f_0(x, y)=0$ in k_0 die Punkte $\mathfrak{p}_1$ von K_0 zählt. Dabei bezeichne ich als *Punkte* die Primdivisoren ersten Grades im Sinne der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper. Diese sind das abstrakte Analogon der Punkte der Riemannschen Fläche im klassischen Fall (wo statt des endlichen Körpers k_0 der kontinuierliche Körper aller komplexen Zahlen vorliegt), und man erhält sie nach der von Dedekind-Weber gegebenen rein-arithmetischen Definition als die homomorphen Abbildungen des Körpers K_0 auf seinen Konstantenkörper. Jedem Punkte $\mathfrak{p}_1$ von K_0 (von denjenigen abgesehen, für die eine der beiden Erzeugenden x, y unendlich wird) entspricht eindeutig eine Lösung (a, b) in k_0 der Grundgleichung $f_0(x, y) = 0$, auf Grund der Relation

$$(x, y) \equiv (a, b) \bmod. \mathfrak{p}_1,$$

für die ich auch einfach

$$(x\mathfrak{p}_1, y\mathfrak{p}_1) = (a, b)$$

schreibe, um die Analogie zur Bildung des Funktionenwertes der algebraischen Funktionen x, y im Punkte $\mathfrak{p}_1$ im klassischen Fall anzudeuten. Von Nullstellen der Diskriminante der Grundgleichung abgesehen ist diese Beziehung auch umkehrbar eindeutig. Die Anzahl N_1 der Punkte von K_0 ist also der invariante Ersatz für die von der Wahl der Grundgleichung abhängige Lösungsanzahl N_0. Auf Grund des besprochenen Zusammenhangs ist es in jedem Einzelfalle leicht, aus einer Aussage über N_1 eine solche über N_0 zu gewinnen. Für N_1 erscheinen die uns interessierenden Aussagen in ihrer formal einfachsten Gestalt, während die Formulierung für N_0 nebensächliche Umständlichkeiten hereinbringen würde.

Als mittlerer Wert für N_1 ist $q+1$ anzusehen, entsprechend den $q+1$ Werten für x in k_0 inkl. ∞.

Unsere Fragestellung ist damit auf folgende invariante Form gebracht:

Gegeben ein endlicher Körper k_0 von $q = p^f$ Elementen, und ein absolut-irreduzibles Polynom $f_0(x, y)$ über k_0. Es soll die Anzahl N_1 der Punkte (Primdivisoren ersten Grades) des algebraischen Funktionenkörpers

$$K_0 = k_0(x, y) \text{ mit } f_0(x, y) = 0$$

arithmetisch untersucht werden, insbesondere die Größe ihrer Abweichung vom mittleren Werte $q+1$ abgeschätzt werden.

Im Davenport-Mordellschen Fall

$$y^2 - f_3(x) = 0$$

ist übrigens $k_0 = P$ und einfach

$$N_1 = N_0 + 1 = N + 1,$$

sodaß also hier

$$|N_1 - (q+1)| = |N_0 - q| = |N - p|$$

ist.

2. *Zusammenhang mit der Zetafunktion von K_0. Riemannsche Vermutung.*

Für K_0 läßt sich eine *Zetafunktion* definieren:

$$\zeta(s) = \prod_{\mathfrak{p}_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}_n^s}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^{ns}}} \right)^{N_n} = 1 + \frac{N_1}{q^s} + \cdots,$$

wo $\mathfrak{p}_n$ alle Primdivisoren beliebigen Grades n von K_0 durchläuft und N_n deren Anzahlen für die einzelnen Grade n bezeichnet. Diese Zetafunktion zerspaltet sich in ein Produkt:

$$\zeta(s) = \zeta_0(s)\, L(s),$$

wo $\zeta_0(s)$ die Zetafunktion eines rationalen Teilkörpers $k_0(x)$ von K_0 ist (nicht von x abhängig, daher als *Zetafunktion zum Geschlecht* 0 *über* k_0 invariant beschrieben):

$$\zeta_0(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}} \, \frac{1}{1 - \frac{q}{q^s}} = 1 + \frac{q+1}{q^s} + \cdots,$$

und

$$L(s) = 1 + \frac{N_1 - (q+1)}{q^s} + \cdots + \frac{q^g}{q^{2gs}}$$

ein Polynom vom Grade $2g$ in $\frac{1}{q^s}$ ist; dabei ist g das in der arithmetischen Theorie von K_0 (aus der Verzweigungstheorie oder aus dem Riemann-Rochschen Satz) definierte Geschlecht von K_0.

$\zeta_0(s)$ ist nullstellenfrei, $L(s)$ besitzt genau $2g$ Nullstellen ω_i in q^s:

$$L(s) = \prod_{i=1}^{2g} \left(1 - \frac{\omega_i}{q^s} \right).$$

Für sie gilt:

$$N_1 - (q+1) = -\sum_{i=1}^{2g} \omega_i .$$

Damit ist bereits eine arithmetische Darstellung der gesuchten Abweichung $N_1 - (q+1)$ gegeben.

Die Riemannsche Vermutung für $L(s)$ besagt:

$$|\omega_i| = q^{\frac{1}{2}},$$

d. h. der Realteil der $2g$ Serien von Nullstellen in s, die periodisch mit der Periode $\frac{2\pi i}{\log q}$ angeordnet sind, ist $\frac{1}{2}$. Sie bedeutet die genaue Abschätzung:

$$|N_1-(q+1)|\leqq 2g\sqrt{q}.$$

Mann kann umgekehrt zeigen, daß aus dieser Abschätzung für N_1 die Riemannsche Vermutung folgt. Man muß dazu nur die fragliche Abschätzung für jeden endlichen Erweiterungskörper von k_0 zugrundelegen:

$k_0^{(r)}$ der endliche Körper von q^r Elementen; Grad r über k_0

$N_1^{(r)}$ die Anzahl der Punkte von $K_0^{(r)}=k_0^{(r)}(x, y)$

$$|N_1^{(r)}-(q^r+1)|\leqq 2g\sqrt{q^r}.$$

Man sieht nämlich leicht, daß einfach

$$L^{(r)}(s)=\prod_{i=1}^{2g}\left(1-\frac{\omega_i^r}{q^{rs}}\right)$$

$$N_1^{(r)}-(q^r+1)=-\sum_{i=1}^{2g}\omega_i^r$$

ist.

Speziell für $g=1$ wird $L(s)$ das quadratische Polynom

$$L(s)=1+\frac{N_1-(q+1)}{q^s}+\frac{q}{q^{2s}}=\left(1-\frac{\omega}{q^s}\right)\left(1-\frac{\bar{\omega}}{q^s}\right),$$

und die Riemannsche Vermutung läuft auf den Nachweis hinaus, daß die beiden Nullstellen ω, $\bar{\omega}$ konjugiert-komplex (oder höchstens im Grenzfall reell und gleich, d. h. rational) sind, aber nicht reell und verschieden (d. h. reell irrational).

3. *Die Struktur der Gesamtheit aller algebraischen Punkte von K_0.*

Wie die Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{p}_1$ von K_0 im wesentlichen den in k_0 rationalen Lösungen (a, b) einer Grundgleichung $f_0(x, y)=0$ entsprechen, so entsprechen die Primdivisoren n-ten Grades $\mathfrak{p}_n$ den Systemen algebraisch-konjugierter Lösungen (a_i, b_i) vom Grade n über k_0. Erweitert man dementsprechend den Grundkörper k_0 auf seine algebraisch-abgeschlossene Hülle k (das sogen. unendliche Galoisfeld mod. p) und bildet demgemäß den algebraischen Funktionenkörper

$$K=k(x, y) \text{ mit } f_0(x, y)=0,$$

so lösen sich die Primdivisoren n-ten Grades $\mathfrak{p}_n$ von K_0 in je n Primdivisoren ersten Grades von K auf. Die Punkte von K können in diesem Sinne als die ***algebraischen Punkte von*** K_0 aufgefaßt werden. Die Erweiterung von $K_0|k_0$ zu $K|k$ entspricht ungefähr dem, daß man in der klassischen Theorie der algebraischen Funktionen von vornherein den Körper aller komplexen Zahlen als Konstantenkörper zugrundegelegt, auch wenn die Grundgleichung etwa rationale oder algebraische Koeffizienten hat; übrigens bemerken bereits Dedekind-Weber, daß ihr rein-arithmetischer Aufbau dieser klassischen Theorie genau so gut geht, wenn man nur den Körper aller algebraischen Zahlen als Konstantenkörper zugrundelegt, was dann das genaue Analogon zu der obigen Erweiterung darstellt.

Wir werden nun die zu untersuchenden ***rationalen Punkte*** $\mathfrak{p}_1$ von K_0 dadurch bestimmen, daß wir sie innerhalb der Gesamtheit aller algebraischen Punkte von K_0, d. h. aller Punkte $\mathfrak{p}$ von K, durch einen gruppentheoretischen Mechanismus herausheben.

Dazu muß zunächst die Gesamtheit der algebraischen Punkte $\mathfrak{p}$ auf ihre algebraische Struktur hin untersucht werden. Man kann das nach Analogie mit dem klassischen Fall auch die Bestimmung der Struktur der Riemannschen Fläche von K nennen.

Von jetzt ab sei $g=1$ vorausgesetzt. Dann läßt sich die Gesamtheit der Punkte $\mathfrak{p}$ von K zu einer additiven abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ machen. Wählt man nämlich einen Punkt $\mathfrak{o}$ fest aus — er entspricht dem Unendlichen bei der Weierstraßschen Normierung der Riemannschen Fläche eines elliptischen Funktionenkörpers, also dem Nullpunkt der universellen Überlagerungsfläche (Ebene des Integrals erster Gattung u) —, so lassen sich die Divisorenklassen nullten Grades von K eindeutig durch die Quotienten $\dfrac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ repräsentieren, und die Klassenmultiplikation:

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}\,\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}} \sim \frac{\mathfrak{p}''}{\mathfrak{o}} \quad \left(\text{d. h. } \frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}''} \cong z = \text{Element in } K\right)$$

liefert eine formale Punktaddition:

$$\mathfrak{p}+\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}''$$

und macht damit die Gesamtheit der Punkte $\mathfrak{p}$ von K zu einer additiven abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{o}$ als Nullelement, die ich ***die auf*** $\mathfrak{o}$ ***bezogene Additionsgruppe der Punkte*** $\mathfrak{p}$ ***von*** K nennen will. Sie ist isomorph zur Gruppe $\mathfrak{D}$ der Divisorenklassen nullten Grades von K.

In dieser Gruppe $\mathfrak{A}$ haben nun alle Punkte $\mathfrak{p}$ endliche Ordnung; denn entspricht $\mathfrak{p}$ einem Punkte $\mathfrak{p}_n$ von K_0, so ist $\mathfrak{p}$ bereits ein rationaler Punkt in $K_0^{(n)}=k_0^{(n)}(x, y)$, und diese bilden eine endliche Untergruppe $\mathfrak{U}_n$ von $\mathfrak{A}$.

Insbesondere bilden auch die rationalen Punkte $\mathfrak{p}_1$ von K_0 (die den zugehörigen Punkten von K umkehrbar eindeutig entsprechen) eine endliche Untergruppe $\mathfrak{U}_1$ von $\mathfrak{A}$. Die Hervorhebung dieser Untergruppe $\mathfrak{U}_1$ ist gerade unsere Aufgabe.

Eine eingehende Untersuchung ergibt nun, daß die Gruppe $\mathfrak{A}$ isomorph ist zur Additionsgruppe gewisser rationaler Teilpunkte eines abstrakten Periodenparallelogramms, dessen Relativkoordinaten mit u_1, u_2 bezeichnet seien, nämlich zur Additionsgruppe aller rationalen Zahlpaare (u_1, u_2) mod. 1, wo u_1 beliebigen Nenner hat, u_2 aber nur zu p primen Nenner. Für gewisse ausgeartete Körper K ist auch der Nenner von u_1 noch auf zu p prime Zahlen beschränkt.

Man beweist dies dadurch, daß man zeigt: Die Anzahl der Lösungen von $n\mathfrak{p}=\mathfrak{o}$ in der Gruppe $\mathfrak{A}$ ist gleich

n^2 für $n \not\equiv 0$ mod. p

n oder 1 für $n=p$-Potenz (je nachdem eine gewisse Invariante A von K die Eigenschaft $A \neq 0$ oder $A=0$ hat).

Es ist zu vermuten, daß ein ganz entsprechender Satz auch für beliebiges Geschlecht g gilt, mit n^{2g} statt n^2 im Falle $n \not\equiv 0$ mod. p und n^r $(0 \leqq r \leqq g)$ im Falle $n=p$-Potenz, wo r der Rang einer gewissen g-reihigen Matrixinvariante A von K ist.

Die einzige Abweichung gegenüber dem klassischen Fall besteht also darin, daß hier, der Charakteristik p des Konstantenkörpers k entsprechend, die Anzahl der p-ten Teilpunkte des Periodenparallelogramms nur p oder gar 1 statt p^2 ist, daß also für den p-Bestandteil der Punktgruppe die Struktur der Riemannschen Fläche nicht zweidimensional sondern nur ein- oder gar nulldimensional ist.

4. *Herausheben der rationalen Punkte von K_0.*

Dies geschieht auf Grund der folgenden einfachen algebraischen Charakterisierung der Elemente von k_0 unter allen Elementen a von k:

$$a^q = a\,.$$

Die in k_0 rationalen Lösungen sind also unter allen Lösungen (a, b) durch die Relation

$$(a^q, b^q) = (a, b)$$

charakterisiert.

Geht man von den Lösungen (a, b) in k zu den Punkten $\mathfrak{p}$ von K über, so wird man darauf geführt, jedem Punkte $\mathfrak{p}$ von K einen neuen Punkt $\pi\mathfrak{p}$ von K zuzuordnen auf Grund der Relation:

$$(x, y) \equiv (a^q, b^q) \text{ mod. } \pi \mathfrak{p},$$
$$\text{wenn } (x, y) \equiv (a, b) \text{ mod. } \mathfrak{p}.$$

Es liegt nun nahe, diese zunächst an die Grundgleichungslösungen geknüpfte Definition der Operation π in der Punktgruppe $\mathfrak{A}$ auf eine invariante begriffliche Art einzuführen.

Denkt man nämlich an die Uniformisierung der bei Geschlecht 1 erreichbaren Weierstraßschen Normalform

$$y^2 = f_3(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

durch elliptische Funktionen

$$x = \wp(u), \qquad y = \wp'(u)$$

im klassischen Falle, so weiß man ja aus der komplexen Multiplikation folgendes: Ist das Periodenverhältnis imaginär-quadratisch — Bedingung dafür ist eine gewisse algebraische Gleichung für die absolute Invariante $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$, die sich bekanntlich mod. p auf eine Gleichung der Form $J^q = J$ reduziert; hier ist das formal erfüllt, weil J in k_0 liegt —, so gilt für die auf die Dimension 0 normierte $\wp$-Funktion $\tau(u) = \frac{g_2 g_3}{\Delta} \cdot \wp(u)$ eine Kongruenz der Form

$$\tau(\pi u_0) \equiv \tau(u_0)^q \text{ mod. } \mathfrak{P},$$

wo π einer der beiden konjugiert-komplexen (oder rationalen und gleichen) Faktoren aus der Zerlegung

$$q = p^f = \pi \bar{\pi}$$

im Körper Ω des Periodenverhältnisses ist und $\mathfrak{P}$ ein Primidealteiler von π im algebraischen Erweiterungskörper $\Omega(J, \wp(u_0))$ (u_0 ein geeigneter rationaler Teilpunkt). Diese Kongruenz ist es gerade, die in der komplexen Multiplikation im Mittelpunkt steht, weil sie das Klassenkörperzerlegungsgesetz für den Teilwertkörper begründet.

Hierdurch wird man darauf geführt, die Operation π in $\mathfrak{A}$ so einzuführen, daß sie ein Analogon zur komplexen Multiplikation mit einem Faktor π von q im klassischen Falle wird. Die komplexe Multiplikation mit π bedeutet doch nun aber algebraisch ausgedrückt eine isomorphe Abbildung des elliptischen Körpers von $\wp(u)$, $\wp'(u)$ auf den Teilkörper von $\wp(\pi u)$, $\wp'(\pi u)$.

In unserem Falle liefert die Abbildung

$$k \to k \text{ elementweise}, \quad (x, y) \to (x^q, y^q)$$

ersichtlich eine isomorphe Abbildung π von

$$K = k(x, y) \text{ mit } f_0(x, y) = 0$$

auf einen Teilkörper

$$K\pi = k(x^q, y^q) \text{ mit } f_0(x^q, y^q) = 0,$$

weil aus der gliedweisen Potenzierbarkeit mit $q = p^f$ bei Charakteristik p und der obigen Charakterisierung von k_0 innerhalb k folgt:

$$f_0(x^q, y^q) = f_0^q(x^q, y^q) = f_0(x, y)^q = 0.$$

Wir können dann die Operation π in $\mathfrak{A}$, ohne auf die Lösungen (a, b) zurückzugreifen, wie folgt definieren:

Zu $\mathfrak{p}$ gehört zunächst ein $\mathfrak{p}$ enthaltender Primdivisor des Teilkörpers $K\pi$, nämlich einfach die Norm $N_\pi p$ für $K|K\pi$. Diesen Primdivisor $N_\pi \mathfrak{p}$ bilden wir dann durch den Isomorphismus π^{-1} von $K\pi$ zurück nach K ab und erhalten so einen neuen Primdivisor

$$\pi\mathfrak{p} = (N_\pi \mathfrak{p})\,\pi^{-1}$$

von K. Man stellt leicht fest, daß die so allgemein und invariant eingeführte Operation π in der Punktgruppe $\mathfrak{A}$ gerade die obige Eigenschaft für die den Punkten zugeordneten Lösungen hat. Dies drückt sich in folgender an ein Assoziativgesetz erinnernder Form aus:

$$((x\pi)\mathfrak{p}, (y\pi)\mathfrak{p}) = (x(\pi\mathfrak{p}), y(\pi\mathfrak{p})).$$

Die uns interessierenden rationalen Punkte $\mathfrak{p}_1$ von K_0 sind unter allen algebraischen Punkten $\mathfrak{p}$ von K_0 gerade durch die Eigenschaft

$$\pi\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$$

der Invarianz bei der eingeführten Operation π charakterisiert.

5. *Der Meromorphismenring von K.*

Um nun mit der Operation π auch rechnen zu können, werden wir sie, ganz analog zum klassischen Fall der komplexen Multiplikation, in einen Ring einzubetten haben, der der Gesamtheit aller komplexen Multiplikatoren entspricht. Im klassischen Fall ist das eine Ordnung aus dem imaginärquadratischen Körper Ω des Periodenverhältnisses.

Wir betrachten dazu alle *Meromorphismen* von K, d. h. alle isomorphen Abbildungen μ des Körpers K auf Teilkörper $K\mu$. Für jeden solchen läßt sich die Operation

$$\mu\mathfrak{p} = (N_\mu \mathfrak{p})\,\mu^{-1}$$

in der Punktgruppe $\mathfrak{A}$ ganz analog wie oben für den speziellen Meromorphismus π erklären. Sie entspricht einer linearen Funktion $\mu u + a$ mit komplexem Multiplikator μ und beliebigem a im klassischen Fall. Wir denken uns die μ (durch einen Translationsautomorphismus von K) immer eindeutig so normiert, daß dabei unser Bezugspunkt $\mathfrak{o}$ in sich übergeht:

$$\mu\,\mathfrak{o}=\mathfrak{o}.$$

Das entspricht den reinen komplexen Multiplikationen μu im klassischen Fall.

Dann zeigt sich, daß jeder solche normierte Meromorphismus eine homomorphe Abbildung der Punktgruppe $\mathfrak{A}$ *in* sich liefert:

$$\mu(\mathfrak{p}+\mathfrak{p}')=\mu\,\mathfrak{p}+\mu\,\mathfrak{p}',$$

und sogar $\mathfrak{A}$ *auf* sich abbildet, daß sie also die wesentlichen Eigenschaften einer linearen homogenen Funktion hat. Ferner bilden die μ auf Grund der einfachen Nacheinanderausführung ein multiplikativ abgeschlossenes assoziatives System. Jedem μ läßt sich eine *Norm*

$$N(\mu)=[K:K\mu]$$

zuordnen, und es gilt

$$N(\mu\mu')=N(\mu)\,N(\mu').$$

Wesentlich ist nun, daß sich dies multiplikativ abgeschlossene System durch formale Hinzunahme einer 0 mit

$$0\,\mathfrak{p}=\mathfrak{o} \text{ für alle } \mathfrak{p}$$

und

$$N(0)=0$$

zu einem Ring M machen läßt, indem man auch eine Addition einführt. Dies geschieht auf Grund des Additionstheorems in rein-algebraischer Gestalt. Die Meromorphismen $\mu\neq 0$ entsprechen nämlich umkehrbar eindeutig den Lösungen $(x\mu,\ y\mu)$ *in* K einer in geeigneter Weise normierten Grundgleichung, und für diese hat man das Additionstheorem. Besser macht man dies, ohne auf eine Grundgleichung Bezug zu nehmen, indem man den Körper

$$\mathfrak{K}=K(\xi,\ \eta) \text{ mit } f_0(\xi,\ \eta)=0$$

vom Geschlechte 1 *über* K als formalem Konstantenkörper einführt. Dann entsprechen die μ gerade den Punkten $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}|K$, und die gesuchte Addition der μ ergibt sich einfach als die Klassenmultiplikation in $\mathfrak{K}|K$ oder also als die Addition in der zu $\mathfrak{A}$ analogen Punktgruppe von $\mathfrak{K}|K$, bei der ja die in K rationalen Punkte, wie oben gesagt, für sich eine Untergruppe bilden.

Gerade der letztere Ansatz liegt der nachher zu besprechenden Deuringschen Verallgemeinerung auf beliebiges Geschlecht $g\geqq 1$ zugrunde.

So erhält man dann den *Meromorphismenring* M von K. Er hat folgende Eigenschaften:

Er ist nullteilerfrei (wegen der Normenproduktformel), besitzt ein Einselement 1 (entsprechend dem identischen Automorphismus) und hat die Charakteristik 0, d. h. die natürlichen Vielfachen n von 1 sind in ihm von 0 verschieden (siehe unten); diese natürlichen Vielfachen entsprechen den natürlichen Multiplikationen nu im klassischen Fall.

Seine wichtigste Eigenschaft ist das Analogon der Tatsache, daß das Periodenverhältnis im klassischen Falle imaginär ist, woraus dort leicht folgt, daß es außer den ganzrationalen Multiplikatoren höchstens noch gewisse imaginär-quadratische Multiplikatoren gibt. Diese Eigenschaft ergibt sich aus einer grundlegenden Identität für die Norm in M, nämlich für ihr Verhalten bei der Addition:

$$N(\mu+\nu)+N(\mu-\nu)=2\,N(\mu)+2\,N(\nu),$$

zusammen mit der Tatsache, daß die Norm in M ihrer Definition nach wesentlich positiv ist:

$$N(\mu)\geqq 0\,.$$

Die Normenadditionsformel erhält man, wenn man das aus der klassischen komplexen Multiplikation geläufige Verfahren der Nullstellen- und Polbestimmung der Funktion

$$\wp(\mu u)-\wp(\nu u)$$

algebraisiert, d. h. die Zähler- und Nennerprimdivisoren von

$$x\,\mu-x\,\nu$$

bestimmt und ihre Anzahlen gleichsetzt, wo x irgendein Element vom genauen Nenner $\mathfrak{o}^2$ aus K ist.

Die Normenadditionsformel führt rein-algebraisch zu der Formel

$$N(m\,\mu+n\,\nu)=m^2\,N(\mu)+m\,n\,(N(\mu+\nu)-N(\mu)-N(\nu))+n^2\,N(\nu)$$

für beliebige ganzrationale m, n, speziell

$$N(n)=n^2.$$

Die letztere Formel ergibt die oben vorweggenommene Nullteilerfreiheit von M. Aus der ersteren Formel fließt wegen der Positivität der Norm sofort die Ungleichung

$$(N(\mu\pm\nu)-N(\mu)-N(\nu))^2\leqq 4\,N(\mu)\,N(\nu),$$

speziell

$$(N(\mu\pm 1)-N(\mu)-1)^2\leqq 4\,N(\mu)\,.$$

Ferner ergibt sich aus dieser Formel durch ein rein-algebraisches Schlußverfahren, das meine Schüler Behrbohm und Teichmüller ausgearbeitet haben, daß jeder Meromorphismus μ einer quadratischen Gleichung

$$\mu^2+l\mu+m=0$$

genügt, sodaß also ein weiterer zu μ konjugierter Meromorphismus $\bar{\mu}$ durch

$$l=N(\mu-1)-N(\mu)-1=\mu+\bar{\mu}$$

definierbar ist, für den dann

$$m=N(\mu)=\mu\bar{\mu}=\bar{\mu}\mu$$

gilt. Dabei ist ferner nach der genannten Ungleichung

$$l^2\leqq 4m,$$

d. h. die beiden konjugierten Meromorphismen μ, $\bar{\mu}$ sind formal konjugiert-komplex (im Grenzfall rational und gleich).

Aus allem diesem ergibt sich noch leicht, daß der Meromorphismenring M nur von einem der drei folgenden Typen sein kann:

I. Hauptordnung der ganzen Zahlen im Körper P der rationalen Zahlen,

II. Ordnung in einem imaginär-quadratischen Zahlkörper

$$\Omega=P(\delta) \text{ mit } \delta^2=d<0,$$

III. Ordnung in einer imaginär-quadratischen Divisionsalgebra

$$A=P(\delta,\ \delta') \text{ mit } \delta^2=d<0,\ \delta'^2=d'<0,\ \delta'\delta=-\delta\delta'.$$

Diese drei Typen kommen wirklich vor.

6. *Beweis der Riemannschen Vermutung.*

Die Untergruppe $\mathfrak{U}_1$ der rationalen Punkte $\mathfrak{p}_1$ war in der Gruppe $\mathfrak{A}$ aller Punkte $\mathfrak{p}$ durch die Relation

$$\pi\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$$

charakterisiert. Diese Relation kann jetzt in der Form

$$(\pi-1)\mathfrak{p}=\mathfrak{o}$$

geschrieben werden. Die rationalen Punkte entsprechen also den $(\pi-1)$-ten Teilpunkten der klassischen Theorie.

Damit ist eine auch an sich bemerkenswerte algebraische Charakterisierung der gesuchten rationalen Punkte $\mathfrak{p}_1$ gewonnen.

Die gesuchte Anzahl N_1 ergibt sich nun ferner, wie aus der genaueren Theorie der Meromorphismennorm folgt, einfach als

$$N_1=N(\pi-1).$$

Nun genügt π einer quadratischen Gleichung

$$\pi^2+l\pi+q=0 \text{ mit } l^2\leqq 4q,$$

weil ja

$$N(\pi)=[K:K\pi]=[K:K^q]=q$$

ist, und dabei ist

$$l=N(\pi-1)-N(\pi)-1=N_1-(q+1).$$

Daher ist die quadratische Gleichung für π einfach das der Funktion $L(s)$ zugrundeliegende Polynom in q^s. Die beiden Nullstellen ω, $\bar{\omega}$ von $L(s)$ oder $\zeta(s)$ in q^s sind also formal identisch mit dem Meromorphismus π:

$$K\pi=K^q$$

und seinem konjugierten $\bar{\pi}$:

$$K\bar{\pi}=(Kq)^{q-1},$$

letzteres entsprechend der Relation $\bar{\pi}\pi=q$. Die mit der Riemannschen Vermutung äquivalente Tatsache, daß ω, $\bar{\omega}$ konjugiert-komplex sind, oder also, daß die Abschätzung

$$|N_1-(q+1)|\leqq 2\sqrt{q}$$

besteht, erscheint hiernach als abstraktes Analogon der Tatsache, daß das Periodenverhältnis eines elliptischen Funktionenkörpers im klassischen Falle imaginär ist.

Es sei noch bemerkt, daß die Grenzfälle

$$N_1-(q+1)=0 \quad \text{oder} \quad \pm 2\sqrt{q}$$

genau den ausgearteten Körpern mit $A=0$, d. h. mit nulldimensionaler Struktur des p-Bestandteils der Punktgruppe $\mathfrak{A}$, entsprechen. Insbesondere kommt der Grenzfall $\pm 2\sqrt{q}$ wirklich vor, d. h. die gewonnene Abschätzung für $N_1-(q+1)$ ist bestmöglich.

7. *Verallgemeinerung auf beliebiges Geschlecht* $g\geqq 1$.

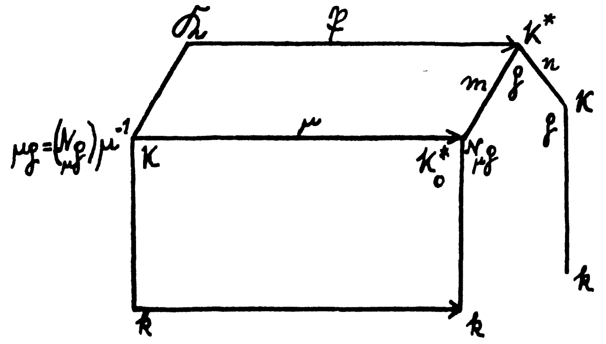
Deuring hat kürzlich erkannt, wie man den Begriff des Meromorphismus verallgemeinern muß, um die ganze entwickelte Theorie auch für beliebiges Geschlecht $g\geqq 1$ durchführen zu können. Man muß dazu das algebraische Äquivalent der von Hurwitz ausgebildeten Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper zugrundelegen.

Eine *Korrespondenz* eines algebraischen Funktionenkörpers $K|k$ zu einem algebraischen Funktionenkörper $\bar{K}|k$ ist nach Hurwitz eine konforme Abbildung einer endlichen Überlagerungsfläche von K auf eine endliche Überlagerungsfläche von $\bar{K}$. Rein-algebraisch bedeutet dies, soweit es sich um zusammenhängende Überlagerungsflächen handelt, folgendes:

Es liegt ein Isomorphismus μ von K auf einen Teilkörper K_0^* einer endlichen algebraischen Erweiterung K^* von $\bar{K}$ vor, die gleich als kleinstmöglich, d. h. als Kompositum

$$K^* = K_0^* K$$

angenommen werden darf; schematisch so:



Sind m, n die Gradzahlen wie eingezeichnet, so ordnet die Korrespondenz μ jedem Punkt $\mathfrak{p}$ von K eine n-gliedrige Punktgruppe $\mu\mathfrak{p}$ von K zu, und dabei ist je m Punkten $\mathfrak{p}$ von K dieselbe n-gliedrige Punktgruppe $\mu\mathfrak{p}$ von K zugeordnet.

Rein-algebraisch vollzieht sich diese Punktkorrespondenz so: Man betrachte den Punkt $\mathfrak{p}$ von K als zusammengesetzten Divisor n-ten Grades (n-gliedrige Punktgruppe) von K^*, bilde seine Norm $N_\mu \mathfrak{p}$ für $K^* | K_0^*$ und bilde diese durch μ^{-1} auf K ab:

$$\mu\mathfrak{p} = (N_\mu \mathfrak{p})\,\mu^{-1}.$$

Das ist formal das gleiche Schema, wie oben bei den Meromorphismen, nur daß hier $\mu\mathfrak{p}$ nicht ein Punkt sondern eine Punktgruppe von K wird, und daß wir zunächst von dem Bildkörper K noch nicht die Isomorphie zu K gefordert haben.

Diese Korrespondenzen entsprechen nun wieder umkehrbar eindeutig den Primdivisoren $\mathfrak{P}$ des Körpers $\mathfrak{K}|K$, der aus $K|k$ durch formale Konstantenerweiterung entsteht. Dabei ist n der Grad von $\mathfrak{P}$. Den anderen Grad m wird man für die Definition der Norm $N(\mu)$ zugrundezulegen haben; soviel ich sehe hat man

$$N(\mu) = m^g$$

zu definieren. Bei dieser Zuordnung der Korrespondenzen μ zu den Primdivisoren $\mathfrak{P}$ muß man allerdings noch gewisse ausgeartete Korrespondenzen mitrechnen, bei denen K nur homomorph auf den Konstantenkörper k abgebildet wird; sie entsprechen den konstanten Primdivisoren von $\mathfrak{K}|K$, d. h. denjenigen, die sich bereits als Primdivisoren von $K|k$ darstellen.

Wenn schon darin ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Spezialfall $g = 1$ besteht, daß hier Primdivisoren $\mathfrak{P}$ beliebigen Grades n (nicht nur ersten Grades) auftreten, so liegt ein weiterer wesentlicher Unterschied noch darin, daß die nach dem bisherigen Schema gewonnenen Korrespondenzen μ noch nicht additiv abgeschlossen sind. Das liegt daran, daß jetzt das Additionstheorem als Klassenmultiplikation der $\mathfrak{K}|K$ nicht durch die Primdivisoren $\mathfrak{P}$ allein, sondern erst durch die Divisoren $\mathfrak{D}$ vom Grade g vollständig beschrieben wird. Daher muß man hier auch formale Zusammensetzungen von Primkorrespondenzen in Betracht ziehen; sie sind das abstrakte Analogon zu Hurwitzschen Korrespondenzen, bei denen die Überlagerungsflächen unzusammenhängend sind.

Deuring ist auf diese Weise bisher bis zur Aufstellung des *Korrespondenzenrings* M der Korrespondenzen von K auf sich vorgedrungen. Dieser entspricht dem Ring der ganzen Multiplikatoren der K zugeordneten Riemannschen Matrix in der klassischen Theorie. Es steht dann im wesentlichen noch eine Theorie der Norm in M und insbesondere der Beweis einer Normenadditionsformel aus. Man sieht aber schon, daß die Riemannsche Vermutung für beliebiges Geschlecht $g \geqq 1$ wieder einfach das abstrakte Analogon zu der Tatsache wird, daß die bekannte aus der Riemannschen Matrix von K gebildete Hermitesche Form positiv definit ist.

Auch nach einer anderen Richtung hin lassen sich die vorstehend geschilderten Methoden anwenden, nämlich auf das berühmte Hilbertsche Problem der Klassenkörperkonstruktion für algebraische Zahlkörper durch Teilwerte Abelscher Funktionen. Deuring kann hier bereits den Fall $g = 1$, der mit der Klassenkörperkonstruktion zu einem imaginär-quadratischen Zahlkörper verknüpft ist, also den Fall der klassischen komplexen Multiplikation, auf rein-algebraische Weise durchführen. Die weitere Ausbildung seiner Methode wird entsprechend zu einer rein-algebraischen Lösung für beliebige algebraische Zahlkörper führen. Als Haupthilfsmittel dafür wird man die Konstruktion einer Riemannschen Matrix zu einem vorgegebenen Multiplikatorenring brauchen; darüber ist in letzter Zeit viel gearbeitet worden, vor allem von A. A. Albert. Charakteristisch für diesen Zugang zur Lösung des Hilbertschen Problems ist, daß man durch die rein-algebraische Behandlung die Schwierigkeiten vermeidet, die bei den bisherigen Ansätzen von Hecke u. a. in dem Auftreten analytischer Funktionen von mehreren Variablen liegen.

THE FOUNDATION OF QUANTUM MECHANICS

By G. D. Birkhoff, Cambridge, Mass.

Introduction.

In this Address I propose to give in outline the general point of view concerning the foundations of quantum mechanics to which I have been led in recent years. My paper will consist of three parts: a first part in which I take up a purely mathematical thread involving the general theory of asymptotic series which, as I have shown previously, serves to join together many of the accepted quantum mechanical ideas of the present day, and which will undoubtedly be of use in further developments;[1] a second part in which I give a brief critique of earlier and current physical theories with the purpose of mentioning the logical difficulties involved;[2] and a third part dealing with the further development of an explicit conceptual theory which I first outlined in 1926, which seems to me to afford a highly suggestive physical model for quantum mechanics.[3]

Within the compass of the present brief paper I can do no more than sketch some of the main results. It is my intention to supplement this account by an extensive Memoir to be published elsewhere.

Part I.

Linear Parametric Wave Equations and Quantum Mechanics.

1. *Parametric Wave Equations. Wave Packets.*

By a linear parametric wave equation I mean an equation of the type

$$L(\psi, \lambda)=0 \tag{1}$$

in which L denotes any linear homogeneous differential expression in the dependent variable ψ with independent variables $x_1, \cdots, x_n$ and involving a large parameter λ. In order to avoid difficulty I assume that all the coefficients are analytic in the variables $x_1, \cdots, x_n, \lambda$, and are expansible in convergent power series in $1/\lambda$ for λ large.

---

[1] See my paper "Quantum Mechanics and Asymptotic Series" published in the *Bulletin of the American Mathematical Society* in October, 1933.

[2] See my paper "A Mathematical Critique of Some Physical Theories" published in the *Bulletin of the American Mathematical Society*, March—April, 1927.

[3] See my Notes entitled "A Theory of Matter and Electricity" and "The Hydrogen Atom and the Balmer Formula" appearing in the *Proceedings of the National Academy of Sciences*, March 1927.

Now it has frequently been found that certain important solutions ψ exists which have the peculiar property that their derivatives with respect to x_i are asymptotically obtained by mere multiplication by $\lambda \partial S/\partial x_i$ where S is a suitable 'phase function', so that we have $\psi \sim e^{\lambda S}$; thus, in the simple case of the equation $\psi'' + \lambda^2 \psi = 0$ we have two exact solutions $e^{\pm \lambda i x}$ so that $S = \pm i x$ in this case. If we take account of higher terms in such an asymptotic relationship, we are led to search for formal solutions of the type

$$\psi \sim e^{\lambda S}\left(v_0 + \frac{v_1}{\lambda} + \frac{v_2}{\lambda^2} + \cdot \ \cdot\right) \tag{2}$$

where $v_0, v_1, \cdots$ are functions of $x_1, \cdots, x_n$. It is found for the purposes of the applications that the question of the convergence or divergence of such formal series need not be considered.

By direct substitution and comparison of coefficients we may determine all of the conditions which must be imposed upon the multiplier function S and the successive coefficients $v_0, v_1, \cdots$ in order that a given series constitutes a formal solution. For the purpose of carrying out the formal reckoning it is very convenient indeed to introduce the following abbreviated notation, which I used in 1908:

$$\overset{[1]}{\frac{\partial w}{\partial x_i}} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \overset{[2]}{\frac{\partial w}{\partial x_i \partial x_j}} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \cdots. \tag{3}$$

The first of the conditions so obtained is then an equation determining S,

$$P\left(x_1, \cdots, x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{4}$$

Here the explicit expression for P is a certain polynomial of degree m in $\partial S/\partial x_i \ (i=1, \cdots, n)$, where m is the order of the given wave equation. This equation may be termed the 'multiplier equation'. Thus the possible phase functions are obtained as the solution of a partial differential equation (4) which is polynomial and of the first order in the dependent variable S, but in which S does not itself appear.

If we proceed further we are able to calculate $v_0, v_1, \cdots$ in succession. This turns out to occur in the following manner.

Associated with the function S there is a corresponding canonical dynamical system with Hamiltonian function P; namely,

$$\frac{d x_i}{d\tau} = \frac{\partial P}{\partial y_i}, \ \frac{d y_i}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial x_i}. \qquad (i=1, \cdots, n). \tag{5}$$

This canonical system will define certain trajectories in $x_1, \cdots, x_n$ space, with general solution given by the $2n$ equations

$$(6) \qquad y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \ d_i = -\frac{\partial S}{\partial c_i}, \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

where $c_1, \cdots, c_n$ are the n arbitrary constants contained in a complete solution S of the multiplier equation. If we let τ denote the time along such a trajectory, the successive conditions upon $v_0, v_1, \cdots$ take the form

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dv_0}{d\tau} + \Phi v_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{dv_1}{d\tau} + \Phi v_1 + \Phi_1(v_0) = 0 \\[2ex] \dfrac{dv_2}{d\tau} + \Phi v_2 + \Phi_1(v_1) + \Phi_2(v_0) = 0 \\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

where Φ is an explicitly given function and where $\Phi_1, \Phi_2, \cdots$ stand for explicit homogeneous linear differential expressions of order indicated by the subscript. Hence, if Σ is a surface in $x_1, \cdots, x_{n\tau}$ space, which cuts the n-dimensional family of trajectories at an angle different from zero, then the functions $v_0, v_1, \cdots$ may be assigned at pleasure on Σ, but are then determined throughout $x_1, \cdots, x_{n\tau}$ space. In particular we may suppose that these functions $v_0, v_1, \cdots$ are assigned arbitrarily on a small region σ of the transversal surface Σ and are continuous together with all of their partial derivatives, but vanish along the boundaries of this region σ and outside of it. In this case we obtain an asymptotic 'wave packet' solution corresponding to the given phase function, which vanishes everywhere except within the tube of trajectories standing on the given small region σ.

Except in the case of the single ordinary differential equation ($n = 1$), the domain in which such formal solutions correspond to actual solutions has not as yet been determined. There is no doubt, however, that such actual solutions exist in general in suitably restricted domains of $x_1, \cdots, x_n$ space.

For our purposes it is worth while to indicate how the multiplier equation is actually to be obtained in any given case. We begin by using the symbolic operator mentioned above and writing the given linear wave equation in the form

$$(8) \qquad L \equiv L_0 + \frac{1}{\lambda} L_1 + \frac{1}{\lambda^2} L_2 + \cdots$$

by use of this operator. Here $L_0, L_1, \cdots$ are themselves linear and homogeneous in products of the operators $\partial^{[1]}/\partial x_i$ $(i=1, \cdots, n)$ and do not contain explicitly the parameter λ. Thus if we began with the equation of Fourier,

$$\psi'' + \frac{1}{x}\psi' + \lambda^2\psi = 0,$$

the expansion referred to would be

$$L \equiv \left(\overset{[2]}{\frac{\partial\psi}{\partial x^2}} + \psi\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{x}\overset{[1]}{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right).$$

The rule giving the multiplier equation is then the following: *The polynomial P in the multiplier equation $P=0$ is obtained by replacing the derivatives $\overset{[1]}{\partial\psi}/\partial x_1, \cdots, \overset{[1]}{\partial\psi}/\partial x_n, \overset{[2]}{\partial\psi}/\partial x_1^2 \cdots$ in L_0 by the respective expressions $\partial S/\partial x_1, \cdots, \partial S/\partial x_n, (\partial S/\partial x_1)^2, \cdots$.* Thus in the case of the equation just mentioned the multiplier equation is immediately seen to be

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + 1 = 0$$

which yields, of course, $S = \pm i x$.

Suppose now that we consider more generally a system of k linear homogeneous partial differential equations in $\psi_1, \cdots, \psi_k$

$$L_i \equiv L_{i0} + \frac{1}{\lambda}L_{i1} + \frac{1}{\lambda^2}L_{i2} + \cdots = 0. \qquad (i=1, \cdots, k). \tag{8'}$$

Here the various operators L_i have been expanded by the use of the symbolic operator in the manner indicated above. In this case we search for formal series solutions of the following type

$$\psi_i = e^{\lambda S}\left(v_{i0} + \frac{v_{i1}}{\lambda} + \cdots\right) \qquad (i=1, \cdots, k). \tag{2'}$$

As before, an infinite series of conditions is obtained, the first being k equations,

$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} v_{j0} = 0, \qquad (i=1, \cdots, k), \tag{9}$$

where P_{ij} is obtained from L_{ij} just as P was obtained from L in the simple case of a single equation considered above. Thus there arises a determinantal multiplier equation, namely

$$P \equiv |P_{ij}| = 0. \tag{10}$$

If the phase function S satisfies this partial differential equation, then the n linear homogeneous algebraic equations (9) determine the k functions

$v_{10}, \cdots, v_{k0}$ to a proportionality factor $\mu(x_1, \cdots, x_n)$. Here we suppose that the rank of the determinant P is $n-1$. We then proceed to the later sets of conditions determining $\mu, v_{i1}, \cdots$. It turns out that $v_{0i}, v_{1i}, \cdots$ are successively determined in much the same way as $v_0, v_1, \cdots$ were above, although there is, of course, a greater degree of algebraic complication. In fact, if we set up the canonical system (5) associated with the Hamiltonian function P just as we did before, we find that there will exist 'wave packet' solutions which vanish except along a small tube of trajectories.

Thus there is associated with the single parametric wave equation and with the system of such equations, wave packet solutions which vanish save near to one of the associated dynamical trajectories. In the case of the single linear parametric wave equation or of the system of such wave equations, the formal wave packet solutions no doubt correspond to actual solutions in an asymptotic sense.

In this way we arrive at a very general association af 'waves' and 'particles' of the kind of which so much use has been made in current quantum mechanics.

2. *The Ordinary and Relativistic Schrödinger Wave Equation.*

In order to arrive at the Schrödinger wave equation of quantum mechanics the following rule is specified: The desired wave equation is obtained from the Hamilton-Jacobi partial differential equation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x_1, \cdots, x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{11}$$

by regarding this last equation as the 'multiplier equation' with $\lambda = 2\pi i/h$ (h, Planck's constant). Here the variables $x_1, \cdots, x_n$ are geometrical variables of Cartesian type attached to the atomic dynamical problem, $y_1, \cdots, y_n$ are the associated conjugate variables, and H denotes the total energy. Thus we obtain the Schrödinger equation in the symbolic form

$$\left[\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t} + H\left(x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right]\psi = 0 . \tag{12}$$

If now we set

$$\psi = e^{-\lambda E t}\psi^*,$$

the equation takes the simpler form

$$[H - E]\psi^* = 0, \tag{13}$$

in which the time t no longer appears. If further there is adjoined the condition that the function ψ is to vanish at infinity, we obtain a linear boundary value problem of classical (Hermitian) type.

The fundamental rule of non-relativistic quantum mechanics for determining the atomic frequencies can now be formulated as follows: *the characteristic numbers* E_i *in the boundary value problem thus specified are taken to determine the 'energy levels'* E_i *while the spectral frequencies* ν_{mn} *themselves are given by the formula*

$$h\,\nu_{mn}=E_m-E_n, \tag{14}$$

in accordance with the Planck-Einstein law.

As a matter of fact, this program has had to be modified considerably by the introduction of 'electron-spin' and the use of a further arbitrary rule given by the Pauli exclusion principle.

In the program of quantum mechanics as thus far specified there is no provision for taking account of the relativistic framework appropriate to the electro-magnetic field. As a step in remedying this deficiency a somewhat analogous but distinct point of departure was suggested by Schrödinger. This is as follows. We begin by writing down the relativistic equations for the motion of an electron in the field produced by a static proton at at the origin of co-ordinates. However, instead of using the co-ordinates x, y, z, of the ordinary Cartesian type, we now employ the four-dimensional co-ordinates, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=cit$ appropriate to the space-time of the special theory of relativity, while taking the proper time s as a new independent variable. In this way we are again led to a dynamical system of Hamiltonian type with principal function

$$K\equiv\sum_{i=1}^{4}(y_i-e\Phi_i)^2 \tag{15}$$

where $e\Phi_1, \cdots, e\Phi_4$ denote the four components of the usual vector potential associated with the charge e at the origin. This principal function K does not correspond to the total energy since we have $K=0$ for any possible motion. In this case we are at first led to use the symbolic equation

$$K(\psi,\lambda)\equiv\left[\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x_i}-e\Phi_i\right)^2\right]\psi=0 \tag{16}$$

as the conjectural relativistic wave equation. Here $K=0$ is taken to be the multiplier equation.

Unfortunately, this type of relativistic wave equation does not lead to the desired 'fine structure' formula for the spectral lines of hydrogen, since it introduces certain half integral quantum numbers in place of the correct integral values appearing in the Sommerfeld formula.

3. *The Dirac Equations.*

An obvious suggestion which now arises is to take as the starting point a *system* of linear parametric wave equations rather than a single wave equation; in particular the single particle problem suggests the possibility of beginning with four parametric wave equations of the first order in four dependent variables $\psi_1, \cdots, \psi_4$ and the four independent variables x_1, x_2, x_3, x_4. If we take the simplest possible case of a free particle, it is natural to expect that the coefficients in the differential equations then reduce to mere constants, and that the wave packets necessarily follow the beam of light in this case. Evidently such a parametric wave equation may be given the form:

$$\sum_{j,k=1}^{4} c_{ijk} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} + \psi_i = 0, \qquad (i = 1, \cdots, 4), \tag{17}$$

with multiplier equation

$$P \equiv \left| \sum_{k=1}^{4} c_{ijk} y_k + \delta_{ij} \right| = 0 \quad (\delta_{ij} = 0,\ i \neq j;\ \delta_{ii} = 1)$$

where we must have essentially

$$P \equiv \Delta(\Delta + p^2) \qquad (\Delta \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + 1) \tag{18}$$

if the wave packets are to follow a rectilinear path with the velocity of light.

Now the simplest way in which the multiplier equation $P = 0$ might take the desired form is for all third order minors in P to contain Δ as a factor. As I mentioned in my article of 1927 referred to above, this leads directly to a determination of the constants c_{ijk} which is the same as that given by Dirac.

How then are we going to pass to the more general case where the electron moves in a general static electro-magnetic field? The well-known formalism of the theory of electro-magnetism suggests immediately that the proper equations will be obtained by replacing $y_1, \cdots, y_4$ by $y_1 - e\Phi_1, \cdots, y_4 - e\Phi_4$ respectively. It is found that this heuristic process yields a linear boundary value problem of Hermitian type leading to the correct fine-structure formula for the hydrogen atom. Thus, by a process of genial conjecture, a rule for obtaining spectral frequencies has been devised. However, this leaves quantum mechanics in a position analogous to that of theoretical astronomy after the discovery of Kepler's laws. In fact, calculations of spectral frequency can be made with a considerable degree of accuracy; but a proper conceptual background is lacking. If this be the case, we may well look for a conceptual theory which explains quantum mechanical laws much as the gravitational theory of Newton explained the laws formulated by Kepler.

In Part III of the present paper I have ventured to present an attempt at the construction of such a conceptual theory.

Part II.

Critique of Previous Physical Theories.

1. *Some Mathematical Difficulties in Classical Physics.*

In trying to construct a conceptual model useful for quantum mechanics I have found it of great service to take explicit account of certain mathematical difficulties inherent in the earlier physical models.

At the very outset we may lay to one side the difficulties which physicists felt to be present in the Newtonian Law of Gravitation, such as 'action at a distance'. In fact the relativistic theory of gravitation due to Einstein fits naturally into the conceptual scheme here proposed.

The first difficulty (1) to which I wish to call special attention is that of *indeterminacy*. This arises when we use the rigid bodies and particles of classical dynamics as models. If, for example, we attempt to build the kinetic theory of gases upon the model of an assemblage of equal rigid spherical molecules, the difficulty of indeterminacy arises as follows. Suppose that three equal spheres approach a point with equal velocity, while the lines of motion of the centers are 120° apart and in the same plane. If the spheres collide simultaneously, considerations of symmetry indicate that they must rebound back along the lines of approach with the same velocity as that of approach. But it is easily shown that if two of them collide ever so little sooner than these two collide with the third, the resulting motion will be decidedly different in character. Similar difficulties of indeterminacy occur when three or more mass particles, attracting one another according to the Newtonian Law, collide simultaneously.

Another difficulty (2) is that of *excessive collision velocities*. Suppose, for example, that two steel spheres approach one another with a relative velocity which exceeds twice the velocity of sound in steel. In this case the usual elastic theory will no longer avail to follow the motion after collision, inasmuch as the disturbance created by the impact cannot be propagated sufficiently rapidly.

A kindred difficulty (3) is that of a tendency towards *disorganized motion,* which is usually ignored in dealing with fluids or elastic bodies. Suppose that a perfectly elastic body is set in a simple state of vibration. Then, except in rare cases, the motion will tend to become more and more irregular in microscopic character, although the total kinetic energy remains fixed. Evidently the resulting state of disorganized motion involves fundamental difficulties of observation and prediction. This difficulty is sometimes thought of as a tendency towards indefinite increase in frequency of vibration (e. g. the so-called 'violet catastrophe').

In the early development of electro-magnetic theory there was used the model of an electro-magnetic ether. This involved the concepts of absolute space and time. It was found, however, that the space and time which belonged to this model was not that called for by the physical facts. It was the recognition of the difficulty (4) in the *framework of classical space and time* which led, of course, to the space-time of the special theory of relativity.

3. *Some Mathematical Difficulties in Relativistic Physics.*

With the discovery by Einstein of the special theory of relativity, the difficulty (4) disappeared of course, and a deeper understanding of the electro-magnetic equations of Maxwell-Lorentz was obtained. However, formidable new difficulties arose in its place, of which I will only mention two.

If we attempt to use the notion of a 'point charge', it immediately appears that the difficulty (5) of *infinite available energy* will arise.

Furthermore, if we regard electricity as attached to spatially distributed matter, the enormous repulsive forces thereby introduced would lead to the difficulty (6) of *instability.* In connection with the difficulty of instability it is to be borne in mind that, with the space-time of relativity, it has not been possible to find a satisfactory counterpart of the rigid body or elastic solid, by the aid of which it was possible to secure stability for a charged body in the earlier theory.

Finally, I will mention another difficulty, present when we use either the framework of space and time of the special theory of relativity or that of classical physics, namely the difficulty (7) of the *non-existence of simple neutral states.* In fact, according to these theories, positive and negative electricity can never be superposed and so electric fields must always exist. Nevertheless in Nature there is observable a general tendency towards neutralization. From the philosophical point of view it appears to me likely that such neutralization can occur.

The difficulties (1) to (7) seem to me the essential difficulties of mathematical type which have arisen in the use of conceptual models in physics. I believe that physical theorists in the past have paid far too little attention to difficulties of this type.

3. *A General Criticism of Quantum Mechanical Theories.*

Current theories of quantum mechanics seem to me to be subject to the serious criticism that they involve improvisations and modifications, and thus lack in unitary character. It is as if an astronomer, knowing only the laws of Kepler governing the motion of two bodies, were to feel his way skilfully towards calculating orbits in the three body problem presented by the Sun, Earth, and Moon. He would undoubtedly succeed because the facts of observation would guide his formal conjectures; but his work would not be likely to lead him to the Newtonian law of gravitation since he would be wrong from the start.

Part III.

A Quantum Mechanical Model.

1. *The Perfect Fluid.*

We proceed now to develop a conceptual model which may possibly be of service in connection with quantum mechanics. In seeking such a model, it seems natural to take at first the space-time background provided by the special theory of relativity; this merely amounts to dealing at first with matter in small quantity. The phenomenon of gravitation may be incorporated basically later by methods of general relativity due to Einstein.

The simplest form of matter available in such a background is that of 'inchoate matter', characterized by a single scalar quantity ϱ, the density. If we imagine electricity of density σ in electro-static units attached to such matter, the usual pondero-motive laws together with the Maxwell-Lorentz laws of the electro-magnetic field provide us with a complete mathematical theory. Unfortunately such a distribution of charged inchoate matter will be highly unstable due to electric forces of repulsion.

As a first generalization of such inchoate matter, it is natural to introduce a pressure p which is functionally related to the density ϱ so that $p=f(\varrho)$. In this case, however, the difficulty of excessive disturbance velocities arises if the disturbance velocity in such a fluid is less than that of light. In fact, by the very concept of such a fluid, its parts cannot freely interpenetrate. Hence, if two portions were to collide with a relative velocity exceeding twice the disturbance velocity, the difficulty (2) of excessive collision velocities would enter. It is immediately suggested, therefore, that we require the disturbance velocity to equal that of light. This leads us at once to take the following equation:

$$p = \frac{1}{2}(\varrho - \varrho_0) \tag{1}$$

as the special form of the pressure-density relation in such a 'perfect fluid'.[1] Here ϱ_0 is the density in equilibrium under no pressure.

A fundamental property of this perfect fluid, under the action of any forces whatsoever, is that the ratio ϱ/σ^2 is constant along every world line of the fluid. This follows from the fact that the quantity of matter as measured by

$$\int \varrho e^{-\int \frac{dp}{\varrho}} dv = \int \varrho^{\frac{1}{2}} dv \qquad (dv = dx\,dy\,dz) \tag{2}$$

in rest co-ordinates x, y, z, and the quantity of electricity as measured by

$$\int \sigma dv, \tag{3}$$

are both conserved. We shall write this ratio in the following form

$$\frac{\varrho}{\sigma^2} = \frac{\varphi^2}{\pi}. \tag{4}$$

The scalar φ will be called the 'substance coefficient' of the world line in question.

Such a perfect fluid carrying electricity would not constitute a sufficiently flexible model for our purposes, for it too possesses a strong tendency towards instability. However, except for the difficulties (6) of instability and (7) of the non-existence of neutral states, the fluid would be satisfactory from a mathematical point of view. If, further, we provide for the free interpenetrability of positively and negatively charged matter (proton and electron), the second of these difficulties disappears. This we now do, so that the main task lying before us is that of securing the suitable stable character of positively and negatively charged portions of the perfect fluid when superposed.

Inasmuch as such instability can be avoided in classical physics by the use of the rigid or elastic body as the carrier of electricity, it is immediately

[1] We employ the second, gram, and light-second as units of length, mass, and time.

suggested that some further extension of the concept of the perfect fluid must be made in virtue of which it somewhat resembles the rigid or elastic body in its behavior.

Let us write down the complete set of equations for the perfect fluid as so far defined. These are the usual electro-magnetic equations in tensor form.

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F^{i\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = -4\pi\sigma v^{i} \qquad \left(v^{i} = \dfrac{dx^{i}}{ds};\ F_{ij} = -F_{ji}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial F_{ij}}{\partial x^{k}} + \dfrac{\partial F_{jk}}{\partial x_{i}} + \dfrac{\partial F_{ki}}{\partial x_{j}} = 0, \end{cases}$$

and the pondero-motive equations

$$(6)\qquad \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \sigma F^{i}_{\alpha} v^{\alpha}. \qquad \left(T^{ij} = \varrho v^{i} v^{j} - \frac{1}{2}(\varrho - \varrho_0) g^{ij}\right).$$

Here T^{ij} is the usual energy tensor, and g^{ij} denotes the fundamental (contravariant) tensor.

2. *The Atomic Potential.*

In 1926 (loc. cit.) I generalized the perfect fluid, by introducing certain further body forces due to what I termed an 'atomic potential'. The notion of atomic potential was suggested to me as the most natural and simple formal extension of the perfect fluid. The idea may be presented in the following manner. The force vector f_i due to the electro-magnetic forces is given by the equation $f_i = F_{i\alpha} v^{\alpha}$. In virtue of the skew-symmetry of F_{ij}, this force vector f_i is automatically orthogonal to the velocity vector v^i, *as any force vector must necessarily be.* Therefore, in seeking for available body forces, we look for other forces, which *in virtue of their formal nature* are orthogonal to the velocity vector. The simplest force of this description seems to be that with components $f_i = \partial\psi/\partial x^i$ where ψ is the atomic potential in question, constant in value along each world line; for, in consequence of this constancy we have necessarily the orthogonality desired,

$$(7)\qquad \frac{\partial \psi}{\partial x^{\alpha}} v^{\alpha} = 0.$$

Thus we adjoin to the electro-magnetic forces and the pressional forces, the force $\partial\psi/\partial x^i$ given by the atomic potential gradient.

The energy tensor then generalizes to the form

$$(8)\qquad T^{ij} = \varrho v^{i} v^{j} - \left[\frac{1}{2}(\varrho - \varrho_0) - \psi\right] g^{ij}.$$

The equations (5) and (6) continue to hold as before.

3. *Choice of Substance Coefficients and Atomic Potentials.*

If the scalar densities $\varrho_\pm$ and $\sigma_\pm$,[1] the velocity tensors $v^i_\pm$, the substance coefficients $\varphi_\pm$, the atomic potentials $\psi_\pm$, and the electro-magnetic force tensor F_{ij} are given at any instant of time, it is clear that the values of these are determined for all time by the equations (5), (6), and (7), written above.

Furthermore, if at any instant we have superposed fluids in the neutral state with common velocities, so that $\sigma_+ + \sigma_- = 0$, $v^i_+ = v^i_-$, $F_{ij} = 0$ everywhere, and if the squared substance coefficients and atomic potentials in the superposed fluids are in a fixed constant ratio, namely,

$$(9) \qquad \frac{\psi_+}{\psi_-} = \frac{\varphi_+^2}{\varphi_-^2} = \tan^2\theta \qquad (\theta\text{, a constant}),$$

then it is immediately seen that this neutral state will continue indefinitely. In particular if the initial velocities are taken to vanish, we obtain a static neutral state.

We assume that the atomic system formed by proton plus electron admits such a static state, with constant electrical densities k and $-k$, and possessing spherical symmetry. These hypotheses in conjunction with (9) yield at once the equations

$$(10) \qquad \begin{cases} \psi_+ = (\varphi^2 - \varphi_0^2)\, k^2 \sec^2\theta, \ \psi_- = (\varphi^2 - \varphi_0^2)\, k^2 \csc^2\theta \\ \varphi_+ = \varphi \sec\theta, \ \varphi_- = \varphi \csc\theta, \end{cases}$$

with φ an auxiliary function defined by

$$(11) \qquad \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi_+^2} + \frac{1}{\varphi_-^2} = f(r).$$

while $\varphi_0 = f(r_0)$, where r_0 designates the atomic radius.

In order to complete the characterization of our fluid we suppose further that the arbitrary function $f(r)$ of the radial distance r is quadratic in $1/r$:

$$(12) \qquad \frac{4\pi^2}{\varphi^2} = \alpha^2 - \frac{2\beta\sqrt{\alpha}}{r} + \frac{\gamma}{r^2}.$$

Here α, β, and γ are constants at our disposal.

Finally we have to fix the radius r_0 of the atom. Now $\beta\sqrt{\alpha}$ has the dimensions of reciprocal distance according to our theory. We may write therefore

[1] The subscript + or — is used according as reference is made to a positively or a negatively charged portion of the perfect fluid.

(13) $$r_0 = \frac{\lambda}{\beta\sqrt{a}}$$

where λ is a dimensionless constant. We shall take λ to be large. The quantity $1/\beta\sqrt{a}$ is taken to be exactly the Bohr radius a_0/c (in our units), so that the *outer* 'electrical radius' r_0 of the atom is large in comparison with the *inner* 'mechanical radius' a_0/c (Bohr radius). We assume that the interpenetrability of protons with other protons and of electrons with other electrons ends at the mechanical boundary $r=a_0/c$.

This completes our list of specializing assumptions. It is to be observed that the proposed theory involves five constants

(14) $$a, \beta, \gamma, \theta, k.$$

The number λ is large but unspecified. These five constants are, however, connected by one (arbitrary) relationship

(14) $$\left(\gamma - \frac{\beta^2}{a}\right)^2 = \frac{81\,\beta^8}{16\,a^{\frac{8}{2}}\lambda^4}.$$

The situation here is to be compared with that in usual physical theory where we have the five constants.

$$m, M, e, h, a_0 \qquad \text{(in C. G. S. units)}$$

connected by one (arbitrary) relationship

(15) $$a_0 = \frac{(m+M)\,h^2}{2\pi m M e^2}.$$

The remaining constants of our theory can be expressed in terms of the four independent constants m, M, e, h as follows:

(16) $$a = \frac{mc^2}{h}, \quad \frac{\beta}{\sqrt{a}} = \frac{2\pi e^2}{hc}, \quad \gamma = \left(\frac{2\pi e^2}{hc}\right)^2 + \frac{81}{32\lambda^4}\left(\frac{2\pi e^2}{hc}\right)^8, \quad \tan\theta = \frac{M}{m}.$$

It is very interesting to observe that the quadratic form $4\pi^2/\varphi^2$ is positive definite and differs very slightly from a square so that $2\pi/\varphi$ itself is with high accuracy given by the linear form

$$\frac{mc^2}{h} - \frac{\bar{a}}{r}.$$ [1]

Furthermore, nearly all of the mass of the atom is concentrated in a narrow spherical ring at a radial distance of about $\bar{a}^2 a_0/c$; therefore, the concentration of mass would occur near the surface of the nucleus.

[1] Here $\bar{a}$ denotes the fine-structure constant.

4. *The Atomic Frequency Equations.*

As I showed in my 1926 paper, it is easy to deduce the equation for small vibrations of a superposed proton and electron of the type specified. The three linear frequency equations which result turn out to be

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\Delta+\left(p^2-\frac{4\pi^2}{\varphi^2}\right)\right]X+\frac{2\varphi'}{\varphi}\frac{x}{r}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0\\ &\left[\Delta+\left(p^2-\frac{4\pi^2}{\varphi^2}\right)\right]Y+\frac{2\varphi'}{\varphi}\frac{y}{r}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0\\ &\left[\Delta+\left(p^2-\frac{4\pi^2}{\varphi^2}\right)\right]Z+\frac{2\varphi'}{\varphi}\frac{z}{r}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0 \end{aligned}\right.$$

where Δ denotes the ordinary three-dimensional Laplacian operator and where Xe^{ipt}, Ye^{ipt}, Ze^{ipt} denote the small components of the electrical forces within the atom in the direction of the x, y, z axes respectively, of period $2\pi/p$. In addition to these linear differential equations, which hold within the atom, there are three similar equations

$$(18)\qquad \Delta X+p^2X=0,\ \Delta Y+p^2Y=0,\ \Delta Z+p^2Z=0$$

holding outside of the atom. Of course one has to impose the further conditions that the electrical and magnetic forces are continuous across the boundary of the atom.

Now closer consideration indicates that if the dimensionless constant λ is large (that is, the electrical radius of our atom is large in comparison to the Bohr radius), we way approximate to the above two linear systems by taking the first set of equations to be valid throughout space. We then seek those characteristic values p for which there exist characteristic solutions X, Y, Z of the frequency equations (17) vanishing at infinity. This problem is a homogeneous linear boundary value problem of classical, although not self-adjoint, type.

5. *The Corresponding Characteristic Values and Functions.*

We proceed to sketch some of the facts concerning the solution of this boundary value problem. Let us first obtain all solutions of the special form

$$(19)\qquad X=yF(r,z),\ Y=-xF(r,z),\ Z=0.$$

It will be seen that for these the total electrical density vanishes everywhere and our three equations are replaced by a single equation of the form

$$\left[\Delta+\left(p^2-\frac{4\pi^2}{\varphi^2}\right)\right]X=0 \qquad (X=yF(r,z)).$$

In the explicit determination of F, the Laguerre polynomials enter just as they do in the Schrödinger equations for the hydrogen atom, and one finds that, for solutions vanishing at infinity, we have

$$p^2=\alpha^2-\frac{\beta^2}{(\mu+1+k)^2} \qquad \left(\mu=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{(l+\tfrac{1}{2})^2+\gamma}\right).$$

where k and l are integers with $k\geqq 0$, $l\geqq 1$.

If now we write $n=l+k+1$, and solve for p to terms of the second order in γ (essentially the square of the fine-structure constant $\bar{\alpha}$) we obtain

$$p_{n\,l}=\pm\left(\alpha-\frac{\beta^2}{2n^2}+\frac{\beta^2\gamma}{2n^3}\left[\frac{1}{l+\frac{1}{2}}-\frac{1}{4n}\right]+\right) \tag{20}$$

for $1\leqq l<n$. This would yield the correct fine-structure formula *only* if $l+\frac{1}{2}$ be replaced by l.

So far we have referred to the solutions of the special form (19) of solutions, which all satisfy the condition

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0 \tag{21}$$

and are specially related to the z-axis. But the totality of all solutions (21) forms a linear family invariant under the group of rotations. An elementary group theoretic discussion shows that each characteristic value $\pm p_{n\,l}$ is of multiplicity precisely $2(2l+1)$, inasmuch as the specialized boundary value problem is self-adjoint and the invariant linear family consists of $2l+1$ linearly independent functions.

It remains to consider the rest of the characteristic values of our boundary value problem; namely, those for which (21) fails to hold. In doing so it is found convenient to pass to the corresponding set of equations in

$$w=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z},\quad v=xX+yY+zZ.$$

The new characteristic values $p^*_{n\,l}$, near to $p_{n\,l}$, are found to exist for $l>0$ and are of multiplicity $2(2l+1)$. A single radially symmetric solution exists for $n=1$ with a simple characteristic value p_{10}. *However the modified fine-structure formula* (20)* *is not the correct one obtained from* (20) *by replacing $l+\frac{1}{2}$ by l. Our conclusion is that a slightly different choice of φ is required; if, for example, we replace γ by $-\beta\sqrt{a}$ in* (12) *the desired fine-structure formula is obtained, although this choice is not satisfactory for other reasons.*

6. *Physical Interpretation.*

With the choice of the fundamental constants already specified in (16), the frequency formula (20)* gives in the first approximation the usual Balmer frequency formula, *provided that we accept thc Planck-Einstein law.* Furthermore, the multiplicity of each state is the required by the physical facts.

But the *actual* frequencies obtained from our equation are all close to $mc^2/2\pi h$, and so correspond to energy changes of the order of a million electron volts according to the usual theory. *Let us suppose, as it seems very reasonable to do, that for such high frequencies as this, energy is radiated very slowly from our oscillating atom. Furthermore since the characteristic functions belonging to the characteristic number p_{nl} yield zero electrical moment ($u=0$) we may well suppose that the corresponding radiation can be ignored.*

Inasmuch as the asymptotic formulas for the characteristic functions belonging to p^*_{nl} are expanded in ascending power series in n/λ, it seems likely that the corresponding radiation takes place more rapidly the larger the value of n. For these the electrical moment is not zero.

Now the problem from which we started was not a linear problem, such as is afforded by the usual Schrödinger equation. Hence we need to consider the higher order corrections to the simple harmonic vibrations of the first order $Ae^{\pm pit}$. The second order corrections are of the form $Be^{(\pm p_1 \pm p_2)it}$ and fall into two classes. The first class is that in which the two signs $\pm$ agree; this possibility gives new *high* frequencies, which again we take to radiate energy slowly. The second class is that with opposing signs; namely, $Be^{\pm(p_1 - p_2)it}$.

Thus the desired difference frequencies, hitherto obtained by an application of the Planck-Einstein 'law', enter naturally here and would seem to be precisely the ones at which the energy is radiated.

Evidently the picture presented in this way is highly suggestive and deserves careful further study, although the study is certain to be one of considerable mathematical difficulty.

7. *On Atomic Stability.*

The atom thus defined is endowed with a possibility of stability inasmuch as the perfect fluid used is not physically isotropic. However, in the theory as formulated so far there would only be a semi-stability in the static neutral state, since the superposed fluids would be completely plastic although nearly invariant in volume.[1]

[1] For a critical discussion of stability for the first form of my theory (see [3] p. 207) cf. T. L. Smita (Harvard Dissertation, 1931), *The Birkhoff Fluid Theory of Electricity.*

I propose the following as a simple postulate designed to ensure such stability to the necessary extent: *the mechanical and electrical surfaces of the proton and electron always remain convex in virtue of surface forces of constraint which are called into play when the curvature is about to change sign.*

In consequence of this postulate a convex proton in collision with another such proton would necessarily have a plane surface of contact with it. Likewise atoms under pressure in the neutral static state would take the form of polyhedra, and in all probability a crystalline form would result that is geometrically related to that of the elementary polyhedron.

Under such a law of convex form one would expect the proton and electron to remain approximately spherical under the action of random forces of collision or electro-magnetic forces of the magnitude to be expected in the gaseous condition. Furthermore, because of the laws of conservation of energy and momentum, and the small compressibility of the atom, it would appear that the ordinary kinetic theory of gases would be applicable.

8. *On the Family of Elements.*

From the point of view taken above it is natural to define the neutron as an uncharged portion ($\sigma=0$) of the perfect fluid, with the same atomic potential ψ_+ in the spherically symmetric state as the proton. Similarly the positron would be defined just as the electron, except that the charge density is taken opposite in sign. As for the photon, it might be defined as a point particle carrying an arbitrary 'energy' and moving with the velocity of light, which obeys the ordinary relativistic laws for conservation of energy and momentum when it collides with a proton, electron, neutron, or positron.

We may revise also the usual requirement that separation of colliding fluids takes place when the pressure vanishes ($p=0$). Instead let us suppose that separation takes place when the pressure taken on a certain critical negative value $p=p_0<0$, characteristic of colliding bodies (as proton and neutron). Evidently if we suppose that a small critical tension exists between proton and proton and a large critical tension between proton and neutron, we may expect isolated neutrons to be rare, and something like a family of chemical elements to arise. Furthermore, inasmuch as rest mass is not invariant for our fluid, we should find small deviations in the atomic masses from integral multiples of the mass of the hydrogen atom.

Such are some of the features of a possible atomic model. In laying it before you I do so largely because it seems to me that the possibility of a conceptual treatment of matter and electricity on a relativistic basis has not as yet been carefully explored. The model of which use is made here involves only a natural extension of the simplest type of relativistic perfect fluid as the carrier of electricity. Yet it seems to satisfy many of the mathematical and qualitative requirements which are desirable. Whatever be the fate of this particular model, I hope that it will provoke a more thorough-going study of the conceptual possibilities.

MINKOWSKI'S THEOREMS AND HYPOTHESES ON LINEAR FORMS

By L. J. MORDELL, Manchester.

§ 1. It is more than a quarter of a century since Minkowski died at Göttingen in 1909. His work on Linear Forms originated about 40 years ago and he lectured on it at the Heidelberg Congress as far back as 1902. But despite the numerous new and important fertile developments in number-theory since then, the interest attached to his work and its freshness and fascination are not exhausted. Its suggestiveness and research possibilities are as strong as ever, and it is a continual challenge to the efforts of mathematicians. It may, therefore, be of interest to give here an account of some recent progress on linear forms relating to his famous theorem on homogeneous linear forms and to two of his hypotheses. More emphasis, however, will be laid on arithmetic ideas and methods than on geometric ones.

Let
$$L_r(x) = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, x_s \qquad (r = 1, 2, \cdots n),$$

or say $L(x)$, be n linear homogeneous forms in the real variables x with real coefficients and determinant $|a_{rs}| = \Delta > 0$. Let $c_1, c_2, \cdots c_n$, say c, and $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0, \cdots$, $\omega_n > 0$, say $\omega > 0$, be two sets of n real numbers. All the results arise on considering the solutions in integers x, i. e. lattice points x, of the inequalities

$$-\omega_r < L_r(x) + c_r \leqq \omega_r \qquad (r = 1, 2 \cdots n),$$

or say
$$-\omega < L(x) + c \leqq \omega, \tag{1}$$

or special cases of them. When all the c are zero, the inequalities become

$$-\omega < L(x) \leqq \omega. \tag{2}$$

They define a semi-open hyperparallelepiped of volume $2^n \Pi\omega / \Delta$ and have a trivial solution $x = 0$, i. e. the lattice point O, which in general is of no importance.

Minkowski's general theorem is as follow:

Theorem. If $\Pi\omega \geqq \Delta$, a lattice point $x \neq 0$ exists such that

$$|L(x)| \leqq \omega. \tag{3}$$

This theorem, say M, is now fundamental in number theory in many different parts of which it has important applications. His original proof was based on the Geometry of Numbers, a subject which he originated and developed. The subsequent arithmetic proofs due to Hilbert and Hurwitz are some forty years old. A rather different geometric idea was introduced by Blichfeldt in 1914 which was presented arithmetically in a more simple way by Remak in 1927.

A new method was introduced in 1922 by Siegel who showed that M was an immediate consequence of an expansion found by complex integration. I showed later that this expansion was an obvious application of Poisson's summation formula in n variables which can be stated formally as follows. Let $F(x)$ stand for $F(x_1, x_2, \cdots x_n)$ and similarly $G(y)$; then

$$\sum_{-\infty}^{\infty} F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} G(y),$$

where

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{2\pi i \Sigma t y}\, \Pi\, dt. \tag{4}$$

Put now $F(x) = 0$ or $f(x)$ according as x does not or does satisfy all the inequalities

$$-\omega < L(x) + c \leq \omega \quad \text{or say,} \quad -\omega < \xi \leq \omega, \tag{5}$$

the integration in (4) being simpler on changing from x to ξ. Thus denote by (A_{rs}) the matrix defined by $(A_{rs})(a_{rs}) = \Delta E$, where E is the unit matrix. Then from (5)

$$\Delta x_1 = A_{11}(\xi_1 - c_1) + A_{12}(\xi_2 - c_2) + \cdots + A_{1n}(\xi_n - c_n),$$

and so

$$\Sigma f(x) = \Sigma g(y), \tag{6}$$

where

$$\Delta g(y) = \int_{-\omega}^{\omega} f(\xi) \exp\left(\frac{2\pi i}{\Delta} \Sigma \sigma(\xi - c)\right) \Pi\, d\xi,$$

and

$$\sigma_1 = A_{11} y_1 + A_{21} y_2 + \cdots + A_{n1} y_n \text{ etc.}$$

The summation on the left in x refers to all sets of integers satisfying (5), the sum being replaced by 0 when no such x exist. On the right, the y run through all the integers from $-\infty$ to ∞.

Take $f(x) = \Pi(\omega - |L(x) + c|)$. Then

$$\int_{-\omega}^{\omega} e^{2\pi i \sigma \xi}(\omega - |\xi|)\, d\xi = \begin{cases} \sin^2 \pi\omega\sigma / \pi^2\sigma^2, & \sigma \neq 0, \\ \omega^2, & \sigma = 0, \end{cases}$$

and so

$$\Delta \Sigma \Pi(\omega - |L(x) + c|) = \Pi\omega^2 + \sum_{y=-\infty}^{\infty}{}' \exp\left(\frac{-2\pi i}{\Delta} \Sigma \sigma c\right) \Pi \frac{\sin^2 \pi\omega\sigma/\Delta}{\pi^2\sigma^2/\Delta^2}. \tag{7}$$

In Σ', the term with all the y zero, i. e. all the σ zero, is omitted, and if any lesser number of σ are zero, $\sin^2 \pi \omega \sigma / \pi^2 \sigma^2$ is replaced in each case by ω^2. Siegel's formula is the special case when $c=0$,

$$\Delta \Sigma \Pi (\omega - | L(x) |) = \Pi \omega^2 + \sum_{y=-\infty}^{\infty}{}' \Pi \frac{\sin^2 \pi \omega \sigma / \Delta}{\pi^2 \sigma^2 / \Delta^2}. \tag{8}$$

Hence if $x=0$ is the only lattice point satisfying (3), $\Pi \omega^2 \leqq \Delta \Pi \omega$, i. e. $\Pi \omega \leqq \Delta$; and so if $\Pi \omega > \Delta$, there must be an integer set x other than 0 satisfying (3). Most of the proofs of this theorem begin by assuming $\Pi \omega > \Delta$. The case $\Pi \omega = \Delta$ is really a limiting case dealt with at the end of this section.

The ideas involved in Siegel's proof and my variation are analytic. It is often of considerable interest to investigate the arithmetic ideas underlying analytic proofs of results in number theory and so to deduce arithmetical demonstrations. I found an arithmetical proof of Siegel's expansion by utilizing two results.

The first is the FÉJER kernel: if ω is an integer and λ is arbitrary,

$$\sum_{-\omega < L \leq \omega} (\omega - | L |) \exp \left(\frac{2 \pi i}{\Delta} \lambda L \right) = \sin^2 \frac{\pi \omega \lambda}{\Delta} / \sin^2 \frac{\pi \lambda}{\Delta} \tag{9}$$

or ω^2 according as λ / Δ is not or is an integer.

The second is due to H. J. S. Smith: if all the coefficients a are integers, the n linear forms $L(x)$ acquire for all integers x, only Δ^{n-1} different sets of residues mod Δ, each set occurring Δ times mod Δ.

Consider to begin with the case when all the a, ω, c are integers. Write

$$T = \sum_{l, L} f(L_1, L_2, \cdots L_n) \exp \frac{2 \pi i}{\Delta} \Sigma (L_1 - c_1)(A_{11} l_1 + \cdots + A_{n1} l_n), \tag{10}$$

where the summation extends over two sets of n integers l, L, that for each of the l's being $0, 1, \cdots, \Delta - 1$, and that for L being a set E. Two expressions are obtained for T according as it is summed first for l or L. The sum in l is zero or Δ^n according as the L's do or do not satisfy all the congruences

$$A_{11} (L_1 - c_1) + \cdots + A_{1n} (L_n - c_n) \equiv 0 \pmod{\Delta} = \Delta x_1$$

say, etc., where the x are integers; and then

$$L_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n + c_1 \tag{11}$$

etc. Hence

$$T = \Delta^n \sum_{L} f(L), \tag{12}$$

the Σ referring to the L's of the set E which can be expressed in the form (11).

When (10) is summed first for L, the result cannot be stated explicitly unless we define E and $f(L)$. Take E to be the set $-\omega < L \leqq \omega$ and $f(L) = \Pi(\omega - |L|)$. Then from (9),

$$\Delta^n \Sigma \Pi(\omega - |L(x) + c| = \sum_{l=0}^{\Delta-1} \exp\left(-\frac{2\pi i}{\Delta}\Sigma c\lambda\right) \Pi \frac{\sin^2 \pi\omega\lambda / \Delta}{\sin^2 \pi\lambda / \Delta}, \tag{13}$$

where $\lambda_1 = A_{11} l_1 + \cdots + A_{n1} l_n$ etc.

The Σ on the left refers to the integers x satisfying (1), and there is an obvious convention for the terms on the right with a λ equal to zero. Then (7) follows by putting $\lambda / \Delta = z$ and

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-m)^2}. \tag{14}$$

The new denominators involve the set of numbers $A_{11} l_1 + \cdots + A_{n1} l_n - m_1 \Delta$ etc., given by $0 \leqq l < \Delta$ and $-\infty < m < \infty$. This set, however, runs Δ^{n-1} times through the set defined by $A_{11} l_1 + \cdots + A_{n1} l_n$, $-\infty < l < \infty$. For $r_1, r_2, \cdots r_n$ are a set of residues $A_{11} l_1 + \cdots + A_{n1} l_n$ etc. mod Δ if and only if $a_{11} r_1 + \cdots + a_{n1} r_n \equiv 0 \bmod \Delta$, etc. By Smith's result, there are Δ sets r making $L(r) \equiv 0 \bmod \Delta$, and since there are Δ^n sets of l mod Δ, each of these r sets occurs Δ^{n-1} times. Hence (7) results with σ, y replaced by λ, l.

This result proved for integers a, c, ω obviously holds also for rational a, c, ω. It is not difficult to see from a simple limiting process that the result is true for irrational a, c, ω since $\Pi \sum_{1}^{\infty} 1 / l^2$ is a majoriser for the right hand side of (7).

This proof then suggested to me a different and more directly arithmetic proof of M much simpler and shorter than the known ones. We may assume that the a's and ω's are integers as the general case easily follows from this. Then the assumption that $x=0$ is the only solution of the inequalities $|L(x)| \leqq \frac{1}{2}\omega$, i. e. all the sets of integers s satisfying the inequalities $|s| \leqq \frac{1}{2}\omega$ except $s=0$ are sets of non-residues for the forms $L(x)$, makes it a simple matter to write down two sets of non-residues whose corresponding differences give a solution of $|L(x)| \leqq \omega$.

More generally it can be proved in the same way that if μ, ν are two sets of n non-negative numbers for which

$$\Pi \mu + \Pi \nu \geqq \Delta, \tag{15}$$

then at least one of the three sets of inequalities

$$|L(x)| \leqq \mu, \qquad |L(x)| \leqq \nu, \qquad |L(x) + c| \leqq \frac{1}{2}(\mu + \nu) \tag{16}$$

has a solution besides the trivial solution $x=0$ of the first two sets. This is more general than M and is not a particular case of van der Corput's recent general theorem.

The idea in this proof then led me to a third proof of M which is as simple and short as could be desired. It also had the great advantage of easy generalization as shown by van der Corput, and practically laid bare the arithmetic ideas really underlying some of Minkowski's work on the Geometry of Numbers. The proof is as follows.

Let t be any large integer and denote by N the number of points of P, the hyperparallelepiped defined by (3), whose coordinates are of the form y/t where the y's are integers. Draw with centres at these points rectangular hyperparallelepipeds with sides of length $1/t$. Since P has volume $2^n \Pi \omega | \Delta$, and $\Pi \omega > \Delta$,

$$\lim_{t \to \infty} (N / t^n) = 2^n \Pi \omega / \Delta > 2^n.$$

Hence if t is large enough, $N > 2^n t^n$. Since the y's have only $2^n t^n$ sets of residues mod $2t$, there must be two different sets, y_1, y_2 say, with the same set of residues mod $2t$. Then from the convexity and symmetry of P about O, $(y_1 - y_2)/2t$ is a lattice point within P.

A similar idea was discovered geometrically by Hajós.

There still remains the question of replacing the condition $\Pi \omega > \Delta$ by $\Pi \omega \geqq \Delta$. Suppose then that $\Pi \omega = \Delta$, and consider the n inequalities

$$|L_n(x)| \leqq \omega_n (1+\varepsilon)^n, \quad |L_r(x)| \leqq \omega_r / (1+\varepsilon), \quad (r = 1, 2, \cdots; n-1),$$

where ε is an arbitrarily small positive number. They have always a solution $x \neq 0$, since $\omega_n (1+\varepsilon)^n \prod_1^{n-1} \omega_r / (1+\varepsilon) = (1+\varepsilon) \Pi \omega > \Delta$.

As $\varepsilon \to 0$, the magnitude of the solutions is bounded, and so the inequalities will hold for at least one integer set x independent of ε, and hence the inequalities

$$|L_n(x)| \leqq \omega_n, \quad |L_r(x)| < \omega_r \quad (r = 1, 2, \cdots; n-1)$$

will always have a solution $x \neq 0$. Similarly if L_n is replaced by any other of the L's.

The problem now arises, whether the remaining $\leqq$ sign can be replaced by a $<$ sign. If not, then for all sets x of integers, except the set $x=0$, at least one of the $L(x)/\omega$ has modulus $\geqq 1$. The corresponding system of forms gives the boundary case of Minkowski's theorem; and we have the first hypothesis of Minkowski.

§ 2. *Hypothesis M I.* If $\Pi\omega = \Delta$, the inequalities

$$|L(x)| < \omega \tag{1}$$

have no solutions in integers x except $x=0$ if and only if the $L(x)/\omega$ assume the form

$$L_s(x)/\omega_s = a_{s1}x_1 + \cdots + a_{s,s-1}x_{s-1} + x_s \quad (s=1, 2, \cdots n) \tag{2}$$

by means of a unitary linear transformation of the x's, i. e. with integer coefficients and determinant unity, and a permutation of the L's. It is easy to prove the condition is sufficient. Minkowski believed at one time that he had a general proof of the necessity, and published geometric proofs for $n=2, 3$ in 1907. Jansen, who was stimulated and encouraged by Minkowski, gave a proof for $n=4, 5, 6$ in a dissertation published in 1909. The demonstration is arithmetic but is not altogether free from geometric presentation. Beppo Levi gave in 1910 a geometric proof in which in 1930, Keller discovered an error which Levi has not rectified. Levi also gave for $n=2, 3, 4$ arithmetic proofs not free from geometric presentation. Siegel stated in 1921 that a general proof could be deduced without difficulty from his result (8) of § 1, but he has since said that he does not know if this is so. Keller in 1930 stated that $M\,I$ holds for $n=5$ and Schmidt gave a geometric proof for $n=7$ based on a result by Keller. Statements have also been made that van Oss has a geometric proof for general n.

Most of the work on the subject, especially for particular values of $n>3$, involves a multiplicity of details which make it not an easy matter to grasp completely or verify the proofs or to give any short account of them. There are not many regions where it seems so easy to fall into error as with attempts, both geometric and arithmetic, at proofs of $M\,I$.

Minkowski showed that the exact geometric equivalent of the fact that (1) has no solution except $x=0$ is that the parallelepipeds defined by $|L(x-y)| \leqq \omega$ fill the whole x space completely and without overlapping when their centres y run through all the lattice points in n dimensions. The conjecture asserts that there then exists a pair of hyperparallelepipeds which have the whole of an $(n-1)$ dimensional face in common. This is simple enough in two dimensions but geometric arguments in n dimensions are sometimes not easily apprehended.

The enunciation of MI shows that an obvious arithmetic consequence would be that at least one of the forms $L(x)/\omega$ has all its coefficients integers with no common factor. If this could be proved, the truth of MI would follow by induction on reducing such a form to x_1/ω_1 by a unitary transformation. The proof of the consequence is tantamount to showing that two lattice points y, z exist such that with a suitable notation,

$$L_1(y)-L_1(z)=\omega_1, \quad L_r(y)-L_r(z)=0, \ (r=2,3,\cdots n),$$

i. e. a lattice point x exists such that

$$L_1(x)=\omega_1, \quad L_r(x)=0, \quad (r=2,3,\cdots n) \tag{3}$$

It is also quite easy to see that if MI is true for $n=m$, it holds for $n<m$.

Efforts have been made at a proof of MI by using Siegel's expansion (8) of § 1, and important results have been deduced. The boundary case occurs if and only if

$$\Sigma\, \Pi(\omega-|L(x)|)=\Pi\,\omega=\Delta,$$

i. e.
$$\Sigma'\, \Pi \sin^2\left(\frac{\pi\omega\sigma}{\Delta}\right)\Big/\sigma^2=0,$$

i. e.
$$\Pi \sin\frac{\pi\omega\sigma}{\Delta}\Big/\sigma=0, \tag{4}$$

or for all lattice points $y \neq 0$, at least one of the n linear forms

$$\frac{\omega_r}{\Delta}(A_{1r}y_1+A_{2r}y_2+\cdots+A_{nr}y_n) \quad (r=1,2,\cdots,n),$$

assumes a non zero integer value.

Keller states that it is by an extension of this result of Siegel's that a proof for $n=5$ follows.

Siegel's expansion suggests to me a method of attack resulting in a new combinatory problem. It is easily grasped, is of interest in itself and leads to a proof of MI for the smaller values of n. Suppose to begin with that all the a, ω, c are integers.

In (10) of § 1, take E to be the set $-\omega<L\leqq\omega$, and $f(L)=\varphi_1(|L_1|)\,\varphi_2(|L_2|)\cdots$, where $\varphi_1(|L_1|)$ is a function of $|L_1|$ only, etc. Sum first for the L's. If every term vanishes because of (4) except possibly the first, simple expansions will follow. It suffices if the φ's are such that

$$\sum_{-\omega < L \leq \omega} \varphi(|L|) \exp\left(\frac{2\pi i}{\Delta} \lambda L\right) \tag{5}$$

vanishes when

$$\sin \frac{\pi \omega \lambda}{\Delta} \Big/ \sin \frac{\pi \lambda}{\Delta} = 0$$

where $\lambda_1 = A_{11} l_1 + \cdots + A_{n1} l_n$ etc., or if

$$\Phi = \sum_{-\omega < L \leq \omega} \varphi(|L|) \exp\left(\frac{2\pi i k L}{\omega}\right) = 0,$$

where k is any integer $\not\equiv 0 \pmod{\omega}$.

A suitable condition for φ is

$$\varphi(x) + \varphi(\omega - x) = \varphi(0) + \varphi(\omega),$$

i. e.

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{\omega}{2} - x\right) + C \tag{6}$$

where C is independent of x, and $\psi(x)$ is an odd function of x, i. e. $\psi(x) = -\psi(-x)$.

For on grouping all the terms in pairs corresponding to $L = 0, \omega$; $1, -(\omega - 1)$; $2, -(\omega - 2)$; etc.

$$\Phi = (\varphi(0) + \varphi(L))\left(1 + \exp\frac{2\pi i k}{\omega} + \cdots + \exp\frac{2\pi i k}{\omega}(\omega - 1)\right) = 0.$$

Hence if all the φ's are as in (6).

$$\Delta \sum \varphi_1(|L_1|)\, \varphi_2(|L_2|) \cdots \varphi_n(|L_n|) = \Pi \omega\, (\varphi(0) + \varphi(\omega)), \tag{7}$$

where the sum on the left refers to the L's in the intervals $-\omega < L \leqq \omega$ which can be expressed in the form (11) of § 1 with integer x, i. e. $L = L(x) + c$ and

$$-\omega < L(x) + c \leqq \omega. \tag{8}$$

The right hand side of (7) arises since all its terms are zero except when $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \cdots \equiv \lambda_n \equiv 0 \pmod{\Delta}$.

These give

$$\Pi\,(\varphi(\omega - 1) + \varphi(\omega - 2) + \cdots + \varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(\omega)) = \Pi \omega\, (\varphi(0) + \varphi(\omega))$$

on grouping $\varphi(0), \varphi(\omega)$; $\varphi(1), \varphi(\omega - 1)$ etc. This also vanishes if at least one $\varphi(x) = \psi\left(\frac{\omega}{2} - x\right)$ where $\psi(x) = -\psi(-x)$.

Take each of the φ's to be one in (7). Hence there are exactly $N = 2^n$ lattice points x, say also E, satisfying (8).

More generally on taking the sums of arbitrary ψ polynomials, we see from (7) that if $f(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ is a polynomial in the $r \leqq n$ variables $x_1, \cdots, x_r$ for which $f(x_1, x_2, \cdots, x_r) = -f(-x_1, x_2, \cdots, x_r)$ and similarly for $x_2, \cdots, x_r$, then

$$\sum_E f((\tfrac{1}{2}\omega_1 - |L_1(x)+c_1|), \cdots, (\tfrac{1}{2}\omega_r - |L_r(x)+c_r|)) = 0,$$

the sum being extended over the lattice points x satisfying (8).

Let us now introduce a slight change in notation putting

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\omega_1}|L_1(x)+c_1|, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\omega_2}|L_2(x)+c_2|, \text{ etc.,}$$

and $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \cdots$ with $r=1, 2, \cdots N$ corresponding to the N lattice points of the set E. Then

$$\sum_{r=1}^{N} f(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \cdots) = 0, \tag{9}$$

where f is a polynomial in each of whose terms, each of the variables occurs to an odd or zero power. Hence the $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ satisfy an infinity of equations which can only be in virtue of a finite number of relations between the $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ Take the particular case $\Sigma \alpha_r^{2m+1} = 0$, $(m=0, 1, 2, \cdots)$. An obvious determinant eliminant gives

$$\prod_{r=1}^{N} \alpha_r \prod_{r=1,\, s>r}^{N} (\alpha_r^2 - \alpha_s^2) = 0. \tag{10}$$

Suppose now that the c's are such that no $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ is zero. Clearly at least two of the $|\alpha|$ are equal. From (10), we may assume that all such relations are given by $\alpha_{\lambda_1} = \pm\alpha_{\lambda_2}$, $\alpha_{\lambda_3} = \pm\alpha_{\lambda_4}$, etc., where the λ's are numbers of the set $1, 2, \cdots, N$ except that $\lambda_1 \mp \lambda_2$, $\lambda_3 \mp \lambda_4$, etc. If we then collect the terms involving the same $|\alpha|$, we see that the α's may be divided into sets each set including all the α's with the same $|\alpha|$. Take now the special cases of (9), $\Sigma \alpha_r^{2m+1}\beta_r^{2n+1} = 0$, keeping n fixed for the moment and taking $m=0, 1, 2, \cdots$. Group together the terms involving the same $|\alpha|$. It is clear that the new coefficients of the powers of the α's must all vanish and we have sets of relation of the form $\Sigma \pm \beta_r^{2m+1} = 0$, there being as many sets as there were different $|\alpha|$, and the $\pm$ sign depending on the particular α_r. Hence as before, on taking $m=0, 1, 2, \cdots$, and also the equations in (9) involving only the β's, we can deduce a set of relations of the form $\beta_{\mu_1} = \pm\beta_{\mu_2}$, $\beta_{\mu_3} = \pm\beta_{\mu_4}$, etc. We are finally led to

Problem I. Enumerate all the sets of relations of the form

$$\begin{aligned} &\alpha_{\lambda_1} = \pm\alpha_{\lambda_2}, \ \alpha_{\lambda_3} = \pm\alpha_{\lambda_4}, \cdots; \\ &\beta_{\mu_1} = \pm\beta_{\mu_2}, \ \beta_{\mu_3} = \pm\beta_{\mu_4}, \cdots; \\ &\cdots\cdots \quad , \cdots\cdots \quad , \cdots; \end{aligned} \tag{11}$$

where the λ's, μ's, $\cdots$ are any members of the set $1, 2, \cdots\cdot N$ except that $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 \neq \lambda_4$, $\cdots$, $\mu_1 \neq \mu_2$, $\cdots$, which imply all equations of the type (9), or what is really the same thing enumerate all sets of relations (11) which imply the system of 2^n-1 equations involving n sets of 2^n variables,

$$\begin{array}{llll} \Sigma\alpha=0, & \Sigma\beta=0, & \Sigma\gamma=0, \cdots; & \\ \Sigma\alpha\beta=0, & \Sigma\alpha\gamma=0, & \Sigma\beta\gamma=0, \cdots; & \\ \Sigma\alpha\beta\gamma=0, & \Sigma\alpha\beta\delta=0, & \cdots; & \cdots; \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots. \end{array} \tag{12}$$

For it is clear that the relations between the α's, β's, etc. are such that (9) is satisfied in virtue of the cancellation of corresponding pairs of terms. It of course is still satisfied when every term $\alpha^l \beta^m \cdots$ is replaced by $\alpha\beta\cdots$, and conversely if (12) is satisfied by such a cancellation, so is (9).

It has been assumed in (9) that the a, c, ω are integers, but (4) from which they are deduced holds for all real a, c, ω. It may therefore be expected that (9) also holds for irrational a, c, ω, and in fact an argument of the type applied to (13) of § 1 will prove this. We can assure the uniform convergence of the corresponding infinite series by taking instead of the f of (9), the product of f by a sufficiently high power of $\Pi(\alpha^2-\frac{1}{4})$ or $\Pi(\omega-|L(x)+c|)\,\Pi|L(x)+c|$. Then if we impose the restriction upon c that none of the $\omega-|L(x)+c|$, $|L(x)+c|$ vanish, we still deduce the eliminant (10) and the same results as before. In taking the limit for the irrational case, an inequality $-\omega<L(x)+c\leqq\omega$ becomes $|L(x)+c|\leqq\omega$, but nothing is lost because of the restriction on c.

We now consider the meaning of the relations $\alpha_r=\pm\alpha_s$. We suppose that by a slight change in the c's if need be, i. e. a slight displacement of a parallelepiped, that a relation $\alpha_r=\alpha_s$, i. e. $|L_1(x^{(r)})+c_1|=|L_1(x^{(s)})+c_1|$ implies

$$L_1(x^{(s)}-x^{(r)})=0. \tag{13}$$

This means only that we are excluding an enumerable set for the c's. Similarly we may assume that $\alpha_r=-\alpha_s$, i. e. $|L_1(x^{(r)})+c|+|L_1(x^{(s)})+c|=\omega_1$ implies

$$L_1(x^{(s)}-x^{(r)})=\pm\omega_1. \tag{14}$$

Hence on noting (3) we are led to

Problem II. For a particular value of n, does every system of relations (11) include one typified by $\alpha_1=-\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$, $\gamma_1=\gamma_2$, $\cdots$ after permutation of letters or suffixes?

If it does, then (13), (14), (3) show that $M\,I$ holds for this value of n.

We can now dispose of the cases $n=2, 3$.

Thus for $n=2$,

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&=0, \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4&=0, \\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4&=0. \end{aligned} \tag{15}$$

Suppose first that only one relation in (11) contains α_1, so that $\alpha_1+\alpha_2=0$, $\alpha_3+\alpha_4=0$, say, and $\alpha_1 \neq \pm\alpha_3$, $\alpha_1 \neq \pm\alpha_4$. Then from the last equation in (15), $\beta_1=\beta_2$, $\beta_3=\beta_4$, and the middle one now gives $\beta_1+\beta_3=0$. Hence this solution can be written as

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & -\alpha_1, & \alpha_3, & -\alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_1, & -\beta_1, & -\beta_1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

where the fourth column, e. g., means that $\alpha_4=-\alpha_3$, $\beta_4=-\beta_1$, etc. In fact (16) gives the general solution on permuting the α, β, and the suffixes 1, 2, 3, 4. For the same type arises if there are two independent β's. Hence we need only consider the case when all the four α's are equal except for signs, and similarly for the β's. We may assume that $\beta_1=\beta_2=-\beta_3=-\beta_4$, and so $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=0$. Hence $\alpha_1=-\alpha_2$, $\alpha_3=-\alpha_4$ and this solution is included in (16).

When $n=3$, the system of seven equations in (12) is found in a similar way to have two distinct types of solutions. The first is

$$\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, & -\alpha_1, -\alpha_1, -\alpha_1, -\alpha_1, \\ M_2, & M'_2 \end{matrix} \tag{17}$$

where the matrix M_2 denotes that $\begin{matrix}\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4,\end{matrix}$ is a solution of a system such as (15), e. g. it might take the form $\begin{matrix}\beta_1, -\beta_1, \beta_3, -\beta_3 \\ \gamma_1, \gamma_1, -\gamma_1, -\gamma_1\end{matrix}$, and similarly for M'_2 with $\begin{matrix}\beta_5, \cdots \\ \gamma_5, \cdots\end{matrix}$ etc. The second is

$$\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, & -\alpha_1, -\alpha_1, & -\alpha_1, \alpha_1, -\alpha_1, \\ \beta_1, -\beta_1, \beta_3, \beta_3, \beta_3, & -\beta_3, -\beta_3, -\beta_3, \\ \gamma_1, \gamma_1, & -\gamma_1, \gamma_4, -\gamma_4, \gamma_1, -\gamma_1, -\gamma_1. \end{matrix} \tag{18}$$

It is obvious that for $n=2, 3$, every solution contains two columns typified by $\alpha_2=-\alpha_1$, $\beta_2=\beta_1$, $\gamma_2=\gamma_1$, etc., and so MI is proved for $n=2, 3$.

The enumeration of the relations becomes complicated for $n \geqq 4$, but perhaps this is not necessary to answer Problem II.

§ 3. This final section deals with the product of non-homogeneous forms for which there is the

Hypothesis M II. Integers x exist such that

$$\Pi \mid L(x) + c \mid \leqq K_n \Delta, \tag{1}$$

i. e. K_n is independent of the a's and c's, depending only on n, and 2^{-n} is the best possible value of K_n.

Minkowski proved this for $n=2$, but the first results of this kind with various values for K_2 were given long ago by Tchebycheff and Hermite. In recent years, many writers e. g. Remak, Mordell, Landau and others have also proved $M\,II$ for $n\cdot 2$. For $n=3$, Remak proved $M\,II$, the proof depending upon the theory of ternary quadratics and being very remarkable though it is long, detailed and complicated. Hofreiter states that Furtwängler has found a shorter proof but this has not been published.

For all n, there is the comparatively simple case when $a_{rs}=0$ for $s>r$, and of forms equivalent to these by a unitary substitution and in particular those when all the a's are rational. Then, the proof of $M\,II$ is very easy. But excluding these, no results are known for $n>3$ with any K_n. For $n=4$, however, Hofreiter attempted a proof based on Remak's method. Unfortunately, as Remak pointed out, there is an error which Hofreiter has not been able to correct.

My unsuccessful efforts to find some value for K_n have led to the interesting

Problem III. For given forms $L(x)$, does a constant k_n independent of the a's, and n numbers ω with

$$\Pi\, \omega = k_n \Delta,$$

exist, such that $x=0$ is the only integer solution of $\mid L(x) \mid \leqq \omega$? If so, what is the best possible value k_n^* of k_n.

Or geometrically, can a hyperparallelepiped be constructed so as to be symmetrical with respect to O, to have given directions of faces and volume $2^n k_n$ where k_n is independent of the faces and to have no interior lattice points except O?

If k_n exists, consideration of the homogeneous $(n+1)$ inequalities

$$\mid L(x) + c\, x_{n+1}\, (l_n!) \mid \leqq \omega, \quad \mid x_{n+1} \mid \leqq 1 / k_n,$$

where $l_n = [1 / k_n]$, shows at once that K_n exists and that $K_n \leqq k_n\ (l_n!)^n$

When $n=2$, I have shown easily that k_n exists and $k_2 = \frac{1}{2}$ is a suitable value. Mr. Szekeres has shown with the aid of Mr. Chao Ko that $k_2^* = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, i. e. it is always possible to draw a parallelogram symmetrical with respect to O with any given directions of sides and of area $\geqq 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ so as to enclose no lattice points except O in its interior;

and that when the sides have certain directions e. g. slopes $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$, any parallelogram symmetrical with respect to O, of area $2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ and with no interior lattice points except O, has lattice points not coinciding with a vertex on each of its sides.

When $n=3$, Mr. Szekeres has shown that k_3 exists and that $k_3^* \geqq \frac{1}{6}$ which Messrs. Erdös and Grünwald note can be improved to $k^* \geqq \frac{1}{4}$, but the best possible value is not known.

I know of no results when $n \geqq 4$.*

References

are given in Koksma's most valuable "Diophantische Approximationen", Ergebnisse der Mathematik, 4 (1936). Some papers at present in course of publication are

MORDELL, L. J. "Homogeneous linear forms in algebraic fields." Quarterly Journal of Mathematics. 8 (1937).

— "An arithmetical theorem on linear forms." Acta Arithmetica. 2 (1937).

— "Note on an arithmetical problem on linear forms." Journal of the London Mathematical Society. 12 (1937).

SZEKERES, G. "On a problem of the lattice plane." Ibid. 12 (1937).

— "Note on lattice points within a parallelepiped." Ibid. 12 (1937).

KO, CHAO. "Note on the lattice points in a parallelepiped." Ibid. 12 (1937).

* I am greatly obliged to Dr. R. Rado for comments on my manuscript.

GEOMETRIE DER RIEMANNSCHEN FLÄCHEN

Von Lars V. Ahlfors, Helsingfors.

1. Riemanns einfache Idee, mehrfach bedeckte Gebiete der komplexen Ebene als Existenz- und Wertbereiche von Funktionen zu betrachten, gehört zu den genialsten Kunstgriffen der gesamten Mathematik. Mit einem kühnen Gedankenzug werden alle Schwierigkeiten bei der Theorie der mehrdeutigen und impliziten Funktionen eliminiert und eine ein-eindeutige Abbildung hergestellt. In Einfachheit ist Riemanns Methode dem Verfahren von Weierstraß weit überlegen, aber leider hat Riemann die Schwierigkeiten bei der Präzisierung seines grundlegenden Begriffs des „mehrfach bedeckten Gebiets" nicht recht eingeschätzt, und darin liegt wohl der Grund zu der vorherrschenden Stellung der Weierstraß'schen Funktionentheorie bis zur allerneusten Zeit.

Versucht man den Riemannschen Gedanken axiomatisch zu begründen so bieten sich zwei Wege dar. Entweder läßt man sich von Riemanns späteren Ideen im Zusammenhang mit der metrischen Geometrie leiten, und gelangt dann zu dem von Weyl aufgestellten *metrischen* Begriff einer *Riemannschen Fläche*. Oder man kann aus dem Begriff des mehrfach bedeckten Gebiets die Überdeckung als das wesentliche Merkmal heraussondern, und wird dann zu dem rein *topologischen* Begriff einer *Überlagerungsfläche* geführt. Die zentralen Aufgaben der Funktionentheorie können letzten Endes auf das gegenseitige Verhältnis zwischen diesen beiden Begriffsbildungen zurückgeführt werden.

Die geometrische Funktionentheorie dient einerseits dazu, die Behandlung analytischer Aufgaben durch die Einführung eines geometrischen Elements anschaulicher und dadurch einfacher zu machen, andererseits kommt es auch vor, daß die selbständige Betrachtung der geometrischen Seite zu einer erweiterten Fragestellung führt, die dann eine einheitliche Behandlung der ganzen Theorie ermöglicht. Ich will in diesem Vortrag dieses Verhalten an dem Beispiel der Wertverteilungstheorie der analytischen Funktionen beleuchten. Die zentrale Aufgabe wurde hier erst rein analytisch formuliert und behandelt. Später wurden geometrische Begriffe und Methoden eingeführt, die eine wesentliche formale Vereinfachung gestatteten. Geht man jetzt noch weiter, indem man die ganze Aufgabe geometrisch formuliert, so kommt man zu einer *Überdeckungstheorie*, die, wie ich glaube, auch inhaltlich eine neue Klarheit und Vereinfachung gegenüber der analytischen Theorie bietet.

Dieser Standpunkt ist in vielen Arbeiten der letzten Jahre implizit vertreten, aber erst durch eine ausdrückliche geometrische Durcharbeitung der allmählich hervorgewachsenen Ideen kommt die Theorie zu ihrer vollen

Geltung. Ich hoffe mit der in diesem Vortrag gegebenen kurzen Zusammenfassung, in der manches leider noch unvollkommen ist, der kommenden Forschung zu dienen.

2. Wegen der nicht ganz einheitlichen Terminologie ist es wichtig mit den Definitionen der grundlegenden Begriffe anzufangen. Man versteht zunächst unter einer *Fläche* einen zusammenhängenden Hausdorff-Raum, dessen Umgebungen einem Kreisinneren homeomorph sind. Gewöhnlich wird außerdem verlangt, daß die Mannigfaltigkeit separabel sei, d. h. sie erfüllt eine Abzählbarkeitsbedingung die mit Triangulierbarkeit äquivalent ist. Eine *Riemannsche Fläche* (R. Fl.) im Sinne von Weyl entsteht, wenn außerdem Folgendes gilt:

1. Zu jeder Umgebung U gehört eine bestimmte umkehrbar eindeutige Abbildung $w=TP$ *auf den Kreis* $|w|=|u+iv|<1$.

2. Wenn $U_1 U_2$ *nicht leer ist, so definiert* $w_2=T_2\,T_1^{-1}w_1$ *eine direkt konforme Abbildung.*

Nach einer wichtigen Bemerkung von Radó folgt die Triangulierbarkeit aus diesen Bedingungen und braucht also nicht postuliert zu werden.

Die zu jeder Umgebung gehörige komplexe Variable w heißt *Ortsuniformisierende* oder besser *lokaler Parameter.* Die inneren Eigenschaften der R. Fl. müssen, im lokalen Parameter ausgedrückt, eine gegenüber konforme Abbildungen invariante Form haben. Man kann demnach eine auf der Fläche gegebene Funktion als analytisch oder harmonisch definieren, falls sie in bezug auf den lokalen Parameter analytisch bzw. harmonisch ist, denn diese Begriffe haben ja die verlangte Invarianzeigenschaft. Dasselbe gilt von der konformen Abbildung einer Fläche auf eine andere.

Es ist noch zu sagen, daß zwei R. Fl. als äquivalent angesehen werden müssen, sobald sie umkehrbar eindeutig und konform aufeinander bezogen werden können. Demnach gibt es nur zwei offene, einfach zusammenhängende R. Fl., der Einheitskreis und die Ebene. Dies hindert natürlich nicht daß man verschiedene Verwirklichungen derselben R. Fl. betrachten kann und muß. Eine der grundlegenden Aufgaben besteht gerade darin, die Identität von zwei explizit gegebenen R. Fl. festzustellen.

3. Wir gehen zum Begriff der Überlagerungsfläche (Ü. Fl.) über. Wir betrachten zwei topologisch gegebene Flächen W und W_0 und eine Transformation $P_0=SP$, welche jedem Punkt von W einen Spurpunkt P_0 auf W_0 zuordnet. Man sagt auch daß P über den Punkt P_0 liegt. Damit eine Ü. Fl. definiert sei verlangen wir, daß S eine sogenannte *innere Transformation* sei. Dieser Begriff wurde von Stoilow eingeführt und kann durch folgende Bedingungen charakterisiert werden:

1. S ist stetig.
2. Offene Mengen werden in offene Mengen übergeführt.
3. Die Punkte P mit $SP=P_0$ liegen isoliert.

Die dritte Bedingung kann nach Stoilow durch eine bedeutend schwächere ersetzt werden.

Es läßt sich zeigen, daß die Abbildung S lokal umkehrbar eindeutig ist, mit der Ausnahme von gewissen isoliert gelegenen Verzweigungspunkten, wo die Abbildung den Charakter einer Potenz besitzt. Die rein topologische Behandlung und Klassifizierung von Ü. Fl. ist von größter Bedeutung für die Funktionentheorie.

Ist W_0 besonders eine R. Fl., so kann man die Winkelmessung von W_0 auf W übertragen, und erhält dann eine neue R. Fl., die als Ü. Fl. einer Riemannschen Grundfläche gegeben ist. Wählt man für W_0 eine einfache, explizit gegebene R. Fl., z. B. die Ebene oder die Riemannsche Kugel, so gelangt man genau zu der von Riemann selbst betrachteten Situation. In unseren Anwendungen wird W_0 eine geschlossene R. Fl. sein.

4. In diesem Vortrag beschäftigen uns die als Ü. Fl. gegebenen R. Fl. Das Hauptproblem lautet: *Welche Eigenschaften einer Ü. Fl. sind innere Eigenschaften der R. Fl., d. h. solche Eigenschaften, die jeder Darstellung einer gegebenen R. Fl. als Ü. Fl. von W_0 zukommen.* Oder anders ausgedrückt, wie erkennt man, daß zwei gegebene Ü. Fl. konform-äquivalent bzw. nicht konform-äquivalent sind. Hierin ist das spezielle Typenproblem enthalten: W sei eine offene, einfach zusammenhängende Ü. Fl. Es gilt zu entscheiden ob sie mit einem endlichen Kreis oder mit der ganzen Ebene äquivalent ist. Im ersten Falle spricht man vom *hyperbolischen,* im zweiten Falle vom *parabolischen* Typus. Alle wesentlichen Ergebnisse beziehen sich auf dieses spezielle Problem, das uns in der Folge ausschließlich beschäftigen soll.

Von welcher Art müssen nun die Eigenschaften sein, durch welche wir den Typus der R. Fl. charakterisieren wollen. Eine naturgemäße Forderung ist, daß sie möglichst explizit durch die Transformation SP ausgedrückt werden können. Hierin liegt eine besondere Schwierigkeit, weil das Darstellungsproblem für die Transformation S von einigen Sonderfällen abgesehen gar nicht angegriffen worden ist. Es wäre in der Tat ein Desideratum, daß man diese wichtige Frage ganz getrennt von dem Typenproblem behandeln würde. Bei diesem Mangel hilft man sich durch das folgende Verfahren aus: Die gegebene Fläche wird durch eine Folge von abgeschlossenen Teilgebieten ausgeschöpft, und für jedes Teilgebiet wird die Anzahl der über einem Spurpunkt gelegenen Punkte sowie die Anzahl der Verzweigungspunkte abgezählt. Aus dem asymptotischem Verhalten dieser Überdeckungszahlen versucht man dann den Typus zu ermitteln.

Dies ist offenbar ein ungenaues Verfahren von dem man nicht zu viel erwarten darf.

5. Ich will jetzt versuchen einen Einblick in die Methoden zu geben, die man für die Behandlung der eben genannten Aufgabe verwendet, selbstverständlich ohne auf Einzelkeiten einzugehen.[1]

Auf einer R. Fl. kann man durch eine Differentialform $ds=\lambda|dw|$ in mannigfacher Weise eine Riemannsche Metrik einführen. Die positive Funktion λ soll nicht als Punktfunktion erklärt sein, sondern in solcher Weise von dem lokalen Parameter abhängen, daß ds invariant wird. Die neue Metrik ist in anderen Worten dadurch bestimmt, daß sie mit der euklidischen Metrik der Parameterebene konform sein soll.

In der Riemannschen Metrik kann man nun zunächst *Kurvenlängen* und *Flächeninhalte* bestimmen. Wegen der additiven Charakter genügt es nämlich solche Kurven und Gebiete zu betrachten, die innerhalb einer Umgebung liegen, und für diese kann man Länge und Inhalt durch die invarianten Integrale

$$\int ds=\int \lambda|dw| \quad \text{und} \quad \iint d\omega=\iint \lambda^2 du\,dv$$

definieren.

In der Differentialgeometrie werden auch andere invariante Bildungen betrachtet, die voraussichtlich für unsere Zwecke wichtig sein können. Es sind dies die *curvatura integra* $\iint K\,d\omega$ und das *geodätische Krümmungsintegral* $\int \frac{ds}{\varrho_g}$ längs einer Kurve. Zwischen diesen geometrischen Größen bestehen gewisse Beziehungen, aus denen die Ergebnisse der Überdeckungstheorie folgen werden.

I. Nach dem Fundamentalsatz der konformen Abbildung gibt es auf W eine harmonische Funktion $G(w)$, die bis auf einen negativen logarithmischen Pol regulär ist und im hyperbolischen Falle gegen 0, im parabolischen Falle gegen ∞ strebt, wenn w eine eigentlich divergente (d. h. häufungspunktlose) Folge durchläuft. Die Gebiete $W(t)$, definiert durch $G(w)\leqq t$, bestimmen eine Ausschöpfung von W, die wir eine Normalausschöpfung nennen wollen. Die Niveaukurven $G(w)=t$ werden mit $\Gamma(t)$ bezeichnet.

In einer beliebigen Metrik $ds=\lambda|dw|$ sei $L(t)=\int\limits_{\Gamma(t)} ds$ und $A(t)=\iint\limits_{W(t)} d\omega$.

Man findet unmittelbar

$$A'(t)=\int\limits_{\Gamma(t)} \frac{ds}{\frac{\partial G}{\partial n}},$$

[1] Inzwischen erschien eine ausführliche Darstellung: Lars Ahlfors, Über die Anwendung differentialgeometrischer Methoden zur Untersuchung von Überlagerungsflächen, Acta Soc. Scient. Fenn., Nov. Ser. T. II, N:o 6.

wobei die Normalableitung in Bezug auf die Riemannsche Metrik zu nehmen ist, und durch Anwendung der Schwarz'schen Ungleichung

$$L(t)^2 \leqq A'(t) \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{\partial G}{\partial n} ds = 2\pi A'(t),$$

woraus

$$dt \leqq \frac{dA(t)}{L(t)^2}.$$

Man schließt hieraus z. B.: *Im parabolischen Falle ist das Integral*

$$\int^{\infty} \frac{dA(t)}{L(t)^2}$$

in jeder Metrik divergent.

Ähnliches gilt für das geodätische Krümmungsintegral $H(t) = \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{ds}{\varrho_g}$.
Nach bekannten Formeln aus der Differentialgeometrie wird wegen $\Delta G = 0$

$$H(t) = \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{\lambda}{|\operatorname{grad} G|} ds,$$

wo natürlich $\frac{\partial}{\partial n} \cdot ds$ von der benutzten Metrik unabhängig ist. Integration und Anwendung der Green'schen Formel ergibt

$$\int\limits_{t_0}^{t} H(t)\,dt = \iint\limits_{W(t)-W(t_0)} \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{\lambda}{|\operatorname{grad} G|} ds\,dt = \iint \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{\lambda}{|\operatorname{grad} G|} \frac{\partial G}{\partial n} ds\,dn$$

$$= D\left(\log \frac{\lambda}{|\operatorname{grad} G|}, G\right) = \Bigg|_{t_0}^{t} \int\limits_{\Gamma(t)} \log \frac{\lambda}{|\operatorname{grad} G|} \cdot \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

und hieraus folgt, wenn man das geometrische Mittel durch das arithmetische ersetzt,

$$\int\limits_{t_0}^{t} H(t)\,dt \leqq 2\pi \log L(t) + \text{Konst.}$$

In Verbindung mit dem früheren Ergebnis wird für $H(t)$ eine obere Schranke von der Größenordnung $\log A(t)$ gewonnen. Die Ermittlung einer unteren Schranke ist eine Aufgabe, deren Lösung große Tragweite hätte.

II. Zweitens betrachten wir eine beliebige Ausschöpfung, die durch die Niveaukurven $\Phi(w)=\tau$ bestimmt wird, wobei $\Phi(w)$ nur gewissen allgemeinen Bedingungen unterworfen ist. Wir führen diesmal eine bestimmte zugehörige Metrik ein, in welcher diese Niveaukurven parallell sind. Man erzielt dies durch die Wahl $ds=|\operatorname{grad}\Phi|\cdot|dw|$, eine Bildung, welche offenbar die nötige Invarianzeigenschaft besitzt.

Die oben betrachteten geometrischen Größen stehen bei dieser Wahl in einem besonders einfachen Zusammenhang miteinander. Mit denselben Bezeichnungen wie oben (der neue Parameter soll Mißverständnisse verhindern) gilt nämlich

$$A'(\tau)=L(\tau),\quad L'(\tau)=H(\tau).$$

Weiter läßt sich auch hier eine Beziehung zu der Funktion $G(w)$ herleiten. Für genügend große τ wird

$$\int\limits_{\Gamma(\tau)}\frac{\partial G}{\partial n}\,ds=2\pi,$$

woraus

$$4\pi^2\leqq L(\tau)\int\limits_{\Gamma(\tau)}\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^2 ds$$

und durch Integration

$$4\pi^2\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{L(\tau)}\leqq\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\int\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)^2 ds\,dt=\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\int|\operatorname{grad}G|^2\,du\,dv.$$

Ist die Fläche hyperbolisch, so wird das letzte Integral beschränkt, denn für das zwischen zwei Niveaulinien $G=a$ und $G=b$ gelegene Gebiet wird

$$\iint|\operatorname{grad}G|^2\,du\,dv=\Bigg|_a^b\int G\frac{\partial G}{\partial n}\,ds=(b-a)2\pi.$$

Wenn W hyperbolisch ist, so gilt für eine beliebige Ausschöpfung und die zugehörige Metrik, in welcher die Niveaukurven parallel sind,

$$\int^{\infty}\frac{d\tau}{L(\tau)}<\infty.$$

Die eben angeführten Resultate liefern an und für sich keinen Beitrag zur Lösung des Typenproblems, denn sie enthalten ja nur eine Beziehung zwischen dem Typus und den möglichen Metriken auf einer R. Fl. Ihre Bedeutung für die Untersuchung der Ü. Fl. besteht aber darin, daß es jetzt nur noch übrig bleibt eine Beziehung zwischen der Metrik und den Überdeckungseigenschaften aufzustellen, um dann durch Kombination Aussagen über das Typenproblem zu erhalten. Diese Spaltung der Aufgabe in einen metrisch-konformen und einen topologisch-metrischen Teil ist von größter Wichtigkeit.

6. Die topologisch-metrische Aufgabe kann mit Methoden angegriffen werden, die ich in einer neulich erschienen Arbeit auseinandergesetzt habe.[1] Wir schlagen hier einen anderen Weg ein, der die Zusammenhänge mit der Differentialgeometrie besser hervorhebt. Das Verfahren leidet zwar an dem Mangel, daß die Scheidung zwischen metrisch und konform nicht ganz restlos durchgeführt ist. Immerhin ist dies nicht wesentlich und könnte ohne größere Schwierigkeiten vermieden werden.

Wir besprechen zunächst die Fragen, die sich an den sog. ersten Hauptsatz von Nevanlinna schließen. Auf der Grundfläche W_0 sei $\mu(\Omega)$ eine vollständig additive Mengenfunktion von beschränkter Schwankung, die der normierenden Bedingung $\mu(W_0)=1$ genügt. Von der additiven Eigenschaft ausgehend kann man die Funktion auch für mehrfach bedeckte Gebiete $\overline{W}$ der Ü. Fl. erklären, indem man

$$\mu(\overline{W})=\int_{W_0} n(a)\,d\mu(a)$$

setzt. Hier bezeichnet $n(a)$ die Anzahl der über a gelegenen Punkte. Die Zahl $\mu(\overline{W})$ gibt ein Maß für die Überdeckung durch das Gebiet $\overline{W}$ und heißt auch die ***mittlere Blätteranzahl*** von $\overline{W}$. Es entsteht die Frage: Inwiefern hängt die mittlere Blätteranzahl von der benutzten Mengenfunktion ab?

Um dies zu entscheiden betrachte man zwei verschiedene Belegungen $\mu_1(\Omega)$ und $\mu_2(\Omega)$ und bilde $\mu_0=\mu_1-\mu_2$. Für eine Belegung mit verschwindender Gesamtmaße kann man leicht ein Potential definieren. Auf W_0 gibt es eine bis auf eine additive Konstante bestimmte harmonische Funktion $\chi(w, a, b)$ die in a und b logarithmische Pole mit den Residuen 1 bzw. -1 besitzt. Man bilde

$$p(w)=\int_{W_0} \chi(w, a, b)\,d\mu(a),$$

[1] Acta Mathematica, t. 65, 1935.

wo b ein fester Punkt ist und die zu verschiedenen a gehörigen $\chi(w, a, b)$ so normiert sind, daß ihr Unterschied im Punkte b verschwindet. Es ist leicht zu sehen, daß $p(w)$ nur scheinbar von b abhängt.

Man bezeichne nun mit $S(t)$ die mittlere Blätteranzahl des Gebiets $W(t)$ einer normalen Ausschöpfung. In einer unmittelbar verständlichen Bezeichnung gilt dann

$$\text{(I)} \qquad \int_{t_0}^{t} (S_1(t) - S_2(t))\, dt = \left| \int_{\Gamma(t)} p(w) \frac{\partial G}{\partial n} ds \right._{t_0}^{t}.$$

Diese Gleichung stellt die allgemeinste Form des ersten Hauptsatzes dar. Die wichtigste Anwendung bezieht sich auf den Fall, wo die Belegung μ_0 ein bzw. nach oben, nach unten oder in beiden Richtungen beschränktes Potential besitzt. Man erhält jenachdem eine asymptotische Ungleichung oder Gleichung zwischen $S_1(t)$ und $S_2(t)$.

Als Normalbelegung ist es zweckmäßig eine Belegung von stetiger Flächendichte zu wählen, und die zugehörige Größe $S(t)$ als eine Charakteristik der Ü. Fl. zu betrachten. Ist $\bar{S}(t)$ eine zweite, in derselben Weise bestimmte Größe, so gilt jedenfalls

$$\int_{t_0}^{t} S(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} \bar{S}(t)\, dt + O(1),$$

und es kommt in den Anwendungen nicht darauf an, ob man $S(t)$ oder $\bar{S}(t)$ betrachtet.

7. Den zweiten Hauptsatz von Nevanlinna wollen wir in Zusammenhang mit einer klassischen Formel der Differentialgeometrie stellen, nämlich mit dem Satz von Gauss-Bonnet. Es besteht kein Zweifel, daß diese Zusammenstellung im besten Einklang mit der topologisch-metrischen Natur des zweiten Hauptsatzes steht.

Auf der Grundfläche führen wir zunächst eine überall reguläre Metrik $ds = \lambda |dw|$ ein. Die Gauss-Bonnetsche Formel für ein Teilgebiet $\bar{W}$ mit der Eulerschen Charakteristik E lautet dann

$$\text{(1)} \qquad -\frac{1}{2\pi} \iint_{\bar{W}} K\, d\omega = E + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{ds}{\varrho_g}.$$

Besonders erhält man für die ganze Fläche W_0

$$\text{(2)} \qquad -\frac{1}{2\pi} \iint_{W_0} K\, d\omega = E_0.$$

Die Formel (1) gilt nicht unverändert für ein Teilgebiet der Ü. Fl., denn die übertragene Metrik der Grundfläche wird in den Windungspunkten singulär. Durch Zerlegung in schlichte Teilgebiete beweist man leicht die verallgemeinerte Formel

$$(3) \qquad -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\bar{W}} K\,d\omega = E - n_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\varrho_g},$$

wo n_1 die Anzahl der mit ihren Verzweigungsordnungen gezählten Windungspunkte von $\bar{W}$ bezeichnet.

Wir fassen jetzt einen noch allgemeineren Fall ins Auge, indem wir erlauben, daß die benutzte Metrik der Grundfläche in endlich vielen Punkten $a_1, \cdots, a_q$ singulär wird. Damit (3) noch gültig sei verlangen wir, daß die singulären Punkte durch geodätische Nullkreise ausgeschlossen werden können, d. h. durch kleine Kreise für welche das geodätische Krümmungsintegral an der Grenze verschwindet. Bei einem bestimmten asymptotischen Verhalten von λ wird diese Bedingung erfüllt; es genügt in der Tat, daß $r\frac{\partial}{\partial r}\log\lambda \to 1$ wenn $r = |w - a_\nu| \to 0$.

Die Fläche W_0 wird nun in allen Punkten a_ν und die Fläche $\bar{W}$ in allen überliegenden Punkten punktiert. Offenbar wird der Zusammenhang von W_0 dadurch um q und der Zusammenhang von $\bar{W}$ um $\sum\limits_1^q \bar{n}(a_\nu)$ erhöht, wenn $\bar{n}(a)$ die einfach gezählte Anzahl der über a gelegenen Punkte von $\bar{W}$ bezeichnet. Die Formeln (3) und (2) gehen dann in

$$(4) \qquad -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\bar{W}} K\,d\omega = E + \sum_1^q \bar{n}(a_\nu) - n_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\varrho_g}$$

und

$$(5) \qquad -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{W_0} K\,d\omega = q + E_0$$

über.

Wir wenden (4) und (5) auf die Gebiete $W(t)$ einer normalen Ausschöpfung an und benutzen den ersten Hauptsatz. Mit unmittelbar verständlichen Bezeichnungen ergibt sich

$$(\mathrm{II}) \qquad (q + E_0)\,S(t) = \sum_1^q \bar{n}(a_\nu, t) - n_1(t) - 1 + H(t) + \beta(t),$$

wo $\beta(t)$ vom Potential der durch $\iint K\,d\omega$ definierten Belegung abhängt. Indem man unter Befriedigung der obigen Bedingungen λ passend wählt, so wird es möglich $H(t)$ und $\beta(t)$ mit Hilfe der früher dergestellten Methoden abzuschätzen, und man erhält in (II) die allgemeinste Form des zweiten Hauptsatzes.

Für die Kugel ist $E_0 = -2$ und man erhält den Satz von Nevanlinna mit seinen bekannten Folgerungen für die Wertverteilung bei meromorphen Funktionen. Der Torus hat die Charakteristik 0, und man findet daß alle Nevanlinnaschen Defekte und Verzweigungsindizes im parabolischen Falle verschwinden müssen. Endlich führt (II) im Falle $E_0 > 0$ schon mit $q = 0$ zu einem leicht erkennbaren Widerspruch, falls t gegen Unendlich wachsen kann. Es ist dies ein Ausdruck für den sog. zweiten Satz von Picard, der in unserer Formulierung besagt, *daß jede Überlagerungsfläche einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht größer als 0 hyperbolisch sein muß.*

8. Die Zeit erlaubt nicht auf die in Nr. 5 unter II. eingeleiteten Betrachtungen näher einzugehen. Sie sollen prinzipiell zu hinreichenden Bedingungen für den parabolischen Fall führen. Eine allgemeine Theorie ist noch nicht entwickelt worden; es sei nur erwähnt daß auch in diesem Zusammenhange die Gauss-Bonnetsche Formel von Bedeutung ist. Bemerkenswerte Ergebnisse, die immerhin nur in Einzelfällen anwendbar sind, hat besonders Kobayashi[1] erhalten.

---

[1] Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, sect. A Nr. 39 (1935).

DIOPHANTISCHE APPROXIMATIONEN

J. G. VAN DER CORPUT, Groningen.

Eine ausgezeichnete Übersicht über das Gebiet der Diophantischen Approximationen, von den ältesten Autoren bis Mitte des vorigen Jahres, gibt der vor einem halben Jahr erschienene Bericht von J. F. Koksma,[1] der eine wohl vollständige Literaturliste enthält.[2] Hätte er das Buch jetzt, und nicht schon im September des vorigen Jahres abgeschlossen, so würde er alle Kapitel ergänzt haben; denn das abgelaufene Studienjahr ist überaus fruchtbar und wichtig für diese Theorie gewesen. Es ist mir denn auch erst recht nicht möglich, in der mir zugewiesenen Zeit Ihnen eine vollständige Übersicht zu geben über die Entdeckungen der letzten Monate. Nach dem Ausflug in die Geometrie der Zahlen, den Sie soeben unter Leitung eines so erfahrenen Führers unternommen haben, brauche ich nicht mehr über den Minkowskischen Linearformensatz zu sprechen. Schwieriger fällt es mir einige anderen Entdeckungen zu übergehen. Gerne möchte ich Ihnen erzählen, wie in diesem Jahr mittels der bekannten Blichfeldtschen Methode[3] das Minkowskische Ergebnis[4] über Summen von Potenzen linearer Formen verschärft worden ist.[5] Stände mir mehr Zeit zur Verfügung, so würde ich Ihnen erzählen, wie Mahler[6] vor einigen Monaten den Merkwürdigen Khintchineschen Übertragungssatz[7] auf überraschend einfache Art in einigen Zeilen bewiesen hat, und wie Jarník[8] zu dem bemerkenswerten Resultat gekommen ist, daß dieser Khintchinesche Satz sich nicht verschärfen läßt. Die allerneuesten Untersuchungen über Verteilungsfunktionen,[9] metrische Eigenschaften, Approximationen irrationaler Zahlen durch rationale, an all diesem muß ich stillschweigend vorbeigehen. Vor allem von Bedeutung ist ein neueres Schneidersches Resultat, das den bekannten Thue-Siegelschen Satz[10] auf glückliche Weise ergänzt.

Anstelle hierauf, sowie auf zwei analoge Sätze von Mahler[11] näher einzugehen, möchte ich in diesem Vortrag Ihre Aufmerksamkeit lenken auf die Untersuchung der Funktionen modulo Eins. Die wichtigsten Methoden hierüber sind das elementare Skolemsche Verfahren[12], die Methode der rhytmischen Funktionen[13] und die goniometrischen Methoden. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen leitete Th. Skolem eine obere Schranke ab für die Anzahl der Gitterpunkte auf und in der Umgebung gegebener Kurvenbögen. Wie ich hoffe, wird bald eine (Groninger) Dissertation von D. Schepel erscheinen, in der verschiedene der Skolemschen Resultate verallgemeinert und verschärft werden.

Ganz anderer Art sind die goniometrischen Methoden. Diese führen die Untersuchung der Funktionen modulo Eins auf die Betrachtung von trigonometrischen Summen

$$S = \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}$$

zurück; dabei bezeichnet $f(x)$ eine reellwertige Funktion der ganzzahligen Zahl x, weiter P eine ganze und X eine natürliche Zahl. Zwei spezielle Fälle sind dabei von besonderer Bedeutung.

Erster Fall: $f(x)$ ist ein Polynom; dann nenne ich S eine Weylsche Summe im engeren Sinne und den Grad von $f(x)$ die Ordnung der Summe.

Zweiter Fall: es gibt eine natürliche Zahl k so daß die $(k+1)$-te Differenz $\Delta^{k+1} f(x)$ nahe bei Null liegt; dann heiße S eine verallgemeinerte Weylsche Summe und k wieder ihre Ordnung. In diesem zweiten Fall ist $f(x)$ näherungsweise gleich einem Polynom k-ten Grades; eine verallgemeinerte Weylsche Summe läßt sich demnach angenähert zerlegen in endlich viele Weylsche Summen in engerem Sinn. Oft behandelt man die verallgemeinerten Weylschen Summen durch diese Reduktion; bei jeder der bisher bekannten Methoden verdient jedoch die direkte Behandlung ohne diese Zurückführung auf Summen in engerem Sinne den Vorzug. Allen diesen Methoden liegt der gemeinsame Gedanken zu Grunde: eine Weylsche Summe S auf andere Weylschen Summen S^* der gleichen Art zurückzuführen. Die Methoden lassen sich auf drei Klassen verteilen, je nach der Gestalt dieser neuen Summen S^*. Ich charakterisiere diese drei Klassen durch die Benennungen Weyl, approximative Funktionalgleichungen und Vinogradoff.

Das von H. Weyl[14] entdeckte und zuerst angewandte Prinzip beruht auf der Identität

$$|S|^2 = S\bar{S} = \sum_{x'=P+1}^{P+X} \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i (f(x') - f(x))} = \sum_{h=-(X-1)}^{X-1} S^*,$$

mit

$$S^* = \sum_{\substack{x \geq P+1 \\ x \geq P+1-h}}^{\substack{x \leq P+X-h \\ x \leq P+X}} e^{2\pi i (f(x+h) - f(x))};$$

S^* hängt also von h ab und ist wieder eine Weylsche Summe, und zwar mit $f(x+h) - f(x)$ anstelle von $f(x)$, also von der Ordnung $k-1$ anstelle von k.

Durch wiederholte Anwendung dieses Prinzips gelangt man schließlich auf eine Weylsche Summe der Ordnung 1. Eine Weylsche Summe im engeren Sinne von der ersten Ordnung ist nun evidenterweise eine geometrische Summe und also vollständig elementar behandelbar. Eine verallgemeinerte Weylsche Summe erster Ordnung läßt sich entweder durch solche geometrische Summen annähern (das wurde bereits 1923 durch die Piltzsche Methode[15] geleistet) oder man kann sie auch direkt behandeln, aber darüber werde ich sofort sprechen.

Für qualitative Betrachtungen ist diese Methode sehr geschickt. Zum Beispiel zeigt Weyl auf solche Art folgenden Satz, der die Grundlage der Gleichverteilungslehre bildet:

$f(x)$ ist gleichverteilt modulo 1, *wenn $f(x+h)-f(x)$ für jede feste natürliche Zahl h gleichverteilt modulo* 1 *ist.*

Dieser Satz läßt sich auch noch auf ganz andere Art mittels eines rein arithmetischen Diskrepanzsatz von Vinogradoff[16] beweisen. Es ist demnach möglich die Gleichverteilungslehre rein arithmetisch aufzubauen. Wegen eines mengentheoretischen Aufbaus sei auf die Dissertation von Bergström[17] verwiesen, in der Gebrauch gemacht wird von endlichdimensionalen Moduln.

Die Weylsche Methode hat den großen Nachteil nur zu schlechten Abschätzungen zu führen. Schärfer ist die zweite Methode, die jedoch allein auf verallgemeinerte Weylsche Summen erster Ordnung S angewandt werden kann. Mittels der Poissonschen Summenformel wird eine solche Summe auf die Gestalt

$$S=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} I_\nu \quad \text{mit} \quad I_\nu=\int_{P+\frac{1}{2}}^{P+X+\frac{1}{2}} e^{2\pi i(f(u)-\nu u)}\,du$$

gebracht. Unsere erste Aufgabe ist nun, diese Integrale I_ν anzunähern.

Die bisher in der Integralrechnung bekannten Methoden sind für unseren Zweck nicht allgemein, und vor allem nicht scharf genug. Um diese Lücke auszufüllen, erscheint zur Zeit in der Compositio Mathematica eine Artikelserie[18] mit der folgenden Fragestellung:

Gesucht wird eine hinreichende Bedingung, damit das Integral

$$I=\int_a^b g(u)\,e^{\varphi(u)}\,du$$

einen Näherungswert besitzt, der eindeutig bestimmt ist durch das Verhalten der Funktionen $\varphi(u)$ und $g(u)$ in der Umgebung endlich vieler Punkte im abgeschlossenen Intervall (a, b). Unter diesen Punkten werden zunächst die Endpunkte a und b aufgenommen, weiter gewisse durch die Funktion $\varphi(u)$ eindeutig bestimmte Punkte, die wir die führenden Punkte der Funktion φ nennen. Unter der Voraussetzung, daß die zweite Derivierte $\varphi''(u)$ im Intervall $a\leqq u\leqq b$ existiert, stetig und $\neq 0$ ist, heißt ein Punkt v zwischen

a und b führender Punkt von φ, wen $\dfrac{\varphi'(v)}{\sqrt{\varphi''(v)}}$ reell ist, und der Imaginärteil von $\dfrac{\varphi'(u)}{\sqrt{\varphi''(u)}}$ in v das Vorzeichen wechselt. Auseinander zu setzen, warum gerade diese Punkte entscheidend sind, würde mich zu weit führen; in der Tat aber besitzt das Integral I unter sehr allgemeinen Voraussetzungen einen Näherungswert, der eindeutig festgelegt ist durch das Verhalten der Funktionen $g(u)$ und $\varphi(u)$ in der Umgebung von a, von b und den führenden Punkten von φ. Die Methode der führenden Punkte liefert im Spezialfall eines reellen $\varphi(u)$ die Laplacesche, im Spezialfall eines rein-imaginären die Methode der stationären Phase, die auf Stokes und Kelvin zurückgeht. Sie hat bereits eine Anwendung in der Dissertation von B. Meulenbeld[19] gefunden, wo für die Riemannsche Zeta-Funktion eine approximative Funktionalgleichung abgeleitet wird, die zwar umständlicher als die Hardy—Littlewoodsche[20], aber auch viel schärfer als diese ist.

Ich kehre zurück zu der verallgemeinerten Weylschen Summe S erster Ordnung und nehme an daß $f''(u)$ im Intervall $(P+\frac{1}{2}, P+X+\frac{1}{2})$ existiert, positiv und klein ist. Die Methode der stationären Phase, auf I_ν angewandt, ergibt daß dieses Integral für jedes ν, das nicht zwischen $f'(P+\frac{1}{2})$ und $f'(P+X+\frac{1}{2})$ liegt, ungefähr Null ist, und daß es für die übrigen ν einen einfachen Näherungswert besitzt. Ersetzt man die Integrale I_ν durch ihre Approximativwerte, so wird S angenähert durch eine Summe endlich vieler Terme; jeder dieser Terme ist wieder eine verallgemeinerte Weylsche Summe S^*; die Summation läuft dabei über die ganzen ν des Intervalles $(f'(P+\frac{1}{2}), f'(P+X+\frac{1}{2}))$. Da nach Voraussetzung $f''(u)$ sehr klein ist, ist die Länge dieses Intervalles viel kleiner als X. Das Prinzip der Methode läßt sich somit folgendermaßen formulieren:

Die Untersuchung einer verallgemeinerten Weylsche Summe S erster Ordnung wird mittels der Poissonschen Summenformel und der Methode der stationären Phase zurückgeführt auf andere verallgemeinerten Weylschen Summen S^* von viel kleinerer Gliederanzahl. Die Ordnung von S^* ist nicht, wie die von S, gleich Eins, sondern größer. Die Gliederanzahl wird also verkleinert, die Ordnung vergrößert. Bei dem Weylschen Verfahren dagegen wird die Ordnung erniedrigt, und behält die Gliederanzahl dieselbe Größenordnung.

Indem man nun abwechselnd sich der Weylschen Methode und der der approximativen Funktionalgleichungen bedient, kommt man schließlich auf Summen von nur noch wenigen Gliedern, die sich dann elementar behandeln lassen. Unbefriedigend dabei ist daß die Beweise sehr umständlich werden und viel Rechnen erfordern, wobei trotzdem das Resultat in Folge der Anwendung der Weylschen Methode unscharf bleibt.

Wie Sie wissen, machte 1923 in der Theorie der Gitterpunkte nach den Worten von E. Landau[21] die wunderschöne praestabilisierte Harmonie dem Chaos platz. Jetzt wissen wir, des es dabei nicht um das Chaos der Gitterpunkte, sondern um das der Weylschen Summen handelt.[22]

Man braucht sich also darüber nicht zu wundern, daß man in den zehn letzten Jahren eifrig nach einer neuen Methode gesucht hat. Es ist erst I. M. Vinogradoff[23] gelungen eine wirklich vernünftige Methode zu finden. Ich erinnere mich noch mit welcher lebhaften Überraschung ich vor einem Jahre das folgende damals fast unglaubliche Resultat gelesen habe:

Ist $k \geqq 10$ ganz, so gibt es eine nur von k abhängige Zahl c, so daß für jedes reelle α und jedes $N > 1$ ganze x und y mit

$$|\alpha x^k - y| < c N^{-\frac{1}{15 k^2 \log k}}$$

existieren, wobei $0 < x < N$ ist.

Das Merkwürdige dabei ist, daß $\frac{1}{N}$ mit dem Exponenten $\frac{1}{15 k^2 \log k}$ auftritt, der unendlich viel besser als der durch die Weylsche Methode ableitbare Exponent

$$\frac{2k}{k 2^k + 2} - \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$$

ist.

In der neuesten Zeit hat Vinogradoff[24] eine Artikelserie veröffentlicht, die für die analytische Zahlentheorie von gewaltiger Bedeutung ist. Ich skizziere kurz den Kern seiner Beweismethode, wobei ich mich auf Weylsche Summen in engerem Sinn beschränke, also auf den Fall, daß $f(x)$ ein Polynom k-ten Grades ist.

Seine Methode beruht auf drei Gedanken.

Den Ausgangspunkt bildet eine obere Abschätzung für den Absolutwert der Summe

$$S' = \sum_{w} T(w) \sum_{x} e^{2\pi i (\alpha(x) + \beta(x) w)}, \tag{1}$$

wo $\alpha(x)$, $\beta(x)$ und $T(w)$ reell sind, und x und w eine Anzahl aufeinander folgender ganzer Zahlen durchlaufen. Dies ist ja sehr einfach, denn nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$|S'|^2 \leqq \Big(\sum_{w} T^2(w)\Big) \sum_{w} \sum_{x} \sum_{x'} e^{2\pi i (\alpha(x) - \alpha(x') + (\beta(x) - \beta(x')) w)}$$

$$= \Big(\sum_{w} T^2(w)\Big) \sum_{x} \sum_{x'} e^{2\pi i (\alpha(x) - \alpha(x'))} \sum_{w} e^{2\pi i (\beta(x) - \beta(x') w}.$$

Da die letzte Summe eine geometrische, also elementar behandelbar ist, kommt man so zu der gesuchten obere Schranke für $|S'|$.

Der Entdecker führt nun die Untersuchung der Weylschen Summe in engerem Sinne S zurück auf Summen der Gestalt

$$S^* = \sum_{x=P+1+q_1}^{P+X+q_1} \sum_{u_1=-q_1}^{U_1-1-q_1} \cdots \sum_{u_l=-q_l}^{U_l-1-q_l} e^{2\pi i(\gamma(x)+f(x+u_1)+\cdots+f(x+u_l))}.$$

Gelingt es die natürlichen Zahlen $l, U_1, \cdots, U_l$ so zu wählen, daß $U_{\lambda+1}$ in U_λ aufgeht ($\lambda=1,\cdots,l-1$) und daß für jede Wahl der ganzen Zahlen $q_1,\cdots, q_l$ mit $0 \leqq q_l < U_\lambda$ ($\lambda=1,\cdots,l$) und für jede Wahl der reellen Zahl $\gamma(x)$

$$|S^*| \leqq s X U_1 \cdots U_l$$

ist, so beweist er mittels der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|S| \leqq s^{\frac{1}{l}} X + 2U_1.$$

Eine nicht-triviale obere Schranke für $|S^*|$ liefert demnach bei nicht zu groß gewähltem U_1 auch eine nicht-triviale obere Abschätzung für $|S|$. Demnach hängt alles ab von einer Abschätzung für $|S^*|$.

Nun kommt der überraschende Gedanke von Vinogradoff. Da $f(x)$ ein Polynom k-ten Grades ist, kann er setzen

$$\gamma(x)+f(x+u_1)+\cdots+f(x+u_l)=\beta_0(x)+\beta_1(x)w_1+\cdots+\beta_k(x)w_k$$

mit

(2) $\quad w_1=u_1+\cdots+u_l,\ w_2=u_1^2+\cdots+u_l^2,\cdots,\ w_k=u_1^k+\cdots+u_l^k,$

sodaß S^* in

$$S^* = \sum_{w_1,\cdots,w_k} T(w_1,\cdots,w_k) \sum_{x=P+1+q_1}^{P+X+q_1} e^{2\pi i(\beta_0(x)+\beta_1(x)w_1+\cdots+\beta_k(x)w_k)}$$

übergeht; dabei ist $T(w_1,\cdots,w_k)$ die Anzahl der Lösungen $(u_1,\cdots,u_l)$ von (2) in den für die $u_1,\cdots,u_l$ vorgeschriebenen Intervallen; $\sum\limits_{w_1,\cdots,w_k}$ wird über alle in Frage kommenden ganzen Zahlen $w_1,\cdots,w_k$ erstreckt. Demnach wird

$$S^* = \sum_{w_1,\cdots,w_{k-2},w_k} S'$$

mit

$$S' = \sum_{w_{k-1}} T(w_1,\cdots,w_k) \sum_{x=P+1+q_1}^{P+X+q_1} e^{2\pi i(\beta_0(x)+\beta_1(x)w_1+\cdots+\beta_k(x)w_k)}.$$

S' ist aber wieder eine Summe der vorhin behandelten Gestalt (1). Die vorige Schlußweise liefert demnach eine obere Schranke für $|S'|$, also auch für $|S^*|$ und folglich auch für $|S|$, wenn nur der Faktor

$$\sum_{w_1, \cdots, w_k} T^2(w, \cdots, w_k)$$

nicht alles über den Haufen wirft. Die technische Schwierigkeit bei der Ausführung dieser geistvollen Schlußweise besteht darin die Zahlen $l, U_1, \cdots, U_l$ so zu wählen, daß dieser Faktor nicht zu groß wird und es ist der Verdienst Vinogradoff's gezeigt zu haben, daß eine solche Auswahl in der Tat möglich ist.

Die so skizzierte Methode führt zum Beispiel zu den folgenden zwei Sätzen, in denen $k \geqq 3$ ganz ist und $\varrho = \frac{1}{k^4 \log k}$ gesetzt wird.

I. *Ist*

$$f(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

eine reelles Polynom, $\left| a_0 - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{1}{q^2}$ und $\frac{p}{q}$ *irreduzibel, so ist*

$$|S| < \begin{cases} c X (X^{-k+1} q)^{\varrho} & \text{für } q \geqq X \\ c X q^{-(k-2)\varrho} & \text{für } q \leqq X, \end{cases}$$

und zwar hängt c nur von k ab.

II. *Ist* $X \geqq k+2$ *und*

$$0 < r \leqq \Delta^{k+1} f(x) \leqq \gamma r \quad (P < x \leqq P + X - k - 1)$$

so ist

$$|S| < c r^{\frac{1}{3}(k-2)\varrho} \left(\gamma X + r^{-\frac{1}{3}} \right),$$

wo c nur von k abhängt.

Für große Werte von k sind diese Ergebnisse unvergleichbar viel besser als die vermöge der Weylschen Methode, denn die Vinogradoffschen Exponenten sind von der Ordnung $\frac{1}{k^8 \log k}$, die Weylschen dagegen von der Ordnung $\frac{1}{2^k}$.

Für kleines k führt die Vinogradoffsche Methode allerdings nicht zu Verschärfungen der früheren Resultate. Dies ist vor allen Dingen zu bedauern für die Theorie der Gitterpunkte in der Ebene, da hier hauptsächlich verallgemeinerte Weylsche Summen einer Ordnung $\leqq 5$ auftreten.

So geistvoll die Vinogradoffsche Methode auch sein mag, so hat sie demnach noch keine Ordnung in das Gitterpunkt-Chaos gebracht.

Doch zu was für einen Überfluß von Anwendungen führt sie! Jetzt bereits, wo man noch mit ihrem Aufbau beschäftigt ist, sind ihr sehr wichtige Resultate zu verdanken, und neue liegen zum Greifen nahe. Auf ihre Bedeutung für das Waringsche Problem will ich gar nicht erst eingehen. In bezug auf die Riemannsche Zetafunktion erwähne ich das belangreiche Resultat von N. Tchudakoff,[25] daß diese Funktion bei geeignet gewählten positiven t_0 und ϑ im Gebiet

$$t \geqq t_0, \quad \sigma \geqq 1 - (\log t)^{\vartheta - 1}$$

keine Nullstelle hat, und daß folglich die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ durch

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-(\log x)^{\mu}})$$

angegeben wird; hierin ist μ eine geeignet gewählte Zahl $> \frac{1}{2} + \frac{1}{111}$. Dies enthält für jedes positive ε

$$p_{n+1} - p_n = O\left(p_n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right),$$

wo p_n die n-te Primzahl bezeichnet.

Von grundlegender Bedeutung erweist sich die Vinogradoffsche Methode für die Untersuchung der Diophantischen Ungleichungen. Wir betrachten eine Ungleichung der Form

$$(3) \qquad 0 \leqq f(x) - y < \sigma \quad \text{mit} \quad 0 < \sigma \leqq 1;$$

die Unbekannten x und y seien dabei ganz rational. Ist $f(x)$ ein Polynom oder nähert sich $\Delta^{k+1} f(x)$ für $x \to \infty$ und geeignet gewähltes k der Null, so läßt sich die Methode mit Erfolg anwenden. Dabei darf k sogar von x abhängen und selbst mit x unbegrenzt wachsen, wenn dies nur nicht zu schnell geschieht. Hierin gerade liegt der Vorzug der Vinogradoffschen Methode vor der Weylschen, und sie läßt sich mit wesentlich besseren Ergebnissen auf transzendente Funktionen $f(x)$ anwenden, die für $|x| \to \infty$ nicht gar zu schnell anwachsen.

Es erscheint fast sicher, daß die zwei genannten Sätze, die aus der Vinogradoffschen Methode erschlossen wurden, noch bedeutend verschärft werden können und jede solche Verschärfung wird auch zu besseren Resultaten über Diophantische Ungleichungen führen. Aus diesem Grunde werde ich mich hier auf Polynome $f(x) = \alpha_0 x^k + \cdots + \alpha_h$ beschränken. Bei den Diophantischen Ungleichungen treten zwei Hauptfragen auf.

A. Für welche Werte von σ hat (3) mindestens eine Lösung in ganzen x und y, für die die natürliche Zahl x unterhalb einer gegebenen Schranke liegt?

B. Man bestimme eine Näherungsformel für die Anzahl dieser Lösungen.

Vinogradoff nimmt $\left|\alpha_0 - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{1}{q^2}$ an, wobei $\frac{p}{q}$ ein irreduzibler Bruch mit positivem Nenner ist, und zeigt:

A. *Ist* $k \geqq 10$, *so gibt es ein nur von* k *abhängiges* c *so daß* (3) *für*

$$\sigma = c q^{-\frac{1}{15 k^2 \log k}}$$

in ganzen x *und* y *mit* $0 < x < q$ *lösbar ist.*

B. *Ist* $k \geqq 20$, *so hat für jedes* $X \geqq q$ *die Ungleichung* (3)

$$\sigma X + O\left(X^{1-\frac{1}{12 k^3 \log k}}\right)$$

ganze Lösungen x, y *mit* $0 < x \leqq X$.

Das Resultat B gibt einerseits viel mehr als A, da es ja eine Näherungsformel für die Lösungsanzahl liefert, ist aber andererseits natürlich schlechter wegen

$$\frac{1}{12 k^3 \log k} < \frac{1}{15 k^2 \log k}.$$

Aus diesen zwei einfachen Beispielen mögen Sie ersehen, daß die bewunderenswürdige Entdeckung von Vinogradoff Wünsche erfüllt, an die wir vor zwei Jahren selbst in unseren schönsten Träumen nicht gedacht haben.

Ich hoffe, meine Damen und Herren, in Ihnen die Überzeugung geweckt und befestigt zu haben, daß das abgelaufene Jahr für die Theorie der Diophantischen Approximationen von großer Bedeutung war.

Anmerkungen.

[1] J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band **4**, (157 S.) Berlin: Springer 1936.

[2] Die Literaturliste ergänze man mit: P. Lévy, Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue, Bull. Soc. math. de France **57** (1929) S. 178—194.

[3] H. F. Blichfeldt, A new principle in the geometry of numbers, with some applications. Trans. Am. Math. Soc. **15** (1914), 227—235;

Reports on the theory of the geometry of numbers, Bull. Amer. Math. Soc. **25** (1919), 449—453.

R. Remak, Vereinfachung eines Blichfeldtschen Beweises aus der Geometrie der Zahlen, Math. Zeitschrift **26** (1927), 694—699.

4 H. Minkowski, Geometrie der Zahlen (256 S.), Leipzig u. Berlin: Teubner 1910; unveränderter Nachdruck 1925, S. 122.

5 J. G. van der Corput und G. Schaake, Anwendung einer Blichfeldtschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen, Acta Arithmetica **2** (1936), 152—160.

6 K. Mahler, erscheint demnächst in den Acta Arithmetica.

7 O. Perron, Über diophantische Approximationen, Math. Ann. **83** (1921), 77—84.

A. Khintchine, Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Perron, Math. Zeitschrift **22** (1925), 274—284.

Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, Rend. Circ. mat. Palermo **50** (1926), 170—195.

8 V. Jarník, Über einen Satz von A. Khintchine, Prace matematyczno—fizyczne **43** (1935), 1—16.

Sur les approximations diophantiques simultanées, Bull. intern. de l'Académie des Sciences de Bohême 1935, 1—8.

9 J. G. van der Corput, Verteilungsfunktionen, Proceedings Kon. Ak. van Wetensch. Amsterdam **38** (1935), 813—821; 1058—1066; **39** (1936), 10—19; 19—26; 149—153; 339—344; 489—494; 579—590.

10 A. Thue, Om en generel i store hele tal uløsbar ligning. Norske Vid. Selsk. Skr. 1908, Nr. 7, 15 S.

Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, J. reine angew. Math. **135** (1909), 284—305.

C. L. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschrift **10** (1921), 173—213; Jb. philos. Fak. Göttingen 1921, 291—296.

Über Näherungswerte algebraischer Zahlen, Math. Ann. **84** (1921), 80—99.

Über den Thueschen Satz, Norske Vid. Selsk. Skr. 1921 II, Nr. 16, 12 S.

Th. Schneider, Über die Approximation abgebraischer Zahlen, J. reine angew. Math. **175** (1936), 182—192.

11 K. Mahler, Ein Analogon zu einem Schneiderschen Satz, Proceedings Kon. Ak. van Wetensch. Amsterdam **39** (1936), 633—640; 729—737.

12 Th. Skolem, Untersuchungen über die möglichen Verteilungen ganzzahliger Lösungen gewisser Gleichungen, Norske Vid. Selsk. Skr. 1921 Nr. 17, 57 S.

Über ganzzahlige Lösungen einer Klasse unbestimmter Gleichungen, Norsk Math. For. Skr. **1** (1922), Nr. 10, 12 S.

Über die Dichte der Gitterpunkte in asymptotischen Umgebungen gewisser unendlicher Kurvenzweige. 6. Kongreß Skand. Math. Kopenhagen 1925 (1926), 207—227.

Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen, Math. Ann. **95** (1926), 2—68.

Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf Diophantische Gleichungen. Skr. norske Vid.-Akad. Oslo 1933, Nr. 6, 61 S.

13 J. G. van der Corput, Diophantische Ungleichungen II. Rhytmische Systeme, Abschnitte A und B, Acta Mathematica **59** (1932), 209—328.

14 H. Weyl, Über ein Problem aus dem Gebiet der Diophantischen Approximationen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1914), 234—244.

Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. **77** (1916), 313—352.

Zur Abschätzung von $\zeta(1+ti)$, Math. Zeitschrift, **10** (1921), 88—101.

J. G. van der Corput, Diophantische Ungleichungen I. Zur Gleichverteilung modulo Eins, Acta Mathematica **56** (1931), 373—456.

[15] J. G. van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen nach der Piltzschen Methode, Mathem. Zeitschrift **10** (1921), 105—120.

[16] I. M. Vinogradoff, Über die Bruchteile eines ganzen Polynoms, Bull. Acad. Sci. URSS (6), **20** (1926), 585—600 (Russisch).

[17] V. Bergström, Beiträge zur Theorie der endlichdimensionalen Modulen und der Diophantischen Approximationen, Dissertation 1935 Lund, Meddelanden från Lunds Universitets Matematiska Seminarium, Band 2.

[18] J. G. van der Corput, Zur Methode der stationären Phase, Compositio Mathematica **1** (1934), 15—38; **3** (1936), 328—372.

[19] B. Meulenbeld, Een approximatieve functionaalbetrekking van de zetafunctie van Riemann, Dissertation Groningen (1936) 84 S.; Einleitung (21 S.) in Deutsch.

[20] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, The Zero's of Riemann's Zetafunction on the critical line, Math. Zeitschrift **10** (1921), 283—317.

The approximate functional equation in the theory of the Zetafunction, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz, Proc. London Math. Soc. (2), **21** (1922), 39—74.

The approximate functional equations for $\zeta(s)$ and $\zeta^2(s)$, Proc. London Math. Soc. (2) **29** (1929), S. 81—97.

[21] E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Zweiter Band, S. 184, Leipzig; S. Hirzel (1927).

[22] I. M. Vinogradoff, Analytischer Beweis des Satzes über die Verteilung der Bruchteile eines ganzen Polynoms, Bull. Acad. Sci. URSS (6), **21** (1927), 567—578 (Russisch).

J. G. van der Corput, Neue zahlentheoretische Abschätzungen II, Math. Zeitschrift **29** (1929), 397—426.

E. C. Titchmarsh, On van der Corput's method and the zetafunction of Riemann. Quart. J. Math., Oxford Ser. **2** (1931), 161—173; 313—320; **3** (1932), 133—141; **5** (1934), 98—105; 195—210; **6** (1935) 106—112.

[23] I. M. Vinogradoff, Sur l'approximation au moyen des fractions rationnelles, dont les dénominateurs sont des puissances de nombres entiers, C. R. Acad. Sci., URSS 1935 **II**, 1—5 (Russisch mit französischem Auszug).

[24] I. M. Vinogradoff, On some rational Approximations, C. R. Acad. Sci., URSS 1935 **III**, 3—6.

On approximation to zero with help of numbers of certain general form, Recueil mathématique Moscou, **42** (1935), 149—156.

On fractional terms of polynomials and of other functions, C. R. Acad. Sci., URSS 1935 III, 99—100.

Nouvelles évaluations des sommes de Weyl, C. R. Acad. Sci., URSS 1935 III, 195—198.

On Weyl's sums, Recueil mathématique Moscou **42** (1935), 521—530.

On the number of fractional parts of a polynom lying in a given interval, Recueil mathématique **43** (1936), 3—8.

A new method of resolving of certain general questions of the theory of numbers, Recueil mathématique, **43** (1936), 9—20.

Approximation by mean of fractional parts of a polynomial, Recueil mathématique **43** (1936), 21—27.

Approximations with help of certain fractions, Annals of Mathematics **37** (1936), 101—106.

Sur les nouveaux résultats de la théorie analytique des nombres, C. R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), 179—180.

On some rational approximations, C. R. Acad. Sci. URSS **3** (1935), 3—6.

On fractional terms of polynomials and of other functions, C. R. Acad. Sci. URSS **3** (1935), 90—100.

A new improvement of the estimation of trigonometrical sums, C. R. Acad. Sci. URSS **1** (1936), 199—200.

New results concerning the distribution of fractional parts of a polynomial, C. R. Acad. Sci. URSS **2** (1936), 361—364.

Vergl. auch K. Mardšanišvili, Über die simultane Zerfällung ganzer Zahlen in *M*-te und *N*-te Potenzen, C. R. Acad. Sci. URSS **2** (1936), 263—264.

A new method of estimation of trigonometrical sums, Recueil mathématique Moscou **43** (1), 1936, 175—188.

Man vergl. J. G. van der Corput, Über einige Vinogradoffsche Methoden, Proc. Acad. Wetensch. Amsterdam **39** (1936), 345—351; 494—503; 590—595.

Über Weylsche Summen, Mathematica, **5** (1936), 1—30 (Holländische Zeitschrift).

25 N. Tchudakoff, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$, C. R. Acad. Sci., Paris **202** (1936), 191—193.

On zeros of the function $\zeta(s)$, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS **1** (1936), S. 201—204.

DIE THEORIE DER OPERATIONEN UND IHRE BEDEUTUNG FÜR DIE ANALYSIS

Von S. Banach, Lwów.

I

Die Bedeutung der Theorie der Operationen für die gesamte Mathematik tritt am deutlichsten hervor, wenn wir uns ihre geschichtliche Entwicklung vergegenwärtigen. Als Operation bezeichnet man eine Zuordnung, welche den Elementen einer Menge, des sogn. Bereiches, die Elemente einer anderen Menge, des sogn. Gegenbereiches, entsprechen läßt; dies ist also eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffes einer Funktion, welche Zahlen wieder mit Zahlen verbindet. Bereits in den Anfängen der Mathematik begegnen wir dem Begriffe einer Operation, z. B. dann, wenn wir von der Länge einer Kurve, von dem Flächeninhalte einer Fläche, oder vom Volumen eines Körpers sprechen. Später kommen die Begriffe der Ableitung, des unbestimmten Integrals und des bestimmten Integrals vor. Von den zuletzt genannten Operationen ordnen die zwei ersten Funktionen wieder Funktionen, die dritte aber Funktionen Zahlen zu. Als Operationen können auch die Grenze einer Zahlenfolge und die Summe einer Zahlenreihe angesehen werden, die gewissen Zahlenfolgen Zahlen zuordnen; ähnliches gilt für Grenzen von Funktionenfolgen wie auch Funktionenreihen.

Die ersten Grundlagen für die Theorie der Operationen verdankt man Herrn V. Volterra, der systematisch solche Operationen untersuchte, welche stetige Funktionen in ebensolche Funktionen abbildet. Bereits von ihm wurde eine besondere Klasse der Operationen ausgezeichnet, die der linearen in der heutigen Terminologie, und Herr J. Hadamard hat sie dann näher betrachtet. An die Fredholmschen Arbeiten über die Integralgleichungen anschließend, entwickelte Herr D. Hilbert eine Theorie der linearen Operationen, deren Bereich und Gegenbereich ein wichtiger Raum ist, der nach ihm seinen Namen trägt. Einen weiteren Schritt in der Entwicklung der Theorie stellen die Untersuchungen des Herrn M. Fréchet dar, der den Begriff eines metrischen Raumes eingeführt hatte. Somit gelang es ihm zu zeigen, daß die wichtigen Begriffe, z. B. der Begriff einer stetigen Operation, der Grenze einer Folge von Operationen und viele andere, die man früher nur für gewöhnliche Funktionen kannte, auch für Räume von so allgemeiner Natur einen Sinn haben.

Eine Spezialisierung der Operationen erhalten wir, falls wir fordern, daß in ihren Bereichen und Gegenbereichen gewisse Verknüpfungen erklärt sind. Insbesondere ist der Fall interessant, wo im Bereiche und Gegenbereiche die Addition der Elemente sowie die Multiplikation der Zahlen durch Elemente definiert ist. Indem wir voraussetzen, daß diese Verknüpfungen den üblichen Gesetzen der Algebra genügen, gelangen wir zum Begrifte eines vektoriellen oder linearen Raumes. Vektorielle Räume, in welchen eine Norm erklärt ist, d. h. in welchen jedem Elemente eine Zahl mit Eigenschaften der Länge eines Vektors zugeordnet wird, nennen wir normiert. In einem vektoriellen normierten Raume kann die Entfernung zweier Elemente als die Norm ihrer Differenz erklärt werden; erweist sich bei dieser Metrisierung der Raum als vollständig, so nennen wir ihn einen Raum vom Typus (B); offensichtlich bilden diese eine Verallgemeinerung der euklidischen Räume. Den Begriff eines Raumes vom Typus (B) haben unabhängig voneinander Herr N. Wiener und ich eingeführt. Nun zeigt es sich, daß viele Räume, die in der Analysis betrachtet werden Räume vom Typus (B) sind, so insbesondere der Raum der stetigen Funktionen, der Hilbertsche Raum, die von Herrn F. Riesz untersuchten Räume der mit der p-ten Potenz integrierbaren Funktionen und viele andere. Die große Wichtigkeit der Räume vom Typus (B) besteht darin, daß sie es erlauben die Begriffe der verschiedenartig-regulären Operationen einzuführen, die z. B. den linearen, polynomischen, analytischen und differenzierbaren Funktionen der gewöhnlichen Analysis entsprechen; diese Klassen werden mit denselben Namen bezeichnet. Die für diese regulären Operationen erhaltenen Resultate erlauben uns wichtige Sätze aus verschiedenen Zweigen der Mathematik abzuleiten.

II

In der Theorie der Operationen kann man im Einklang mit dem Vorhergehenden verschiedene Gebiete, so z. B. Algebra, Analysis, Topologie u. s. w. unterscheiden. Den Hauptbegriff in der Algebra der Theorie der Operationen stellt der Begriff einer linearen Operation dar. Eine Operation $U(x)$, die den Elementen eines vektoriellen Raumes die Elemente eines anderen vektoriellen Raumes zuordnet und der Bedingung $U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2)$ genügt, wird additiv genannt; ist sie noch dazu stetig, so bezeichnet man sie als linear. Die Mathematik liefert viele Beispiele von linearen Operationen; zu ihnen gehören z. B. die Ableitung, das unbestimmte und bestimmte Integral, die Grenze einer Zahlenfolge, die Summe einer Zahlenreihe u. s. w. Zur Entwicklung der Theorie der linearen Operationen haben neben den oben erwähnten Gelehrten auch die Herren H. Hahn, E. Helly, P. Levy, J. Radon, H. Steinhaus und andere vieles beigetragen.

Wir wollen nun die wichtigsten Resultate der Theorie der linearen Operationen besprechen. Jede additive Operation, die sich als Grenze von stetigen Operationen darstellen läßt, allgemeiner jede additive Baire'sche Operation ist stetig. Dieses Ergebnis bildet eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes, laut welchem die einzigen Baire'schen Funktionen, die der

Bedingung $f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2)$ genügen, die Gestalt at besitzen. In Betracht dessen, daß wir in der Praxis keine anderen Operationen als die Baire'schen antreffen, können wir also im Allgemeinen sicher sein, daß jede in der Analysis vorkommende in einem Raume vom Typus (B) definierte additive Operation stetig ist; umgekehrt: kann man sich von irgendeiner additiven Operation in voraus überzeugen, daß sie nicht stetig ist, so bildet das Gebiet, in welchem sie erklärt ist, keinen Raum vom Typus (B).

Die klassischen Sätze über die Kondensation der Singularitäten lassen sich auf den Fall der Räume vom Typus (B) übertragen. In diesem allgemeinen Falle haben sie folgenden Charakter: Ist eine Folge von Eigenschaften $\{E_n\}$ gegeben, und gibt es für jedes n ein Element, das die Eigenschaft E_n nicht besitzt, so gibt es auch ein Element, welches keine der Eigenschaften E_n aufweist; von jeder der Eigenschaften E_n müssen wir dabei voraussetzen, daß die Menge der Elemente, denen sie zukommt, linear und im Borelschen Sinne meßbar ist.

Von grundlegender Bedeutung ist der Satz von der Erweiterung der linearen Funktionale; unter Funktional verstehen wir dabei eine Operation mit Zahlen als Werten. Der zuletzt genannte Satz besagt, daß jedes lineare in einer linearen Menge erklärte Funktional sich zu einem in ganzem Raume linearen Funktional erweitern läßt.

Die Theorie der linearen Operationen ermöglicht eine genaue Untersuchung der Gleichungen der Form $U(x)=y$, wo $U(x)$ eine lineare Operation bezeichnet; y ist gegeben, x wird gesucht. Sie liefert verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichungen solcher Art. Zu diesem Zwecke wird u. a. der Begriff der mit $U(x)$ konjugierten linearen Operation $\overline{U}(Y)$ eingeführt, die vermittels der Gleichung $X(x)=Y[U(x)]$ den linearen Funktionalen $Y(y)$ die linearen Funktionale $X(x)$ zuordnet. Mit Hilfe dieses zuletzt definierten Begriffes gelangt man z. B. zu dem Satze: Für die unbeschränkte Lösbarkeit der Gleichung $U(x)=y$ ist die Existenz der stetigen Umkehrung der Operation $\overline{U}(Y)$ notwendig und hinreichend.

Die Theorie der linearen Operationen besitzt mannigfache Anwendungen; einerseits erlaubt sie bekannte Sätze aus verschiedenen Gebieten der Mathematik in einheitlicher und einfacher Weise zu erhalten, andererseits aber können mit ihrer Hilfe auch viele neue Ergebnisse gewonnen werden. Ihre wichtigsten Anwendungen beziehen sich auf die Theorie der linearen Integralgleichungen, der linearen numerischen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, der Orthogonalreihen, der Summierbarkeit u. s. w.

Die klassische Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen erweist sich als ein Spezialfall der Theorie der Gleichungen $x-\lambda\, U(x)=y$, wo $U(x)$ eine lineare vollstetige Operation bezeichnet; vollstetig nennt man eine

Operation, wenn sie beschränkte Mengen in kompakte überführt. Die Theorie solcher Gleichungen wurde im wesentlichen von Herrn F. Riesz aufgestellt. Aus den vorher angegebenen Sätzen über allgemeine lineare Gleichungen, lassen sich übrigens verschiedene Integralgleichungen betreffende Folgerungen auch in den in der klassischen Analysis nicht betrachteten Fällen ziehen; einer dieser Sätze gibt, wie es Herr S. Mazur bemerkte, den ergodischen Satz für die statistische Mechanik, in der von Herrn J. v. Neumann gegebenen Formulierung. In der Theorie der linearen numerischen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, sowie in der Theorie der Momentenprobleme gewinnt man eine Reihe von Resultaten, indem man u. a. Sätze benutzt, die mit den folgenden sogn. allgemeinen Momentenproblemen verknüpft sind: bei gegebenen Elementen x_n und Zahlen c_n wird ein lineares Funktional $X(x)$ mit $X(x_n)=c_n$, oder bei gegebenen linearen Funktionalen $X_n(x)$ und Zahlen c_n wird ein Element x mit $X_n(x)=c_n$ gesucht.

Die Methoden der Theorie der linearen Operationen wurden in der Theorie der Orthogonalreihen von den Herren S. Kaczmarz, W. Orlicz, H. Steinhaus u. a. benutzt; daß sie hier ein wesentliches Werkzeug bildet, zeigt uns das ausgezeichnete Buch der Herren S. Kaczmarz und H. Steinhaus — „Theorie der Orthogonalreihen", das in der Sammlung „Monografie Matematyczne" erschienen ist. Die Sätze über die Kondensation der Singularitäten erlauben die Existenz von Funktionen nachzuweisen, deren Entwicklungen nach gegebenen Orthogonalsystemen gewisse Singularitäten aufweisen, z. B. in einer überalldichten Menge divergieren. Andere Sätze der Theorie der linearen Operationen geben gleichzeitig notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Entwicklung jeder Funktion aus einer gegebenen Funktionenklasse, z. B., jeder stetigen Funktion nach gegebenem Orthogonalsystem in gewissem Sinne konvergent, z. B. gleichmäßig konvergent wäre. Aus den Sätzen über Baire'sche additive Operationen und über allgemeine Momentenprobleme folgert man hier verschiedene Resultate über Multiplikatoren für Orthogonalsysteme;[1] man charakterisiert in mannigfacher Weise die Mengen der zulässigen Multiplikatoren für gegebene Funktionenklassen und stellt Beziehungen zwischen solchen Mengen von Multiplikatoren auf. Die in letzter Zeit erhaltenen Sätze über lakunäre Orthogonalreihen ergeben sich unter anderen aus der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen und bilden ein passendes Beispiel einer Überlegung, bei der man die mathematischen Schwierigkeiten nicht ohne tieferes Eindringen in die Theorie der linearen Operationen überwinden kann.

Die allgemeine Theorie der Summationsmethoden ist ein natürliches Anwendungsgebiet der Theorie der linearen Operationen; in der erwähnten Monographiensammlung soll ein Buch von Herrn S. Mazur „Allgemeine Limitierungstheorie" erscheinen, in welchem die Methoden der Theorie der linearen Operationen voll zur Geltung kommen; viele Anwendungen in diesem Gebiete der Mathematik wurden zusammen von Herren S. Mazur und W. Orlicz angegeben. Die Theorie der Summationsmethoden behandelt vor allem zwei Probleme: welche vektorielle Räume von Zahlenfolgen als Konvergenzfelder der Summationsmethoden genommen werden können und welche additive Funktionale in vektoriellen Räumen von Zahlenfolgen mit Hilfe von Summationsmethoden erklärt werden können. Die Theorie der linearen Operationen erlaubt eine Reihe sich auf diese Probleme beziehender Resultate zu erhalten, z. B.: jede Methode summiert gewisse unbeschränkte Zahlenfolgen, wenn sie überhaupt irgendwelche divergente summiert, oder: ist jede beschränkte mit einer Methode summierbare Zahlenfolge auch mit einer anderen Methode summierbar, so zu derselben Grenze.

In engerem Zusammenhange mit der Theorie der linearen Operationen stehen die Sätze, welche sich auf konvexe Mengen und Funktionale beziehen; die ersten Ergebnisse in dieser Hinsicht stammen von Herrn G. Ascoli, und Herrn S. Mazur gelang es vor kurzem zu zeigen, daß die diesbezüglichen wesentlichen Sätze der klassischen Theorie von H. Minkowski in euklidischen Räumen auch in den Räumen vom Typus (B) bestehen bleiben. Diese Resultate haben viele Anwendungen. Die Bedingungen für die Halbstetigkeit eines konvexen Funktionals in Räumen vom Typus (B) gestatten es eine neue direkte Methode in der Variationsrechnung zu schaffen. Diese Methode ergibt eine Vereinfachung der vor kurzem vom Herrn L. Tonelli entwickelten Theorie einer Klasse von Variationsproblemen. Mit ihrer Hilfe kann man auch gewisse allgemeinere Variationsprobleme lösen, entweder solche bei welchen es sich um Doppelintegrale in Parameterform handelt oder solche bei welchen die Ableitungen der gesuchten Funktionen in beliebig hoher Ordnung vorkommen; auch darf die Integrationsmannigfaltigkeit geschlossen sein. Diese Anwendungen stammen von den Herren S. Mazur und J. Schauder.

III

Die linearen Operationen bilden einen Spezialfall der polynomischen Operationen; diese letzteren sind der eigentliche Gegenstand der Operationenalgebra. Bis vor kurzem gab es in dieser Hinsicht eigentlich nur Definitionen. Die Herren S. Mazur und W. Orlicz haben nun mit eingehenden Untersuchungen begonnen und insbesondere die elementare Teilbarkeitstheorie für polynomische Operationen in Räumen vom Typus (B) mit dem Hilbertschen Nullstellensatz als Schlußergebnis entwickelt; man erhält mit Hilfe der dort benutzten Methode verschiedene Sätze, die sogar im Falle der gewöhnlichen Polynome mehrerer Veränderlichen neu sind. Das Endziel wäre die Theorie der Gleichungen der Form $U(x)=y$, im Falle einer beliebigen polynomischen Operation $U(x)$; doch tappen wir diesbezüglich fast vollkommen im Dunklen. Wir wissen nicht welcher Art die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit dieser Gleichungen sind, ein Problem welches nur im Falle von Polynomen ersten Grades, wie ich früher erwähnte, gelöst wurde. Die Theorie der polynomischen Operationen ist sicherlich von Interesse, nicht nur aus dem Grunde, daß die polynomischen Operationen eine natürliche Verallgemeinerung der linearen Operationen darstellen, sondern auch darum, daß viele Probleme der klassischen Analysis sich als Fragestellungen dieser Theorie deuten lassen. Erwähnen wir noch, daß einige Sätze aus der Theorie der linearen Operationen, z. B. der Satz über die Stetigkeit der additiven Baire'schen Operationen und die Sätze über Kondensation der Singularitäten ihre Analogona in der Theorie der allgemeineren polynomischen Operationen haben.

Mit dem Begriffe der polynomischen Operationen eng verbunden sind die analytischen Operationen, d. h. Operationen, die sich in der Form einer Reihe darstellen lassen, deren n-tes Glied eine homogene polynomische Operation n-ten Grades ist. Es gibt einige Arbeiten, welche die Sätze über analytische Funktionen auf analytische Operationen verallgemeinern; insbesondere, ein Analogon des Cauchy-Hadamardschen Satzes über den Konvergenzradius, Sätze über den analytischen Charakter der implizit analytisch erklärten Operationen u. s. w.

Ein grundlegender Begriff für die Analysis der Operationen ist der des Differentials oder Variation; die Einführung dieses fruchtbaren Begriffes verdankt man Herrn M. Frechet. Zur Analysis der Operationen gehören die Sätze über Extrema von Funktionalen, über implizite Operationen, über Gleichungen, in denen Differentiale der unbekannten Operationen auftreten, und die den Differentialgleichungen im gewöhnlichen Sinne entsprechen u. s. w.; vieles verdankt man in dieser Hinsicht Herrn V. Volterra und Herrn P. Levy. Die Analysis der Operationen wird u. a. in der Variationsrechnung, bei Systemen von Differentialgleichungen mit unendlichvielen unbekannten Funktionen, bei nichtlinearen Differential und Integralgleichungen verwendet.

IV

Nun gehe ich zur Besprechung der Topologie in Räumen vom Typus (B) über. Der bekannte Brouwersche Fixpunktsatz besagt, das es bei jeder stetigen Abbildung einer abgeschlossenen konvexen und kompakten Menge auf sich wenigstens einen Fixpunkt gibt, sobald es sich um Mengen handelt, die in euklidischen Räumen gelegen sind. Herr G. D. Birkhoff und O. Kellog erkannten, daß dieser Satz in gewissen Fällen im Raume der stetigen Funktionen und im Hilbertschen Raume zutrifft. Besonders interessant ist es nun, daß wie die genannten Verfasser zeigten, aus diesem Satze unmittelbar bekannte Existenzsätze für gewisse gewöhnliche Differentialgleichungen und nichtlineare Integralgleichungen folgen. Einige Zeit später hat Herr J. Schauder den Fixpunktsatz für allgemeine Räume vom Typus (B) bewiesen, und bekam daraus ganz neue Existenzsätze für elliptische und für hyperbolische Differentialgleichungen; die Tragweite der topologischen Methode wird durch die Tatsache bestätigt, daß Herr J. Schauder auf diese Weise z. B. das Dirichletsche Problem für elliptische Differentialgleichungen unter der einzigen Voraussetzung der Stetigkeit der in Betracht kommenden Funktionen gelöst hat.

In den letzten Jahren wurden auch andere topologische Sätze auf Räume vom Typus (B) übertragen und durch ihre entsprechende Interpretation erhält man neue wichtige und schöne Resultate in klassischen Gebieten der partiellen Differentialgleichungen. Ich erwähne die wichtigsten dieser Verallgemeinerungen. Herr J. Schauder bewies den Satz von der Invarianz des Gebietes für gewisse Räume vom Typus (B) und eineindeutige stetige Abbildungen spezieller Art; aus diesem Satze ausgehend erkannte er, daß für allgemeine nichtlineare elliptische Differentialgleichungen im gewissen Sinne die Existenz der Lösungen eine Folge der eindeutigen Lösbarkeit ist. Die Herren J. Leray und J. Schauder verallgemeinerten ferner den Begriff des Abbildungsgrades auf den Fall der Räume vom Typus (B) und erhielten daraus Existenzsätze im Großen für elliptische Differentialgleichungen, wo keine Eindeutigkeit gefordert wird; diese Ergebnisse sind also der Methode der sukzessiven Approximationen nicht zugänglich. Die oben erwähnten Sätze wurden auch von Herrn J. Leray auf die Hydrodynamik angewendet. Herr J. Leray zeigte auch, daß der Jordansche Kurvensatz, bzw. dessen Alexandroffsche Verallgemeinerung für abgeschlossene Mengen, sich auf Räume vom Typus (B) verallgemeinern läßt. Für die bereits erwähnte Monographieeinsammlung ist ein Buch von Herrn J. Schauder „Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus" bestimmt, in welchem als eine der wesentlichen Methoden die der Theorie der Operationen benutzt wird.

V

Ich habe mich in meinem Vortrage auf die Darstellung derjenigen Ergebnisse aus der Theorie der Operationen beschränkt, die in allgemeinen Räumen vom Typus (B) bestehen. Nicht berücksichtigt wurden also diejenigen Untersuchungen, die sich auf speziellere so wie auch allgemeinere Räume als die vom Typus (B) beziehen. Diese hier nicht besprochenen wichtigen Teile der Theorie der Operationen haben auch ein ausgedehntes Anwendungsgebiet. Hierher gehören vor allem die neuesten grundlegenden

Untersuchungen der Herren J. v. Neumann und H. Stone über nichtbeschränkte insbesondere Hermite'sche Operationen im Hilbertschen komplexen Raume; diese wurden in den vortrefflichen Darstellungen der beiden Verfasser in erschöpfender Weise behandelt. Zu erwähnen wären noch die Ergebnisse des Herrn L. Fantappiè über Operationen für analytische Funktionen.

Der Kreis der Mathematiker, die sich mit der Theorie der Operationen von verschiedenen Standpunkten beschäftigen, wird immer größer; leider war es mir in einer so kurzer Zeit nicht möglich alle wichtigen Arbeiten, auch diejenigen die sich auf Räume vom Typus (B) beziehen, zu besprechen. Ich glaube aber an den gewählten Beispielen Ihnen gezeigt zu haben, welche Tragweite und Bedeutung den Methoden der Operationen zukommt. Sie verbinden miteinander in ungewohnter Weise scheinbar voneinander gänzlich getrennte Gebiete, sie steigern die Kraft unserer geometrischen Intuition, sie gestatten komplizierte Beziehungen der Analysis auf einfachere zurückzuführen und dadurch neue Eigenschaften zu erschließen.

MÉLANGES MATHÉMATIQUES

Par Maurice Fréchet, Paris.

Le Comité d'organisation ayant bien voulu me laisser toute liberté dans le choix du sujet, vous m'excuserez de vous faire un peu vagabonder dans le domaine des mathématiques. Le lien apparent mais un peu factice, entre les sujets que je traiterai consiste dans mon intention de venir compléter, par le résumé de travaux récents, quelques unes des conférences générales entendues aux derniers congrès. La raison véritable du choix de ces sujets, c'est que ce sont ceux dont je me suis occupé le plus, directement ou indirectement, dans ces dernières années et que par conséquent je connais le mieux.

I. Analyse générale.

Dans ma conférence générale au Congrès International des Mathématiciens tenu à Bologne en 1928, j'avais cherché à donner une idée d'ensemble de la nature, de la raison d'être et des résultats de l'Analyse générale et de la Théorie des espaces abstraits.

Depuis lors, ces théories ont effectué des progrès qui leurs sont propres, et d'autre part, s'est encore accru le nombre des disciplines mathématiques particulières qui ont pris avantage de ces théories générales.

C'est ainsi que les ouvrages sur la topologie qui limitaient, il y a seulement une dizaine d'années, son domaine aux espaces à un nombre fini de dimensions, prennent tous ou presque tous, depuis cette époque, leur point de départ dans la théorie des espaces abstraits. C'est-à-dire que, d'une part, on ne spécifie pas, avant qu'il ne soit nécessaire, la nature des éléments ou points considérés et que, d'autre part, on ne définit pas non plus d'une façon précise, tant que cela n'est pas indispensable, la notion de transformation continue: on se contente de lui imposer certaines conditions — que beaucoup aiment à appeler des axiomes.

La théorie des groupes, elle aussi, participe de cette tendance et on y parle maintenant couramment de groupes topologiques. Cette notion — où le mot topologique est entendu au sens le plus général — permet d'exprimer dans un langage intuitif et simple des propositions de la théorie des groupes qui seraient, autrement, presque impossibles à énoncer dans l'ancienne théorie.

Les travaux de M. M. Bouligand, Menger et de leurs éléves ont montré qu'en utilisant comme longueur généralisée une des intégrales simples étudiées dans le Calcul des Variations (et aussi en étendant la définition de ces intégrales), on peut en déduire des conditions d'existence de l'extremum plus étendues que celles qui résultent des méthodes de Weierstrass.

De même, l'arithmétique et l'algèbre se détachent de plus en plus de la notion vulgaire de nombre entier; elles opèrent sur des nombres abstraits soumis à des modes de composition définis de manière descriptive et non constructive.

Et on y voit utilisée une notion de « Bewertung », liée à l'« inégalité triangulaire », qui permet de transposer la notion d'espace distanciée dans l'arithmétique.

Enfin, on voit même que la physique moderne en prenant pour espace fondamental des espaces de plus en plus complexes, faisait de l'Analyse générale sans le savoir. Elle le fait maintenant en le sachant et par conséquent d'une manière plus systématique — grâce à un jeune physicien-mathématicien, M. J. L. Destouches.

— A notre connaissance, la première définition d'une intégrale étendue à un ensemble abstrait est celle que nous avons publiée en 1915 en généralisant et modifiant une définition donnée par Radon pour les intégrales multiples d'ordre fini. Cette extension s'est trouvée indispensable dans la théorie des probabilités, par exemple quand on veut étudier la probabilité de combinaisons d'événements en nombre infini. D'autre part, M. Nikodym (qui avait un peu plus tard retrouvé independamment ma définition de l'intégrale) vient de m'informer qu'un fait permet de distinguer ma définition de celle de M. Radon même quand toutes deux sont étendues à un simple segment linéaire. Un ensemble de fonctions orthonormées (relativement au même « poids ») serait, ou non, necessairement dénombrable, suivant que la notion d'intégrale est prise au sens de M. Radon ou au mien.

Dans la suite, on a été amené à donner: soit des définitions de l'intégrale moins générales que la nôtre, mais suffisantes pour une catégorie plus limitée de fonctionnelles comme celles de M. Daniell, de Gâteaux, de M. Paul Lévy, de M. Jessen, etc. . . soit au contraire plus générales dans la forme, comme celle de M. Kolmogoroff, ou de même forme mais plus générale dans la nature de sa valeur qui devient vectorielle abstraite (et non nécessairement numérique) comme celle de M. Garrett Birkhoff. D'autres définitions, plus générales encore ont été données par M. M. Freudenthal, Glivenko, ...

— C'est M. Volterra qui, le premier, a donné la définition de la différentielle — ou variation — d'une fonctionnelle. Nous avons donné d'abord, en 1911, une forme plus générale à cette définition pour le cas même considéré par M. Volterra (fonction numérique de ligne). Puis nous avons donné plus tard en 1925, une définition applicable à toute transformation d'un espace vectoriel abstrait distancié à un espace de même nature.

Comme nous avons montré que cette nouvelle définition conservait les propriétés les plus précieuses de la différentielle ordinaire, son usage tend à se répandre de plus en plus. Elle s'est trouvée répondre à des besoins divers, aux mains de MM. Leray et Schauder en Hydrodynamique, de

M. Lusternik en Calcul des Variations, de MM. N. Kryloff et Bogoliouboff en Mécanique non linéaire, de MM. Hildebrandt, Graves, Michal en Analyse générale, etc. . .

D'autres définitions de la différentielle ont été proposées.

M. Paul Lévy considère comme différentiable au point X_0 toute fonctionnelle $U[X]$ telle que $\dfrac{U[X_0+\lambda \Delta X]-U[X]}{\lambda}$ ait une dérivée par rapport au paramètre numérique λ, pour $\lambda=0$, soit $W[\Delta X, X_0]$, et telle de plus que cette dérivée soit une fonctionnelle «linéaire» de ΔX.

M. Hadamard définit la différentielle totale d'une fonction numérique $f(x, y)$ de deux variables numériques x, y, comme une fonction de la forme $A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy$, telle que si x, y sont des fonctions différentiables d'une variable auxiliaire t, $f(x, y)$ soit une fonction différentiable de t, dont la différentielle est donnée par la formule

$$df(x(t), y(t)) = A\, dx(t) + B\, dy(t). \tag{1}$$

On peut observer qu'en appliquant la définition de M. Paul Lévy au cas simple de fonctions ordinaires, on peut former une fonction $f(x, y)$ ayant une différentielle à son sens et pour laquelle la formule (1) n'est pas exacte,[1] ce qui prive cette sorte de différentielle de l'un des principaux avantages de la différentielle ordinaire. Par contre, on peut prouver ([1]) que la définition de la différentielle due à M. Hadamard est entièrement équivalente à celle de la différentielle totale de Stolz-Young, bien que ces deux définitions soient basées sur deux idées tout à fait différentes. D'ailleurs quand on applique notre définition de la différentielle au cas d'une fonction «ordinaire» (fonction numérique d'une ou d'un nombre fini de variables numériques), on obtient aussi une définition équivalente à celle de Stolz-Young.

On peut penser à étendre la définition de la différentielle due à M. Hadamard au cas des transformations abstraites, sous la forme suivante:

Soit $U[X]$ une transformation d'un espace vectoriel dans un espace vectoriel. U est différentiable au point X_0, s'il existe une transformation $V[\Delta X, X_0]$ linéaire en ΔX, telle que si l'on fait dépendre X d'un paramètre numérique t de sorte que $X(t_0)=X_0$ et que X soit différentiable en t, au point t_0, $U[X(t)]$ soit aussi différentiable en t, au point t_0, avec $dU[X(t)]=V[dX(t), X_0(t)]$ pour $t=t_0$.

(Ceci suppose déjà défini dX quand la variable indépendante est un paramètre numérique, mais il n'y a pas là de difficulté).

---

[1] Fréchet, Sur les diverses définitions de la différentielle, Journal de Mathématique, 1937, sous presse.

Toute transformation différentiable à mon sens l'est au sens de M. Hadamard généralisé. Par contre, on peut donner ([1]) un exemple où s'appliquerait cette dernière définition sans que s'applique la mienne. Il suffit de prendre pour X une fonction continue $x(t)$ définie sur (a, b) et pour U le maximum de $x(t)$. M. Paul Lévy avait déjà observé que cette fonctionnelle n'est pas différentiable à son sens pour $X_0(t)$ quand $X_0(t)$ prend sa valeur maximum en plusieurs points. On peut montrer que, si, au contraire, $X_0(t)$ ne prend sa valeur maximum qu'en un point, $U[X]$ peut avoir une différentielle au sens de M. Hadamard généralisé sans en avoir à mon sens.

Il serait intéressant et d'ailleurs facile de s'assurer si les applications déjà citées de notre définition subsisteraient si l'on adoptait la définition de M. Hadamard généralisée, laquelle d'après ce qui précède est plus générale que la mienne, mais moins que celle de M. Paul Lévy.

— Dans les recherches sur la mécanique quantique, on a utilisé, puis généralisé de façon intéressante, ce que j'appellerai l'espace des fonctions de carrés sommables et que je désignerai par Ω. C'est l'espace où chaque élément est une fonction réelle ou complexe dont le carré du module est intégrable au sens de M. Lebesgue sur un intervalle a, b et où la «distance» de deux de ces fonctions $f(x)$, $g(x)$ est représentée par $\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_b^a |f(x)-g(x)|^2\,dx}$. Cette distance qu'on peut désigner par la notation fg satisfait d'ailleurs à «l'inégalité triangulaire»: $fg \leqq fh + hg$. C'est cet espace qui est la base des calculs de la méthode des moindres carrés.

Dans tout espace distancié, on peut définir un produit scalaire par la même formule que dans l'espace euclidien

$$(hf,\ hg) = \frac{1}{2}(hf^2 + hg^2 - fg^2). \tag{2}$$

Dans l'espace Ω, ce produit jouit de propriétés simples exprimables indépendamment de la nature des éléments de l'espace Ω. C'est cette remarque qui a conduit plusieurs auteurs, et en particulier M. von Neumann, à donner une définition axiomatique basée sur la notion de produit scalaire d'une certaine catégorie C d'espaces jouissant de propriétés analogues à celle de Ω. Pour pouvoir englober le cas où les f sont complexes, ils ont même pris comme base un produit scalaire dissymétrique. On peut observer qu'il était plus naturel de procéder comme en géométrie élémentaire c'est-à-dire de fonder la définition de la catégorie C sur la notion de distance[1] et de déduire de celle-ci au moyen de la formule (2), une définition du produit scalaire symétrique.[1] On peut enfin, à partir de celui-ci, si l'on désire généraliser l'expression

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (f-h)\overline{(g-h)}\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b (P+iQ)\ (P_1-iQ_1)\ dx,$$ — qui joue,

pour $f-h=P+iQ$, $g-h=P_1+iQ_1$, le rôle de produit scalaire dissymétrique $(hf,\ hg)$, — poser

$$((hf,\ hg))=(hf,\ hg)+i\,(ihf,\ fg).$$

Ce sont là des remarques d'un caractère didactique qui montrent que la catégorie des espaces (C) que nous pourrons appeler les espaces de von Neumann — ne sont qu'en apparence en dehors de la famille plus générale des espaces vectoriels distanciés, famille conçue à la fois par M. M. Banach, Wiener et feu Hahn.

Mais une autre question se pose. Cette catégorie C, conçue artificiellement pour «ressembler» à l'espace Ω des fonctions de carrés sommables, a-t-elle un lien défini et simple avec celui-ci? La réponse est affirmative: on peut montrer[2] que les espaces de von Neumann forment la famille la plus générale d'espaces vectoriels distanciés «vectoriellement isométriques» de l'espace Ω des fonctions de carrés sommables.

Parmi les espaces de cette famille figure «l'espace concret de Hilbert», celui dont chaque élément est une suite X de nombres x_n, tels que $\Sigma|x_n|^2$ converge et où la distance de X et de l'élément Y défini par les y_n est $XY=\sqrt{\Sigma|x_n-y_n|^2}$. De sorte que pour chaque espace abstrait E de von Neumann existe une isométrie vectorielle avec l'espace concret de Hilbert. Cette correspondance permet d'assigner à chaque élément X de E une suite de nombres x_n jouant le rôle de coordonnées et par conséquent de déterminer une géométrie analytique de E. On a d'ailleurs peut-être abusé de cette géométrie analytique; il est généralement plus intuitif, plus instructif et souvent plus simple de raisonner directement sur les éléments de E. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour la théorie des équations intégrales symétriques comme on le voit en comparant les démonstrations directes de M. E. Schmidt aux démonstrations primitives de M. Hilbert (lesquelles conservent l'avantage d'avoir été les premières en date).

---

[1] C'est aussi la conclusion à laquelle était arrivé indépendamment M. von Neumann et qu'il avait mise en pratique dans l'un de ses cours.

[2] M. Fréchet, Détermination de la classe la plus générale des espaces abstraits vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace concret de Hilbert. (Rivista Mat. Hispano-Am., t. IX, 1931, p. 193—201.)

II. Théorie des fonctions analytiques.

Tournons-nous maintenant vers des domaines plus classiques, et commençons par la théorie des fonctions analytiques. Pour avoir une idée de ses progres récents on ne saurait mieux faire que de se reporter à l'exposé magistral qui en a été fait à Zurich par M. Julia. Aussi voulons-nous seulement signaler les progrès réalisés récemment dans un domaine particulier: dans la théorie des développements de Mittag-Leffler, théorie devenue si classique qu'on pouvait la croire parvenue à une forme définitive. Mittag-Leffler avait résolu le problème suivant: soient données une suite de points isolés a_1, a_2, $\cdots$ dont on suppose, par exemple, qu'ils tendent vers l'infini, et une suite de fonctions entières G_k en $\frac{1}{z-a_k}$, existe-t-il e un fonction analytique uniforme ayant pour seuls points singuliers à distance finie les a_k et pour parties principales correspondantes les $G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$?

La réponse est, comme on le sait, affirmative et on obtient la solution générale en ajoutant à l'une des solutions une fonction entière quelconque.

Mais on voit que le problème et la solution de Mittag-Leffler ne concernent que les singularités *isolées*.

On peut songer à étendre cette solution au cas général de points singuliers distribués d'une manière quelconque. Il ne s'agira pas alors, seulement, de résoudre le nouveau problème, mais d'abord de le poser d'une manière précise puisque la définition classique de la partie principale ne s'applique qu'à un point singulier isolé.

Cette question a fait l'objet d'un mémoire paru dans les Acta Mathematica en 1930. On définit d'abord sous-ensemble isolé d'un ensemble E, tout ensemble tel que la distance de I à $E-I$ soit positive. La partie principale d'une fonction $f(z)$ relative à un ensemble isolé I dans l'ensemble F des points singuliers de $f(z)$ est ensuite définie comme la fonction uniforme $P(z)$ dont l'ensemble des points singuliers se réduit à I, qui est nulle à l'infini et qui ne diffère de $f(z)$ que par une fonction holomorphe sur I.

Il est clair que si l'on se donne une famille M d'ensembles plans I, si l'on associe à chaque ensemble I une fonction $P_I(z)$, il ne peut exister de fonction $f(z)$ dont les I sont des ensembles singuliers isolés et les $P_I(z)$ les parties principales correspondantes, que si chaque ensemble I est fermé et isolé dans la fermeture E de la somme E des I, et si chaque $P_I(z)$ est nulle à l'infini et a I pour ensemble singulier. Il faut de plus que le système des I et des P_I soit «cohérent» en ce sens que si I et J de M ont au moins un point commun a, $P_I(z)/P_J(z)$ doit être holomorphe au point a.

On peut démontrer que ces conditions nécessaires sont suffisantes et obtenir ainsi la généralisation complète du problème et de la solution de Mittag-Leffler.

La solution de Mittag-Leffler suggérait du reste *un autre problème*, — ni résolu, *ni même posé par lui* et qui ne nous parait pas moins intéressant que le premier.

Soit E l'ensemble des points singuliers *isolés* d'une fonction $f(z)$.

Mittag-Leffler a déduit de sa solution du premier problème posé, qu'on peut écrire $f(z) = \varphi(z) + \psi(z)$ où $\varphi(z)$ a pour ensemble singulier la fermeture $\bar{E}$ de E et où $\psi(z)$ est holomorphe sur E.

Mais si $\varphi(z)$ se trouve être ainsi plus simple en général que $f(z)$, il n'en est pas de même de $\psi(z)$. Il n'y aura véritable progrès que si $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont tous deux plus simples que f. A cet effet, on peut pousser plus loin la décomposition. En décomposant de la même manière $\psi(z)$, puis en poursuivant transfiniment la décomposition, on peut démontrer que toute fonction uniforme $f(z)$ est la somme de deux fonctions uniformes $p(z)$ et $q(z)$ holomorphes partout où $f(z)$ est holomorphe et dont les ensembles singuliers P, Q appartiennent respectivement à deux classes d'ensembles moins générales que celle de l'ensemble singulier le plus général. Pour préciser, on peut, par exemple, supposer que Q est encore l'ensemble de fermeture $\bar{E}$ de l'ensemble E des points singuliers *isolés* de $f(z)$, mais que, cette fois, *P est parfait.*

Ces résultats ont été étendus à leur tour par M. Aronszajn. Dans un mémoire paru également aux Acta Mathematica, il a établi en 1935 le théorème suivant:

Soit $F = P + Q$ une décomposition de l'ensemble singulier F d'une fonction uniforme $f(z)$ en deux sous-ensembles, disjoints ou non, P, Q absolument quelconques. Alors il est possible de décomposer $f(z)$ dans la somme de deux fonctions uniformes $P(z)$ et $Q(z)$ ayant exactement les ensembles de fermeture $\bar{P}$, $\bar{Q}$ de P et de Q pour ensembles singuliers.

M. Aronszajn a d'ailleurs tiré de cette proposition un grand nombre d'applications intéressantes dans le détail desquelles il nous est impossible d'entrer ici. Contentons-nous d'exprimer la conviction que ce remarquable théorème pourra encore rendre de grands services dans d'autres recherches.

III. Théorie des Probabilités.

Délaissant maintenant la Théorie des fonctions analytiques, nous allons passer à celle des Probabilités. Les progrès de cette théorie ont été exposés à Zurich par M. Serge Bernstein et par M. von Mises. Pour ne pas être trop long, je reporterai à une communication à la Section IV quelques commentaires sur le très intéressant rapport de M. von Mises. Je voudrais seulement faire connaître dans cette conférence quelques travaux parus depuis l'exposé si suggestif de M. Bernstein.

Mais ici nous nous adressons à tout le congrès et pas seulement aux «probabilistes» de la Section IV: nous savons que les mathématiciens n'ont pas tous à s'occuper fréquemment de Calcul des Probabilités et que certains peuvent craindre d'avoir quelque difficulté à suivre un exposé sur ce sujet ou simplement à s'y intéresser.

Pour ne pas trop exiger de leur bienveillance, nous parlerons donc seulement ici de problèmes qui peuvent être considérés independamment de leur origine comme des *problèmes d'Analyse mathématique.* Nous pensons en ce moment à ceux qui sont posés par la théorie des événements en chaîne abordée indépendamment par Markoff et par Poincaré.

Depuis quelques années, le nombre des mémoires consacrés à ces sujets est devenu considérable. Aussi consacrerai-je presque entièrement le «Deuxième Livre», de mon ouvrage «Recherches théoriques modernes sur le Calcul des probabilités» — dont le «Premier Livre» est déjà paru — à un exposé des différents travaux parus sur les évènements en chaine. Et même ai-je du me borner pour ne pas trop allonger ce second Livre au cas des chaines discrètes constantes pour un nombre fini d'états possibles.

Ceci me met à l'aise pour renvoyer à ce Deuxième Livre — que je me suis efforcé de faire très complet — l'indication de travaux importants que je n'ai pas encore eu le temps d'étudier complètement et pour ne parler ici dans cette brève conférence que de ceux que je connais bien et même seulement de quelques uns de ceux-ci. On m'excusera aussi de renvoyer à ce livre pour les indications bibliographiques.

La théorie des événements en chaîne traduit mathématiquement les théorèmes des probabilités totales et composées, — dans les cas divers où elle se place successivement, — par des équations d'itération algébrique ou intégrale selon que les variables ne peuvent prendre que des valeurs entières ou, au contraire, varient continuement.

Dans le premier cas, qui est celui considéré par Markoff, l'équation d'itération est de la forme

$$P_{jk}^{(n+1)} = \sum_{i\ 1}^{i=r} P_{ji}^{(n)} p_{ik}; \quad \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} = 1,\ 2,\ \cdots r$$

ou ce qui revient au même

$$(I) \qquad P_{jk}^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{i=r} p_{ji} P_{ik}^{(n)}; \quad \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} = 1,\ 2\ \cdots r$$

Il faut en outre tenir compte des relations

$$(P) \qquad p_{jk} \geqq 0; \qquad (T) \sum_k p_{jk} = 1.^{1}$$

Le problème essentiel est alors d'étudier le comportement asymptotique des $P_{jk}^{(n)}$ quand n croît.

Nous nous contenterons ici de renvoyer à un exposé des résultats obtenus dans l'étude de ce cas publié en collaboration par M. Hadamard et par nous-même, en 1933.[2] Dès cette époque, on pouvait dire avec M. Bernstein, que « la théorie des chaînes discrètes de Markoff est devenue un des chapitres les plus parfaits du Calcul classique des Probabilités ».

Aux résultats fondamentaux dus à divers auteurs, qui ont été mentionnés dans notre exposé de 1933, il ne pourrait guère plus s'agir d'ajouter que des perfectionnement, comme ceux qui ont été publiés récemment par M.M. Romanovsky, Mihoc et Dœblin ou des démonstrations nouvelles de résultats déjà connus. C'est ainsi que M. Kolmogoroff et M. Doeblin ont réussi à retrouver récemment et indépendamment les principaux résultats acquis par des méthodes algébriques en étendant au cas de Markoff général la si remarquable méthode directe non algébrique exposée par M. Hadamard au Congrès de Bologne dans le cas du battage des cartes.

Passons maintenant du cas discret ou discontinu de Markoff au cas continu considéré pour la première fois par MM. Hadamard et Hostinsky.

L'équation d'itération n'est plus cette fois une équation algébrique mais une équation intégrale

$$(I_1) \qquad P^{(n+1)}(E, F) = \int_V P^{(n)}(E, G)\, p(G, F)\, dG$$

ou

$$= \int_V p(E, G)\, P^{(n)}(G, F)\, dG$$

avec les conditions

$$(P_1) \qquad p(E, F) \geqq 0; \qquad (T_1) \quad \int_V p(E, F)\, dF = 1,$$

E, G, F étant des points variant dans une région donnée V de l'espace à ν dimensions.[3] MM. Hadamard et Hostinsky ont étendu à ce cas la méthode de Markoff dans le cas où V est fini, $p(E, F)$ continu et $\neq 0$ sur tout V.

[1] On suppose qu'un certain système peut se présenter sous un nombre fini d'états $E_1, \cdots E_r$ et que $P_{jk}^{(n)}$ est la probabilité de passer de E_j à E_k en n épreuves. On a posé: $P_{jk}^{(1)} = p_{jk}$.

[2] Sur les probabilités discontinues des événements en chaine, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 13, p. 92–97.

[3] Ici $P^{(n)}(E, F)$ est une densité de probabilité, $\int_v P^{(n)}(E, F)\, dF$ étant la probabilité de passer de l'état E de V à un des états F d'une portion donnée v de V. On a posé $p(E, F) = P^{(1)}(E, F)$.

On trouve qu'alors $P^{(n)}(E, F)$ converge uniformément vers une limite $P(F)$ indépendante de E. C'est le cas régulier.

De graves difficultés se présentent quand on veut étendre ces raisonnements au cas le plus général, celui où la région V est finie ou non, et où les fonctions $p(E, F)$ ne sont pas supposées bornées. Après avoir reconnu combien de cas et de sous-cas se présentent quand on ne veut faire aucune hypothèse simplificatrice, on s'assurera, au contraire, qu'un choix convenable d'hypothèses très larges permet de retrouver un parallélisme presque absolu avec le cas discontinu de Markoff.

Il suffit de supposer V fini et d'admettre en outre, qu'il existe un rang m assez grand pour que $P^{(m)}(E, F)$ soit borné.

De même que dans le cas discontinu, il y a intérêt quand on ne veut pas se limiter au cas régulier, à abandonner la méthode de Markoff et à considérer d'abord isolément l'équation d'itération (I_1).

On résoud de cette manière un problème indépendant de la Théorie des probabilités et qui a son intérêt propre. L'équation d'itération (I_1) nous montre en effet que $P^{(n)}(E, F)$ n'est autre que l'itéré de rang n du noyau de Fredholm $p(E, F)$. L'une des méthodes qu'on peut appliquer dans le cas discontinu consistait à discuter le comportement des solutions d'une équation aux différences finies, solutions dont on connait l'expression en fonction de n. Ici, dans le cas continu, on ne connait actuellement l'expression des noyaux itérés en fonction du rang d'itération que dans des cas particuliers comme le cas des noyaux symétriques, et celui des noyaux de rang fini. Heureusement la méthode des noyaux orthogonaux de MM. Goursat, Heywood et Lalesco permet de tourner cette difficulté. On peut décomposer $p(E, F)$ en une somme $A(E, F) + \varepsilon(E, F)$ où $A(E, F)$ est la somme des noyaux principaux de $p(E, F)$ correspondant aux constantes caractéristiques de module 1, s'il en existe. A et ε sont alors nécessairement orthogonaux et on sait qu'alors $P^{(n)}(E, F)$ est la somme des itérés $A^{(n)}(E, F)$ et $\varepsilon^{(n)}(E, F)$ de A et de ε.[1] Or, si l'on suppose que les $P^{(n)}(E, F)$ sont uniformément bornés à partir d'un certain rang, les constantes caractéristiques de $P(E, F)$ sont toutes de module $\geqq 1$. Les constantes caractéristiques de $\varepsilon(E, F)$ s'il en existe seront en module > 1, et on sait qu'alors $\varepsilon^{(n)}(E, F)$ converge uniformément vers zéro. On voit alors que l'étude de la convergence asymptotique des noyaux itérés peut se réduire au cas où le noyau initial est de rang fini et n'a que des constantes caractéristiques de module 1. Or, dans ce cas, le problème se ramène à un

[1] C'est ici le lieu de signaler la Thèse soutenue à Paris en Juillet 1936 par M. Monteiro où celui-ci montre, entre autres, que la propriété $P^{(n)} = A^{(n)} + \varepsilon^{(n)}$ peut être vérifiée quel que soit n par des noyaux ε, A, non nécessairement orthogonaux, qu'il appelle *additifs* et dont il a étudié les propriétés.

problème algébrique analogue à celui qui se présente dans le cas de Markoff. On peut en faire une étude complète et, en particulier, obtenir facilement ainsi la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas régulier.

Pour appliquer les résultats obtenus — qui concernent tous les noyaux de Fredholm bornés à la longue — au cas des probabilités en chaîne, il suffit de tenir compte des conditions (P_1), (T_1). Or on peut démontrer dans ce cas une curieuse (et ici importante) proposition arithmético-géométrique: *si le domaine V est fini, si l'une au moins, $P^{(m)}(E, F)$, des densités itérés est bornée, les constantes caractéristiques de module* 1 *du noyau $P(E, F)$ vérifient une même équation binome* $\lambda^N = 1$, (où N est un entier). On en déduit facilement que les densités itérées $P^{(n)}(E, F)$ sont des fonctions asymptotiquement périodiques de n et en particulier que, dans le cas singulier comme dans le cas régulier, *elles convergent uniformément* au sens de Cesaro, c'est-à-dire *en moyenne arithmétique quand n croit.*

Laissant de côté beaucoup de détails intéressants concernant ce cas, nous mentionnerons seulement la Thèse en cours d'impression où M. Doeblin étend au cas continu la méthode directe mentionnée plus haut. Observons cependant qu'on peut ramener le cas continu à un cas intermédiaire entre le cas continu et le cas discontinu. A cet effet, on peut employer les fonctions auxiliaires de Schmidt. On sait que pour un noyau $K(M, P)$ — supposé, pour simplifier, continu sur un domaine V borné, — il existe un système de constantes auxiliaires μ_1, μ_2 et deux systèmes orthonormés de fonctions $X_j(M)$, $Y_k(P)$ tels que

$$X_j(M) = \mu_j \int_V K(M, P)\, Y_j(P)\, dP$$

$$Y_j(M) = \mu_j \int_V K(P, M)\, X_j(P)\, dP.$$

Ceci étant, on démontre que le $n^{\text{ième}}$ noyau itéré $K(M, P)$ peut se représenter sous la forme

$$K_n(M, P) \approx \sum_{jk} V_{jk}(n)\, X_j(M)\, Y_k(P)$$

où les $V_{jk}(n)$ sont certaines constantes telles qu'en posant $a_{jk}(n) = \mu_j \mu_k V_{jk}(n+1)$, les a_{jk} vérifient l'équation d'itération

$$(I^{\text{bis}}) \qquad a_{jk}(n+p) = \sum_{k=1}^{k=\infty} a_{ji}(n)\, a_{ik}(p)$$

(Ici on a écrit

$$(3) \qquad F(M, P) \approx \sum_{jk} \varphi_{jk}(M, P)$$

pour signifier que

$$\int\limits_V\int\limits_V \left| F(M, P) - \sum_{j=1,\ k=1}^{j=r,\ k=r} \varphi_{jk}(M, P) \right| dMdP$$

tend vers zéro quand r croit).

On peut d'ailleurs montrer que dans des cas très généraux, la convergence «en double moyenne quadratique» de l'équation (3) peut se remplacer par une convergence uniforme.

On voit maintenant que l'équation d'itération intégrale (I_1) se trouve ramenée à une équation d'itération (I^{bis}), du même type que (I), mais où la somme finie est remplacée par une série. On a un cas qui, si les α étaient des probabilités, correspondrait à un ensemble dénombrable d'états possibles.

C'est bien un cas intermédiaire entre le cas d'un nombre fini d'éatst et celui d'une suite continue d'états.

On peut aussi arriver au même but en employant un système de base moins particulier que celui des fonctions auxiliaires de Schmidt.

— Le cas où les indices i, j, k de l'équation d'itération (I) peuvent prendre un nombre infini de valeurs entières paraissait être théorique et ne répondre à aucune application particulière. On a pourtant récemment rencontré des problèmes pratiques où il se présente. Et le raisonnement qui vient d'être fait montre que son étude peut contribuer à l'élucidation du cas continu.

Après avoir été d'abord négligé, ce cas intérmédiaire a retenu récemment l'attention de M. Fortet qui a précisé quelques conditions pour le cas régulier et par M. Kolmogoroff qui lui a étendu la méthode non algébrique de M. Hadamard.

Suite continue d'épreuves. — Dans ce qui précède, on a eu à étudier le comportement asymptotique d'une quantité $P_{ik}^{(n)}$ ou $P^{(n)}(E, F)$ quand l'entier n croit. L'interprétation de n dans la Théorie des Probabilités en chaîne est le numéro d'une épreuve. Mais on peut aussi étudier une suite continue d'épreuves. L'indice n sera alors remplacé par le temps.

L'équation d'itération intégrale (I_1) sera remplacée par l'équation de Smoluchowski

$$P(E, F, \tau+\tau') = \int\limits_V P(E, G, \tau)\ P(G, F, \tau')\, dG$$

avec $\tau \geqq 0$, $\tau' \geqq 0$,

ou plus généralement par l'équation de Chapman—Kolmogoroff

$$P(E, F, s, t) = \int\limits_V P(E, G, s, u)\ P(G, F, u, t)\, dG$$

avec $s \leqq u \leqq t$.

Ces deux équations ont fait l'objet de nombreux travaux de Smoluchowsky, Chapman, Hostinský, Kolmogoroff, Paul Lévy, N. Kryloff et

Bogoliuboff, Pospizil, Doeblin et de nous-même. On approche de plus en plus du but, mais je crois qu'il sera plus sage d'en remettre l'exposé au prochain Congrès où elle aura probablement déjà atteint une forme définitive.

Nous nous contenterons donc de parler d'un problème de même nature mais plus simple et dont on a maintenant la solution complète. Examinons ce que devient l'équation d'itération algébrique (I) quand on y fait intervenir une suite continue d'épreuves. On a alors

$$(I_4) \qquad P_{jk}(s, t) = \sum_{i=s}^{r} P_{ji}(s, u)\, P_{ik}(u, t).$$

avec $s \leqq u \leqq t$.

Il y a lieu d'adjoindre à (I_4), les conditions

$$(P_4) \quad P_{jk}(s, t) \geqq 0; \qquad (T_4) \quad \sum_k P_{jk}(s, t) = 1.$$

Enfin, il faut aussi compléter par les conditions

$$(L) \qquad P_{jk}(s, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

M. Kolmogoroff a montré que la solution dérivable la plus générale du système (I_4), (P_4), (T_4), (L) est la solution unique, vérifiant les conditions initiales (L), du système canonique d'équations différentielles linéaires en t

$$\frac{dP_{ik}(s, t)}{dt} = \sum_j \mu_{jk}(t)\, P_{ij}(s, t)$$

où les $\mu_{jk}(t)$ sont $\geqq 0$ pour $j \neq k$, avec $\sum_k \mu_{jk}(t) = 0$, d'ou $\mu_{kk}(t) \leqq 0$.

Ce résultat important nous sera utile dans la suite. Mais il ne fournit pas l'expression de la solution.

M. Hostinský en faisant un usage ingénieux de l'importante méthode due à M. Volterra et connue sous le nom d'intégration des substitutions, a pu donner une expression explicite d'une solution très générale du même système (I_4), (P_4), (T_4), (L). Cette expression se présente sous la forme d'une série illimitée d'intégrale multiples, d'ordres croissants et dépend de r^2 fonctions arbitraires. ([1])

---

[1] Depuis le Congrès d'Oslo, M. Hostinský a montré qu'on peut obtenir le même développement en appliquant la méthode des approximations successives aux équations différentielles (4) de Kolmogoroff. Ce second mode de démonstration présente l'avantage considérable d'établir que la solution obtenue est unique sous certaines conditions de régularité.

On peut perfectionner son résultat de deux façons, en obtenant une solution non seulement très générale mais la plus générale et d'autre part de forme plus simple.

La forme même de (I_4) montre que pour une valeur u_0 déterminée de u, pour $s \leqq u_0$ et $t \geqq u_0$, $P_{jk}(s, t)$ est de la forme

$$P_{jk}(s, t) = \sum_i a_{ji}(s)\, b_{ki}(t).$$

On peut démontrer rigoureusement que la solution continue la plus générale de l'équation (I_4) pour $s \leqq u \leqq t$ est nécessairement de cette forme, (sans plus supposer s, t séparés par un nombre fixe) quand elle vérifie (L), les $a_{ki}(s)$ étant continues avec un déterminant $d(s)$ positif et les b_{ki} formant avec les a_{ki} un système biorthonormé.

Cela revient à écrire qu'on a

$$P_{jk}(s, t) = \sum_i \frac{a_{ji}(s)\; A_{ki}(t)}{d(t)} \tag{4}$$

où les $A_{ki}(t)$ sont les coefficients des $a_{ki}(t)$ dans le développement de $d(t)$.

Mais il faudrait, en outre, tenir compte des conditions (P_4) et (T_4). On y arrive facilement pour $r=2$.

Dans ce cas particulier — où i, j, k ne peuvent prendre que les valeurs 1 et 2, — la solution continue la plus générale du système (I_4), (P_4), (T_4), (L) est de la forme:

$$P_{11}(s, t) = 1 - \frac{a(t) - a(s)}{d(t)}, \quad P_{12}(s, t) = \frac{a(t) - a(s)}{d(t)}$$

$$P_{21}(s, t) = \frac{b(t) - b(s)}{d(t)}, \quad P_{22}(s, t) = 1 - \frac{b(t) - b(s)}{d(t)}$$

où $a(s)$, $b(s)$ sont deux fonctions arbitrairement choisies pourvu qu'elles soient continues non décroissantes et que leur somme reste positive.

On étudie facilement, dans ce cas de $r=2$, le comportement asymptotique des $P_{jk}(s, t)$ quand t croit.

Dans le cas de r entier quelconque, le résultat est moins simple. On vérifie facilement (T_4) en prenant les $a_{k1}(s)$ égaux à 1. Mais pour la condition (P_4), on trouvera commode d'utiliser le résultat de M. Kolmogoroff mentionné ci-dessus, ce qui conduira à se limiter aux solutions dérivables. On verra alors que pour avoir la solution dérivable la plus générale du système (I_4), (P_4), (T_4), (L), il faut assujettir dans la solution (4) les fonctions a_{kj} aux deux conditions supplémentaires $a_{k1}(s) \equiv 1$,

$$\sum_i a'_{ji}(t)\, A_{ki}(t) \begin{cases} \leqq 0 & \text{pour } j \neq k \\ \geqq 0 & \text{pour } j = k. \end{cases}$$

On voit que la théorie des probabilités en chaîne fait appel à plusieurs théories mathématiques: équations aux différences finies, équations intégrales, raisonnements empruntés à la théorie des groupes, etc. . . .

C'est ce qui s'observe encore mieux dans l'ensemble du Calcul des Probabilités. Celui-ci est à la fois une science pure et une science appliquée.

On peut, à volonté, y être vague ou précis, se fier à l'intuition ou être rigoureux.

En partant de fondements axiomatiques appropriés on peut, en Calcul des Probabilités, atteindre exactement le même degré de rigueur que dans les théories les plus exigeantes. C'est seulement dans le passage de la théorie aux applications concrètes que des appréhensions seront justifiées. Mais des appréhensions de même nature et de même force se présentent aussi légitimement pour les applications des autres sciences; par exemple, si l'on veut utiliser la théorie de la mesure des ensembles dans les calculs pratiques des longueurs. On peut d'ailleurs constater que parmi les jeunes «probabilistes» les plus en vue, on rencontre des mathématiciens qui ont précisément débuté par des recherches sur cette théorie des ensembles où la rigueur est si exigeante.

Mais pour aborder les probabilités il n'est pas indispensable de s'être d'abord consacré à la théorie des ensembles.

La théorie des Probabilités, qui n'est pas familière à tous les mathématiciens, présente pourtant le très grand attrait de se prêter aux applications des branches les plus diverses des mathématiques. C'est dire en même temps que les esprits les plus variés peuvent y apporter une contribution utile.

Les fondements du Calcul des Probabilités présentent des difficultés sans cesse renaissantes qui provoqueront l'attention et la méditation des esprits philosophiques. Les géométres trouveront dans les probabilités continues des solutions d'une suprème élégance. Les virtuoses du calcul auront dans les probabilités discontinues aussi bien que continues maintes occasions de jongler avec les formules. Enfin à ceux qui aiment le concret s'offriront de nombreuses applications des probabilités à la physique, à la biologie, à la démographie, etc.

La mode sévit comme ailleurs dans le monde des mathématiciens. Il y a cinquante ans, un grand nombre des jeunes mathématiciens étaient attirés vers les fonctions analytiques, puis la jeunesse s'est jetée sur la théorie des ensembles; actuellement la topologie est en vogue et elle le mérite. Nous ne souhaitons pas qu'il soit de mode de s'occuper spécialement de probabilité. Mais nous exprimons le vœu qu'un grand nombre de mathématiciens s'intéressent assez à cette théorie pour la faire profiter de temps en temps de la diversité de leurs connaissances et de la variété de leurs talents.

GAP THEOREMS

By Norbert Wiener, Cambridge, Mass.

In general, a gap theorem is the assertion that a function $f(x)$ with the Fourier or Dirichlet series

$$f(x)=\sum a_n e^{i\lambda_n x}, \tag{1}$$

or the Taylor series

$$f(x)=\sum a_n x^{\lambda_n}, \tag{2}$$

has certain properties which depend merely on the distribution of the λ_n.[1] In this sense, it is a gap theorem to assert that the function with the Fourier series

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \tag{3}$$

is of period 2π.

Closely connected with the very notion of a gap theorem is the problem of determining the coefficients a_n in terms of the function $f(x)$. The determinations which are of most interest are the integral determinations of the form

$$a_n=\int_C f(x) g_n(x) dx. \tag{4}$$

The path C of integration is a matter of great importance. It is very often the doubly infinite axis of reals. In case (3), we have

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \tag{5}$$

and the path of integration is a segment of the axis of reals, of length 2π. Let it be noted that c and g_n are not in general uniquely determined — that we may write, in fact,

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{A-\pi}^{A+\pi} f(x)\, e^{-inx}dx \tag{6}$$

in place of (5), for any real A.

---

[1] Paley and Wiener. Am. Math. Soc. Colloquium Pub. Vol. XIX. Chapters V—VIII. — N. Levinson, On a problem of Pólya, Am. Journal of Math., Vol. LVIII, p. 791. By the same author, Non Harmonic Fourier Series, Ann. of Math. Vol. 37, p. 919.

If we consider formula (4) as applied to case (1), we see that

(7) $$\int_C e^{i\lambda_m x} g_n(x)\,dx = \begin{cases} 1 \text{ if } m=n; \\ 0 \text{ if } m \neq n. \end{cases}$$

Thus if we put

(8) $$\int_C e^{iux} g_n(x)\,dx = G_n(u),$$

we have

(9) $$G_n(\lambda_m) = \begin{cases} 1 \text{ if } m=n; \\ 0 \text{ if } m \neq n. \end{cases}$$

In general, if

(10) $$G(u) = G_n(u)\,(u-\lambda_n),$$

we shall have

(11) $$G(\lambda_n) = 0$$

for all values of n. If we now put $G_n(u)$ for the Lagrange interpolation function

(12) $$G_n(u) = \frac{G(u)}{(u-\lambda_n)\,G'(\lambda_n)},$$

or for the limiting value of this function, in case both numerator and denominator tend to zero for a particular value of u, (9) will be satisfied. Hence at least formally, we have reduced the problem of determining all the functions $G_n(u)$ to the determination of the single function $G(u)$.

If C is a curve of finite diameter (or a set of points of finite diameter in the complex plane), $G_n(u)$ and hence $G(u)$ are integral functions of the exponential type. As the λ_n are zeros of such a function, the Weierstrass product

(13) $$P(u) = \prod \left(1 - \frac{u}{\lambda_n}\right) e^{\frac{u}{\lambda_n}}$$

converges, and we may write

(14) $$G(u) = P(u)\,Q(u),$$

where $Q(u)$ is an entire function of not more than exponential type. For a given C and a given set of λ_n, the problem of the determination of the g_n reduces to the determination of the entire functions $Q(u)$ such that we may write

(15) $$\frac{P(u)\,Q(u)}{(u-\lambda_n)\left[\dfrac{d}{du}\left(P(u)\,Q(u)\right)\right]_{u=\lambda_n}} = \int_C e^{iux} g_n(x)\,dx.$$

To solve this, we must be able to recognize the functions of the form

$$\int_C e^{iux} g(x)\, dx. \tag{16}$$

There are certain cases where the relevant theorems are known. If $g(x)$ belongs to L^2, and C is the segment of the axis of reals from $-A$ to A, the functions (16) are integral functions dominated by $e^{A|u|}$, and belonging to L^2 along the doubly infinite axis of reals. Conversely, every integral function subject to these conditions has a representation (16), where C is the real interval $(-A, A)$ and $g(x)$ belongs to L^2 over this interval. This theorem is due to the late R. E. A. C. Paley and myself.[1]

Closely connected with this theorem is another, due to Titchmarsh, Pólya, Paley, myself, and Levinson,[2] to the effect that in an integral function of this sort, the zeros are located (with the exception of a set, the number of which, in a circle of radius R about the origin, is $o(R)$), in the sectors $-\varepsilon<\vartheta<\varepsilon$, $\pi-\varepsilon<\vartheta<\pi+\varepsilon$, and that in each of these sectors, the number of zeros with modulus $<R$ is

$$\frac{RA}{\pi} + o(R). \tag{17}$$

This theorem allows us to conclude that if the Pólya maximal density of the zeros of $\varphi(u)$ either to the right or to the left of the origin exceeds $\frac{A}{\pi}$, it is impossible to put

$$\varphi(u)=\int_{-A}^{A} e^{iux} g(x)\, dx, \tag{18}$$

where $g(x)$ belongs to L^2 over $(-A, A)$.

Another result from the Pólya theory of the indicatrix is that if $\varphi(u)$ is an integral function dominated by $e^{A|u|}$, then it may be written in form (16), where C is any circle about the origin of radius $>A$, and $g(x)$ is analytic on this circle. Conversely, every function of form (16), where $g(x)$ is bounded, and C a circle of radius A about the origin, is dominated by $e^{A|u|}$ for large values of $|u|$. The number of zeros of such a function within a circle of radius R, divided by R, has an upper bound of oscillation not exceeding $\frac{2A}{\pi}$. An integral function of order 1, for which this upper bound does not exceed $\frac{2A}{\pi}$, is dominated by $e^{(A+\varepsilon)|u|}$.

[1] Paley and Wiener, loc. cit. chapter V.

[2] N. Levinson, loc. cit.

This latter class of results leads directly to the Fabry gap theorem. Let the λ_n be a set of zero density, and let

$$G(u) = \prod \left(1 - \frac{u^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{19}$$

This function has less than exponential growth. By the theory of the indicatrix,

$$G(u) = \int_C g(z)\, e^{iuz}\, dz \tag{20}$$

where C is an arbitrarily small circle about the origin, on which $g(x)$ is bounded. Furthermore,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty G(u)\, e^{-iuz}\, du, \tag{21}$$

where the integral is taken in such a sense as to make it converge. Similarly, if we put

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-izu} \frac{G(u)}{(u-\lambda_n)\, G'(\lambda_n)}\, du, \tag{22}$$

we shall have

$$\int_C g_n(z)\, e^{iuz}\, dz = \frac{G(u)}{(u-\lambda_n)\, G'(\lambda_n)} = \begin{cases} 0 \text{ if } u = \lambda_m\, (m \neq n); \\ 1 \text{ if } u = \lambda_n. \end{cases} \tag{23}$$

It follows that

$$e^{\varepsilon|\lambda_n|}\, e^{-\varepsilon|u|} \int_C g_n(z)\, e^{iuz}\, dz = \begin{cases} 0 \text{ if } |u| = |\lambda_m|\, (m \neq n);\ u = -\lambda_n; \\ 1 \text{ if } u = \lambda_n. \end{cases} \tag{24}$$

Now,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuz} \frac{G(u)}{(u-\lambda_n)\, G'(\lambda_n)}\, e^{\varepsilon|\lambda_n|}\, e^{-\varepsilon|u|}\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-iuz} \frac{G(u)}{(u-\lambda_n)\, G'(\lambda_n)}\, e^{\varepsilon|\lambda_n|}\, e^{-\varepsilon u}\, du \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} e^{-iuz} \frac{G(u)}{(u-\lambda_n)\, G'(\lambda_n)}\, e^{\varepsilon|\lambda_n|}\, e^{\varepsilon u}\, du \\ &= \{g_n(z-i\varepsilon) - g_n(z+i\varepsilon)\}\, e^{\varepsilon|\lambda_n|}. \end{aligned} \tag{25}$$

Thus

$$(26)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\{g_n(z-i\varepsilon)-g_n(z+i\varepsilon)\}\,e^{-iuz}\,dz=\begin{cases}e^{-\varepsilon|\lambda_n|} \text{ if } u=\lambda_n;\\ 0 \text{ if } |u|=|\lambda_m|\,(m\neq n);\ u=-\lambda_n.\end{cases}$$

Hence if $f(x)$ is defined by (1), we have formally

$$(27)\qquad a_n=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\varepsilon|\lambda_n|}f(z)\{g_n(z-i\varepsilon)-g_n(z+i\varepsilon)\}\,dz.$$

It is not difficult to prove that this is actually true if the distance between two λ_n's has a positive lower bound, and $\Sigma|a_n|^2$ converges.

Now let this be the case, and let

$$(28)\qquad F(z)=\sum_{1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z}.$$

Then

$$(29)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\{g_n(z-i\varepsilon)-g_n(z+i\varepsilon)\}\,e^{\varepsilon|\lambda_n|}F(iz)\,dz.$$

Now, $F(z)$ has no singularities in the half-plane $Rz>0$, and tends to zero uniformly as $Rz\to\infty$. The function $g_n(z)$ has a singularity at 0, and nowhere else. Thus

$$(30)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}g_n(z+i\varepsilon)F(iz)\,dz=0,$$

and

$$(31)\qquad a_n=\int_C g_n(z)\,e^{\varepsilon|\lambda_n|}F(iz-\varepsilon)\,dz,$$

where C is a small circle about the origin. It is understood, of course, that $F(iz-\varepsilon)$ has a series (28) uniformly and absolutely convergent for all values of z on C.

It is easy to show that on a circle C of radius η,

$$(32)\qquad g_n(z)=O(e^{\beta\lambda_n})$$

for every $\beta>0$. From this and (31), it results that

$$(33)\qquad |a_n|\leqq \limsup_C |F(iz-\varepsilon)|\,e^{\varepsilon|\lambda_n|}\ \text{const.}$$

It follows readily that

$$(34)\qquad \begin{aligned}|F(x+iy+x_1)|&\leqq\Sigma|a_n|\,e^{-\lambda_n x}e^{-\lambda_n x_1}\\ &\leqq\limsup_C |F(iz-x-\varepsilon)|\,\Sigma e^{\lambda_n(\varepsilon-x_1)}\ \text{const.}\\ &\leqq \text{const.}\limsup_C |F(iz-x-\varepsilon)|.\end{aligned}$$

Thus the value of $|F(z)|$ on an ordinate more than a constant distance to the right of a small circle of fixed radius does not exceed a constant multiple of the maximum value of the expression on the circle, provided, at any rate, that the circle is to the right of the ordinate of convergence of the Dirichlet series for $F(z)$. It is not difficult to frame an argument from analytical continuation to show that this remains true provided merely that $F(z)$ is analytic in a region including the small circle and all points to the right. From this it follows at once that the boundary of convergence of the Dirichlet series of F must be a line made up of singularities. Similarly, we may establish Pólya's theorem, that over every interval of Iz, $F(z)$ has the same order, whether in the ordinary sense or in that of Lindelöf, and the same type in that order.[1]

In this theorem we have assumed that the density of the λ_n's is zero and that $\lambda_{n+1}-\lambda_n$ has a positive lower bound. The methods are available to prove Pólya's theorems concerning functions where the maximum density of the λ_n's, though not zero, is <1.

There is another important class of gap theorems dealing with the case where $\lambda_{n+1}-\lambda_n \to \infty$. In this case, a more direct approach than that through the a_n's may be obtained by considering the properties of the function $f(x)$ analogous to periodicity.[2] It may be shown that there is a quasi-periodicity property characterizing almost periodic functions for which there is a minimum distance between two proper frequencies. Let $f(x)$ be an almost periodic function in the Stepanoff class S_2. Let C be the class of all functions of the form

$$\sum_{1}^{N} a_n f(x+b_n) \qquad (a_n \text{ complex, } b_n \text{ real}). \tag{35}$$

Let A and B be real numbers such that for all x_1 and x_2 and for all functions $g(x)$ in C,

$$\int_{x_1}^{x_1+A} |g(x)|^2 dx \Big/ \int_{x_2}^{x_2+A} |g(x)|^2 dx < B. \tag{36}$$

Let D be the lower bound of the A's for which B is finite. Then if D is finite, $f(x)$ is said to be pseudoperiodic, with pseudoperiod D. The class of pseudoperiodic functions is the same as the class of the functions $f(x)$ of the form

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x} (\lambda_{n+1} > \lambda_n;\ \text{lim. inf. } \lambda_{n+1}-\lambda_n > 0,\ \Sigma |a_n|^2 < \infty). \tag{37}$$

[1] Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Zeitschrift, Band 29, 1929.

[2] Paley and Wiener, loc. cit. chapter VII.

Furthermore, if E is the lower limit of $\lambda_{n+1}-\lambda_n$, we have

(38) $$DE \leqq \text{absolute constant.}$$

Hence if

(39) $$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x} (\Sigma |a_n|^2 < \infty, \ \lambda_{n+1} > \lambda_n, \lim_{n\to\pm\infty} \lambda_{n+1}-\lambda_n = \infty)$$

$f(x)$ is the sum of a trigonometrical polynomial and a function for which $D < D_1$. It results at once, from this and the fact that D depends only on the λ_n's, not on the a_n's, that any series of inequalities on the integrals of the squares of the moduli of f and its derivatives, if it is invariant under the addition of an analytic function, holds over every interval of x provided the corresponding inequalities hold over any given interval of x. Crudely stated, if f satisfies the conditions for a type of quasianalyticity over any interval, however small, it satisfies the conditions for a related type of quasianalyticity over every interval, however large. This is closely related to certain theorems of Mandelbrojt.[1]

Mandelbrojt's more recent work has been to develop a theory intermediate between the Carleman theory of quasi-analytic functions and the standard gap theory. He is chiefly concerned with functions such as

(40) $$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x},$$

where the λ_n's are integers, $\lambda_{-1} = -\lambda_n$, and

(41) $$\sum_{1}^{\infty} \lambda_n^{-\sigma-\varepsilon} < \infty, \ \sum_{1}^{\infty} \lambda_n^{-\sigma+\varepsilon} = \infty. \quad (0 < \sigma < 1).$$

He discusses two problems which are partial inverses of one another:

(a) The construction for a given value σ of non-null functions $f(x)$ with derivatives satisfying certain inequalities of the form

(42) $$|f^{(n)}_{(x)}| \leqq m_n a^n;$$

(b) The proof that it is impossible for a given value of σ to construct non-null functions $f(x)$ for which

(43) $$\int_{a}^{a+\varepsilon} |f(x)|\, dx$$

tends to zero more rapidly than certain given functions of ε.

[1] S. Mandelbrojt, Séries Lacunaires, Actualités scientifique et Industrielles, Paris 1936.

In problem (a), as it is only σ that plays a rôle, and not the λ_n, we shall put

$$\lambda_n = [n^{\frac{1}{\sigma}}]. \tag{44}$$

We shall then consider the integral function

$$\varphi(u) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{u^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{45}$$

It may be proved that except in the neighborhood of the λ_n's,

$$|\varphi(u)| = \Omega(|u|^{-R} e^{|u|^\sigma}) \qquad (k \text{ fixed}). \tag{46}$$

Now let

$$\psi(u) = \frac{\sin \pi u}{\varphi(u)}. \tag{47}$$

It is possible to show that on the real axis

$$|\psi(u)| = O(|u|^{k_1} e^{-|u|^\sigma}) \qquad (k_1 \text{ fixed}). \tag{48}$$

Thus ψ belongs to L^2. The Fourier transform of ψ differs from 0 only over $(-\pi, \pi)$, by theorems we have quoted already. If we take it as the $f(x)$ of (40), we see at once that in the Fourier series of f will have as coefficients

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \tag{49}$$

which will vanish unless n is of the form $\pm\lambda_k$.

By a change involving not more than a finite number of λ_n's, it is thus possible to obtain a function $\psi_1(u)$, integral and dominated by $e^{\pi|u|}$, which is $O(e^{-|u|^{1/\sigma}})$ on the real axis, and which vanishes for every integral argument, *except* a set of numbers $\pm\mu_n$ such that

$$\sum \mu_n^{-\sigma} = \infty, \quad \sum \mu_n^{-(\sigma+\varepsilon)} < \infty. \tag{50}$$

The function

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(u) e^{iux} du \tag{51}$$

will then have a series of the form

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\mu_n x}. \tag{52}$$

Moreover, f will vanish outside of $(-\pi, \pi)$. We shall have

$$f^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (iu)^n \psi_1(u) e^{iux} du. \tag{53}$$

Hence

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(n)}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n} |\psi_1(u)|^2 dx$$

$$\text{(54)} \qquad \leqq \text{const.} \int_0^{\infty} u^{2n} e^{-u^{\sigma}} du$$

$$\leqq \text{const.} \int_0^{\infty} w^{\frac{2n}{\sigma}} e^{-w} \sigma w^{\frac{1}{\sigma}-1} dw$$

$$= \text{const.}\, \sigma \Gamma((2n+1)\sigma).$$

Hence, as f is differentiable with all derivatives over $(-\infty, \infty)$, and vanishes outside $(-\pi, \pi)$

$$|f^{(n)}(x)| = \left| \int_{-\pi}^{x} f^{(n-1)}(y)\, dy \right|$$

$$\leqq \left\{ \int_{-\pi}^{x} dy \int_{-\pi}^{x} |f^{(n-1)}(y)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{(55)} \qquad \leqq \text{const.} \left\{ \frac{1}{\sigma} \Gamma((2n-1)/\sigma) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \text{const.} \left\{ \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{2n-2}{\sigma} \right\}^{\frac{2n-2}{\sigma}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{2n-2}{\sigma}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \text{const.}\, \sigma^{-\frac{n-1}{\sigma}+\frac{3}{4}} (2n-1)^{\frac{n-1}{\sigma}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{n-1}{\sigma}}$$

$$\leqq \text{const.}\, a^n n^{\frac{n}{\sigma}},$$

where a does not depend on n. If we put $n^{\frac{n}{\sigma}} = m_n$, we have for all n

$$\text{(56)} \qquad \frac{\log m_n}{n \log n} = \frac{1}{\sigma} > 1, \quad \frac{1}{\sigma} < \infty.$$

The possibility of forming such a function $f(x)$ has been proved by Mandelbrojt and myself,[1] and is an extension of a result of Mandelbrojt.

Case (b) may also be reduced, and in essence has already been reduced by Mandelbrojt, to the problem of forming certain functions with known Fourier transforms, and given by infinite products. We return to the

[1] Mandelbrojt and Wiener, Comptes Rendus 203, 1936 p. 34 and 203, 1936, p. 233. — Mandelbrojt, Séries de Fourier et classes quasi-analytique de fonctions. Paris 1935, p. 101 and 108.

beginning of this lecture, and to formula 4, where C is the interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$ on the real axis. Then in (8),

(57) $$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{iux} g_n(x)\,dx = G_n(u).$$

This means that $G_n(u)$ is an integral function, dominated by $e^{|n|}$, and belonging to L^2 along the real axis. The density of its zeros is $\frac{\varepsilon}{\pi}$, both to the right and to the left of the origin. The function $G(u)$ of (10) will have the same density.

This suggests a way of obtaining the function $G(u)$. Let us form the function

(58) $$P_1(u) = \prod_1^{\infty}\left(1-\frac{u^2}{\lambda_n^2}\right).$$

This is an integral function of order σ, whenever

(59) $$\sum \lambda_n^{-\sigma-\varepsilon_1} < \infty, \quad \sum \lambda_n^{-\sigma+\varepsilon_1} = \infty.$$

Then

(60) $$|P_1(u)| = O(e^{|u|^{\sigma+\varepsilon_1}}).$$

Now let

(61) $$\nu_n = \left[n^{\frac{1}{\sigma+\varepsilon_2}}\frac{\varepsilon}{\pi}\right]\frac{\pi}{\varepsilon}.$$

Let N be the least integer that is so large that from $n=N$ on, no two ν_n's are the same. Let

(62) $$\varphi_2(u) = \prod_N^{\infty}\left(1-\frac{u^2}{\nu_n^2}\right)$$

and

(63) $$\psi_2(u) = \frac{\sin \varepsilon u}{\varphi_2(u)}.$$

It may be shown that if u is real

(64) $$\psi_2(u) = O(e^{-|u|^{\sigma+\varepsilon_2-\varepsilon_3}}). \qquad (\varepsilon_3 > 0).$$

Thus

(65) $$u^{-1}\psi_2(u)P_1(u) = O(e^{-|u|^{\sigma+\varepsilon_2-\varepsilon_3}}).$$

This function furthermore has zeros at the points $\pm\lambda_n$. Thus

(66) $$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{-1}\psi_2(u)P_1(u)e^{iux}\,du$$

is a function differing from 0 only over $(-\varepsilon, \varepsilon)$, and with a Fourier series

(67) $$a_0 + \sum_1^{\infty}(a_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

where

(68) $$a_{\lambda_n}=\beta_{\lambda_n}=0; \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

$$a_0 \neq 0.$$

We have

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|f_2(x)|^2 dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} u^{-2}|\psi_2(u)P_1(u)|^2 du$$

$$=O(\varepsilon^2)\int_{-\infty+i}^{\infty+i} e^{2|u|^{\sigma+\varepsilon_1}} \frac{1}{\left|\prod_N^{\infty}\left(1-\frac{u^2}{\nu_n^2}\right)\right|^2} du$$

(69) $$=O(\varepsilon^2)\int_{i}^{\infty+i} e^{2|u|^{\sigma+\varepsilon_1}}\left|\prod_1^{N-1}\left(-\frac{u^2\pi^2}{n^{\frac{2}{\sigma+\varepsilon_2}}\varepsilon^2}\right)\right|\prod_N^{\infty}\left|\frac{1-\dfrac{u^2\pi^2}{n^{\frac{2}{\sigma+\varepsilon_2}}\varepsilon^2}}{1-\dfrac{u^2}{\nu_n^2}}\right|^2\left\{\prod_1^{\infty}\left|1-\frac{u^2\pi^2}{n^{\frac{2}{\sigma+\varepsilon_2}}\varepsilon^2}\right|^2\right\}^{-1} du$$

$$=O(\varepsilon^2)\int_0^{\infty} e^{-u^{\frac{\sigma+\varepsilon_2}{2}}}\frac{u^{4N}\pi^{4N}}{\varepsilon^{4N}(\Gamma(N))^{\frac{4}{\sigma+\varepsilon_2}}} du.$$

Now,

(70) $$N=O\left(\frac{(\sigma+\varepsilon_2)\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\sigma+\varepsilon_2}-1}.$$

Thus

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|f_2(x)|^2 dx = O(\varepsilon^2)\frac{\pi^{4N}}{\varepsilon^{4N}(\Gamma(N))^{\frac{4}{\sigma+\varepsilon_2}}}\int_0^{\infty} e^{-u^{\frac{\sigma+\varepsilon_2}{2}}} u^{4N} du$$

(71) $$=\frac{O(\pi^{4N})}{\varepsilon^{4N}(\Gamma(N))^{\frac{4}{\sigma+\varepsilon_2}}}\Gamma\left(4N\left(\frac{\sigma+2\varepsilon_2}{3}\right)\right)$$

$$=O\left(e^{\varepsilon^{-\left(\frac{1}{\sigma+\varepsilon_2}-1+\varepsilon_3\right)}}\right).$$

Again, by (14),

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_2(x)\,dx = \frac{\varepsilon}{2\pi}. \tag{72}$$

Now, let $f(x)$ belong to L^2, and let

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x). \tag{73}$$

Then

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+x_1) f_2(x)\,dx = a_0 \varepsilon. \tag{74}$$

Thus

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+x_1) f_2(x)\,dx \\ &\leq \frac{\text{const.}}{\varepsilon} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x+x_1)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} O\left(e^{\varepsilon^{-\left(\frac{1}{\sigma+\varepsilon_2}-1+\varepsilon_1\right)}}\right) \end{aligned} \tag{75}$$

for all $\varepsilon_3 > 0$.

The quantity ε_2 is also arbitrary. Thus if

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x+x_1)|^2\,dx = O\left(e^{-\varepsilon^{1-\frac{1}{\sigma}+\varepsilon_4}}\right), \tag{76}$$

we have $a_0 \to 0$ with ε, and hence $a_0 = 0$. Here x_1 may depend on ε.

A similar argument, based on the estimate of max $|f_2(x)|$ instead of $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f_2(x)|^2\,dx$, will show that if

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x+x_1)|\,dx = O\left(e^{-\varepsilon^{1-\frac{1}{\sigma}+\varepsilon_4}}\right) \tag{77}$$

we have $a_0 = 0$, and in general, $a_n = b_n = 0$. This establishes Mandelbrojt's theorem: *if*

$$\overline{\lim_{\alpha \to +0}} \frac{\log\left(-\log \int_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(x)|\,dx\right)}{-\log \alpha} = \varrho > 0, \tag{78}$$

if

$$\Sigma n_i^{-\sigma-\varepsilon} < \infty, \quad \Sigma n_i^{-\sigma+\varepsilon} = \infty; \quad (\varepsilon > 0), \tag{79}$$

if

(80)
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i} \cos n_i x + b_{n_i} \sin n_i x),$$

and if

(81)
$$\varrho > \frac{\sigma}{1-\sigma}$$

then $f(x)$ *is equivalent to* 0. The results in problem (b) lead readily to a proof that this result cannot be extended to the case where $\varrho = \dfrac{\sigma}{1-\sigma}$, and conversely, this result may be used to indicate that the results of problem (a) cannot be extended to the case where

(82)
$$\underline{\lim} \frac{\log m_n}{n \log n} > \frac{1}{\sigma}.$$

ON THE DECOMPOSITION THEOREMS OF ALGEBRA

By ØYSTEIN ORE, Yale University.

We shall in the following give an account of certain new ideas regarding the foundation of the so-called abstract algebra. These ideas, which have been developed only in the last couple of years, throw new light upon several of the basic problems of algebra. It should, however, be mentioned already at the beginning, that their application is in no way limited to algebra. They have originated principally in connection with algebraic problems and in the following we shall stress the algebraic consequences, but there are already important applications to geometry, to point-set theory and to the foundation of quantum mechanics. Since the theory is a very recent one and since it is in a state of rapid development, the following lecture cannot be expected to give any complete evaluation of its importance for algebra or for its several other domains of applications. It should serve to demonstrate, however, that a very fertile field or mathematical investigation has been opened up.

Let us recall to begin with a few facts about *abstract algebra*. One may say that abstract algebra has been developed from ordinary algebra through the realization that the various algebraic theories may be derived from a small number of axiomatic rules, to a large extent the same for all algebraic theories. The axiomatic synthesis is, however, only one side of the abstract theory. Among its most notable achievements, I should prefer to mention the solution of what one may call the *completeness problem* in several important cases, namely the determination of all algebraic systems with given properties. As a classical example one may mention STEINITZ' theory of commutative fields and the determination of all fields for which the Galois theory of equations is valid.

In algebra one deals with algebraic systems or spaces consisting of certain symbols called *elements*. For these elements certain operations are defined, usually in such a way that to any pair of elements another element is given uniquely. One may also consider more general systems in which certain subsets define other subsets according to given rules. Ordinarily one deals with operations satisfying some or all of the axioms for addition and multiplication and the various systems are classified accordingly as fields, rings, groups, moduli etc. Finally let us mention the notion of *isomorphism* which is of considerable importance in the following. Two systems are said to be isomorphic with respect to given operations when there exists a one-to-one correspondence between them preserving the results of those operations. The properties of two isomorphic systems are identical in respect to the given operations.

A fundamental problem is the deduction of *theorems of decomposition* for algebraic systems, i. e. the reduction of a system to simpler parts. As the simplest example of such a decomposition one may take the representation of a rational integer as the unique product of its prime factors. Similarly we have, according to Dedekind, a unique prime ideal factorisation for the ideals of an algebraic field of finite degree. Another almost as simple decomposition theorem is furnished by the basis theorem for Abelian groups. In this case the basis representation is not unique, but the cyclic subgroups occuring in two different basis representations have the same orders and hence are isomorphic.

For arbitrary algebraic systems one cannot expect decomposition theorems as simple as these. In commutative rings the ideal theory and the corresponding decomposition theorems were first developed by EMMY NOTHER.[1] From this theory follows her solution of the completeness problem to determine all commutative rings in which there exists a unique prime ideal factorisation. Among the further important contributors to the theory of ideals in commutative and non-commutative rings one may mention: KRULL, GRELL, KÖTHE, MORI, SCHMEIDLER, SONO, V. D. WAERDEN and others. We shall not describe in details any of these general decomposition theorems for ideals. Their importance may best be judged by the numerous applications: Algebraic geometry (DUBREIL, KAPFERER, LASKER, MACAULAY, SCHMEIDLER, V. D. WAERDEN), the theory of elimination (HENTZELT, HERMANN, NOETHER) algebraic differential and difference equations (RITT, RAUDENBUSH), linear differential and non-commutative polynomials (KRULL, LOEWY, NOETHER-SCHMEIDLER, ORE), the decomposition theory and arithmetic theory of linear algebras or hypercomplex systems (ARTIN, BRANDT, DEURING, DICKSON, SPEISER, SHODA, WEDDERBURN). The theory of reduction of matrices is based upon the decomposition theorems for moduli. In this connection one should mention E. Noether's *moduli of representation* (Darstellungsmoduln) and their applications to the representation of groups. Another general type of decomposition theorems has been obtained by Krull for the so-called *generalized Abelian groups*. They are moduli with certain operators or multipliers. The residue systems of one-sided ideals belong to this type of system.

---

[1] The references to the various investigations on ideal theory and other decomposition theorems may be found in the recent book by W. KRULL: *Idealtheorie*. Ergebnisse der Mathematik etc. v. 4 , Berlin 1935 or in ØYSTEIN ORE: *L'algèbre abstraite*, Actualités scient. et indust. Paris 1936.

The decomposition theorems we have mentioned have mostly been obtained under certain finiteness conditions. E. NOETHER assumes the so-called (descending) *chain condition* (Teilerkettensatz): Every chain of ideals

$$\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{A}_2 < \cdots$$

breaks off after a finite number of terms. Still more restricted is the finite case where both ascending and descending chains are finite.

A few words should also be said about the decomposition theorems for groups. In the finite case we have the well-known theorem of JORDAN-HÖLDER for composition and principal series. For the general case this theorem is replaced by the refinement theorem of SCHREIER-ZASSENHAUS. There also exists a decomposition theorem for the representation of a group by means of irreducible normal components. More difficult to prove is the theorem of SCHMIDT-REMAK which states that if all chains of normal subgroups (or permissible subgroups in the case of groups with operators) are finite, then any two representations of a group as the direct product of direct indecomposable components is unique except for isomorphisms. Recently KUROSCH has shown that this theorem is true for normal subgroups when only the descending chain condition is satisfied.

Even a superficial analysis of the various theorems of decomposition show their similarity in character. In all cases one deals with certain distinguished subsystems of the given system like normal subgroups, ideals, characteristic moduli etc. The decomposition theorems themselves refer mainly to properties of these distinguished subsystems while the properties of the elements of the original system play a minor role. This remark suggests the possibility of a further abstraction of the algebraic theories by introducing new systems whose elements are the subsystems themselves. These new systems which we shall define presently, shall be called *structures*. Our main object in the following is to show, that the decomposition theorems are only properties of these structures, while the properties of the elements of the original algebraic system are eliminated altogether. A consequence of this theory is naturally that it reduces the proofs to their essential foundation. More important is however that it gives new results and that it illuminates in new ways the character of the decomposition theorems. The situation is in many ways analogous to the familar one in *geometry*. A geometry is usually considered on the background of its points which are taken to be elements of an abstract space. However for the geometry and the geometric theorems these points are not the essential content. The geometric results refer to the properties of specified configurations like lines, planes, curves, surfaces and manifolds, cells, simplexes, neighbourhoods etc. This analogy to geometry is not a superficial one as we shall see, since it is actually based upon the fact that the axioms of the two theories to a large extent are the same. Hence we may also formulate our theory in saying that the decomposition theorems represent the results of a geometry of a simple type associated with the given algebraic system.

The idea that such a theory might be possible goes back to DEDEKIND[1] as do so many other fundamental ideas of abstract algebra. It occurs in connection with an investigation of the axiomatic foundation for the theorem of Jordan that in a group any two principal series of normal subgroups have the same length. In a group there exists to any two subgroups A and B a cross-cut (A, B) which is the maximal subgroup contained both in A and B. Similarly there exists a union $[A, B]$ which is the minimal subgroup containing both A and B. The union is generated by A and B, but it is not the element union of the two groups. A similar situation occurs in all algebraic systems. Hence we are led to define:

A *structure*[2] Σ is a system of element $A, B, \cdots$ having the property that to any pair A, B there exists a unique union $[A, B]$ and a unique cross-cut (A, B).

These operations satisfy the ordinary axioms

$$\begin{array}{ll} (A, B) = (B, A) & [A, B] = [B, A] \\ (A, A) = A & [A, A] = A \\ (A, (B, C)) = ((A, B), C), & [A, [B, C]] = [[A, B], C] \\ [A(A, B)] = A & (A, [A, B]) = A. \end{array}$$

On the basis of these axioms one defines the *inclusion relation* $A > B$ by the existence of either one of the two equivalent relations.

$$[A, B] = A, \quad (A, B) = B.$$

Usually a structure also contains an *all-element* O_0 and a *unit element* E_0 defined by the existence of the relations

$$[O_0, A] = O_0, (A, E_0) = E_0$$

for all A in Σ.

One may also obtain an equivalent definition of a structure by starting with a *semi-ordered* (partly ordered) set in the sense of HAUSDORF. In

---

[1] R. DEDEKIND: Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Math. Ann. 53 (1900), Werke v. 2. pp. 371–403.

[2] DEDEKIND uses the word "Dualgruppe". Since the systems are not groups, this terminology is somewhat awkward. G. BIRKHOFF uses the term "lattice" (Gitter), which, however, has been used consistently in a different mathematical meaning. For this reason I have adopted the term structure which seems suggestive of the algebraic applications of the systems. KLEIN-BARMEN says "Verband".

such a set a transitive inclusion relation $A > B$ is defined for certain elements. A structure is then obtained by postulating the existence of a unique maximal element (A, B) contained in A and B and a unique minimal element $[A, B]$ containing A and B. It is also possible to extend any semi-ordered set under preservation of order into a structure as shown by MAC NEILLE[1] by introducing new elements by a method reminding of Dedekind cuts.

Our problem is now to investigate the properties of the structures defined by certain subsystems of algebraic systems. If one prefers the geometric point of view one may say that the structure represents the geometry of the subsystems. However, without further limitations on the structure one can say very little about general properties. The most important remark is that there exists a dualistic correspondence between cross-cut and union, and it seems that this dualism is the ultimate source for *theorems of duality* both in algebra and in geometry. In connection with the general properties of structures one should mention the investigations by KLEIN-BARMEN.[2]

To obtain theorems of decomposition it is necessary to impose further conditions on the structure. The case of a group may serve an illustration. While the set of all subgroups already form a structure, all decomposition theorems refer to the structure of normal subgroups. The reason for this lies in the fact that the latter structure satisfies a further condition given by Dedekind:

Dedekind axiom: If A, B and C are any three elements of the structure and $C > A$, then

$$(C, [A, B]) = [A, (C, B)]. \tag{1}$$

Any structure which satisfies the Dedekind axiom may be called a *Dedekind structure* or a *Dedekind geometry.*

The Dedekind axiom is satisfied in almost all instances of decomposition theorems in algebra. In most cases it is easily verified. As an example let $C > A$ and B be three normal subgroups of a group G. Any element of $[A, B]$ has the form $\alpha\beta$, where α and β belong to A and B respectively. An element of $(C, [A, B])$ must satisfy the relation

$$\gamma = \alpha\beta \tag{2}$$

---

[1] H. MAC NEILLE: Extensions of partially ordered sets. Proc. Nat. Acad. vol. 22 (1936) pp. 45—50.

[2] A complete list of the publications of this author on the subject of structures may be found in the latest article F. KLEIN-BARMEN: Dedekindsche und distributive Verbände. Math. Zeitschr. v. 41 (1936) pp. 261—280.

where γ is some element of C. Hence $\beta = \alpha^{-1} \cdot \gamma$ belongs both to B and to C and (2) shows that the left-hand side of (1) is contained in the right-hand. This proves our relation since the converse is true in any structure. In the same simple manner follows that the Dedekind axiom is satisfied for all one-sided or double-sided ideals in any ring. The Dedekind axiom may be formulated in several ways. We shall only mention the equivalent relations

$$([A, B], [A, C]) = [A, (B, [A, C])]$$

$$[(A, B), (A, C)] = (A, [B, (A, C)])$$

and the *self-dualistic formulation*

$$[(A, B), (C, [A, B])] = ([A, B], [C, (A, B)]). \tag{3}$$

All these relations hold for arbitrary elements A, B, C of the structure. The various possible relations may also be united in the statement that in a Dedekind structure three elements A, B, C generate a structure containing in general 28 different elements. From a geometric point of view these various relations may be said to represent geometric theorems.

The principal result of Dedekind may now be stated as follows: a chain

$$A > A_1 > \cdots\cdots > A_n > B$$

of elements in the structure shall be called a ***principal chain***, when each term is ***prime*** over the next, i. e. there is no term in the structure between them. The theorem is then: ***In a Dedekind structure all principal chains between two elements A and B have the same length.*** Conversely: The necessary and sufficient condition that this be true for a finite structure Σ and all its substructures is that Σ be a Dedekind structure.

Almost identical considerations to these were made by GARRET BIRKHOFF.[1] At this point one should also mention some similar investigations by KUROSCH[2] in regard to another theorem of decomposition. An element A in Σ may be said to be decomposable if there exists a representation

$$A = [B, C], \quad A > B, \quad A > C,$$

and indecomposable otherwise. Kurosch then proves that if an element in a Dedekind structure can be represented as the union of a finite number

[1] GARRET BIRKHOFF: On the combination of subalgebras. Proc. Cambridge Phil. Soc. v. 29 (1933) pp. 441—464. Note on the paper: On the combination of subalgebras ibid. v. 30 (1934) p. 200. Applications of lattice algebra, ibid. v. 30 (1934) pp. 115—122.

[2] A. KUROSCH: Durchschnittsdarstellungen mit irreduziblen Komponenten in Ringen und in sogenannten Dualgruppen. Mathematičeski Sbornik v. 42 (1935) pp. 613—616.

of indecomposable elements, then any two such representations must contain the same number of components. This is a part of a wellknown decomposition theorem in ideal theory.

While these theorems give an approximation to the corresponding algebraic theorems it is obvious that something essential is lacking. For instance in the formulation of the ordinary theorems of Jordan-Hölder one emphasises that the quotient groups are isomorphic in some order. This statement already contains two notions for which no suitable definition has been provided in the structure, namely *quotient group* and *isomorphism.*

In a recent paper[1] in which I have taken up this question of the application of structures to algebra, it has been shown how these difficulties may be overcome. The question of an analogue to quotient groups or residue system is fairly simple. To any structure Σ one can construct a *quotient structure* Σ' in the following manner. To all pairs of elements $A > B$ in Σ we associate a *quotient* $\mathfrak{A} = A/B$. The set of all quotients is made into a structure Σ' by defining for

$$\mathfrak{A}_1 = A_1/B_1, \ \mathfrak{A}_2 = A_2/B_2$$

the cross-cut and union

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = (A_1, A_2)/(B_1, B_2), \ [\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2] = [A_1, A_2]/[B_1, B_2].$$

To each quotient $\mathfrak{A} = A/B$ is associated a substructure of Σ, namely the set of all elements containing B and contained in A.

If the original structure is a Dedekind structure then the quotient structure Σ' has the same property. In the following we draw into our consideration the whole quotient structure Σ' rather than the original structure. The algebraic analogy is obvious. It should also be mentioned that it is convenient to introduce the *product* of certain quotients by putting

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = A/C$$

when

$$\mathfrak{A} = A/B, \ \mathfrak{B} = B/C.$$

On the face of it it seems more difficult to find a suitable substitute for the notion of isomorphism, since the isomorphism of two algebraic systems is essentially a property of their elements. The solution lies in the fact that for the decomposition theorems one needs only a special kind of isomorphism, namely isomorphism defined through the iterated use of the so-called *second law of isomorphism.* This law says that in a group or ring the quotient groups or residue rings

[1] Øystein Ore: On the foundation of abstract algebra, Part I, Annals of Math. v. 36 (1935) pp. 406—437, Part II, v. 37 (1936) pp. 265—292.

$$(4) \qquad \mathfrak{A} = [A, B]/A, \ \mathfrak{B} = B/(A, B)$$

are isomorphic. If one considers (4) to be quotients in a Dedekind structure, then one can prove the fundamental theorem, that *the two structures associated with* $\mathfrak{A}$ *and* $\mathfrak{B}$ *are structure isomorphic*, i. e. there exists a one-to-one correspondence between them preserving the result of union and cross-cut. It is convenient to say that in (4) the quotient $\mathfrak{A}$ has been obtained by *extension* from $\mathfrak{B}$ and conversely $\mathfrak{B}$ has been obtained by *reduction* from $\mathfrak{A}$. We define then that two quotients $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A}'$ are similar if one is obtainable from the other through a series of reductions and extensions.

This notion of similarity of two quotients replaces and implies ordinary isomorphism in the applications to algebraic systems. It completes our program of formalisation of the algebraic theory. It is now possible to formulate and prove general decomposition theorems for Dedekind structures containing as special cases all the ordinary algebraic decomposition theorems to their full extent. Various new decompositions are also obtained, but we shall not discuss any of these results in detail. Most interesting is perhaps the theorem about *direct decompositions* corresponding in the case of groups to the SCHMIDT-REMAK theorem. This theorem is easily proved in the ordinary finite case. When only the descending chain condition is satisfied, peculiar difficulties arise and the theorem is only valid under certain restriction. This was, however, to be expected according to investigations of STEINITZ and KRULL[1] in the special case of moduli whose coefficients are algebraic integers. The formulation of the theorem of JORDAN-HÖLDER may be of interest. The application of quotient products gives it a form reminding strongly of the ordinary arithmetic factorisation theorem: *If a quotient* $\mathfrak{A}$ *may be represented in two ways as the product of prime quotients*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \times \ldots \times \mathfrak{P}_r = \mathfrak{Q}_1 \times \ldots \times \mathfrak{Q}_r$$

then both factorisations have the same number of factors similar in pairs. The general theorem of SCHREIER-ZASSENHAUS may be expressed: *If a quotient is factored in two ways*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_r = \mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_s$$

then these factors may be factored further such that both sides have the same number of factors similar in pairs.

[1] A further discussion of this theorem will be found in a paper which is to appear shortly in Duke Mathematical Journal. [Vol. 2 (1936), pp. 581–596.]

We have deduced our decomposition theorems only under the assumption of the Dedekind axiom and hence they have been obtained in their most general form. For many algebraic systems we have however more special decomposition theorems like in E. NOETHER's ideal theory, in rings with unique factorisation, in Abelian groups, etc. This is due to further conditions satisfied by the structures associated with the system. We shall not discuss these properties here, but only observe that they may be used to classify the algebraic systems from a new point of view.

Another remark which may be of interest is the following: When the theory of structures is applied to *ideal theory* one obtains only decomposition theorems regarding cross-cut and union while the existence of a *multiplication* only plays a minor role in the most general cases. In the special cases where the multiplicative decomposition are of importance it is mostly possible to define multiplication on the basis of the special structure axioms and hence also these theorems may be obtained from conditions on the structure.

The theory of structures brings forth another interesting property of algebraic system, namely their *self-dualistic character*. We indicated the dualism between union and cross-cut in a structure. The further conditions which the structures corresponding to algebraic systems satisfy, preserve this dualism because the conditions are self-dualistic, that is they remain identically the same when cross-cut and union are interchanged. The Dedekind axiom may serve as our first example. The formulation (3) immediately shows its self-dualistic character. The *distributive structures* in which the much stranger *distributive law*

$$(A, [B, C]) = [(A, B), (A, C)] \tag{5}$$

holds, form another important type of structures. A special case to which they apply is to ideals in rings with unique factorisation. The self-dualistic formulation of the distributive law (5) is

$$([A, B], [B, C], [C, A]) = [(A, B), (B, C), (C, A)]$$

a relation which not even in numbertheory is a familar one. The distributive structures have been studied particularly by G. BIRKHOFF.[1] One of the principal results is, that to a finite distributive structure there exists an abstract set S such that the structure is structure isomorphic to the ordinary set-theoretical cross-cut and union of some of the subsets of S. Related to these investigations are certain results by MAC NEILLE[2] on the possibility of imbedding semi-ordered sets or structures with given properties.

---

[1] See the first paper quoted in note 1 page 242.

[2] Loc. cit.

Another type of structures are the *completely reducible* (*flat*, *complemented*) structures in which there exists to each element A a (not necessarily unique) *complement* $\bar{A}$ such that

$$(A, \bar{A}) = E_0, \ [A, \bar{A}] = O_0.$$

The property of being completely reducible is also seen to be self-dualistic. Such structures, which have several algebraic applications, have been studied by G. BIRKHOFF[1] and the author[2].

If one requires that a distributive structure shall be completely reducible one obtains the well-known *Boolean algebras*. The application of these structures to logic and the calculus of classes is so familar that it need not be mentioned here. It is of interest however that a Boolean algebra is structure isomorphic with the element cross-cut and union of the subsets of a certain set associated with the structure. This property has been used by STONE[3] to base the theory of *topological spaces* directly upon the Boolean algebras.

This last remark brings us back to our former point of view on the close connection between geometry and the theory of structures. This is however most clearly illustrated by the axiomatic foundation of *projective geometry* by means of structures which has been given within the last year both by G. BIRKHOFF[4] and MENGER.[5] In our former terminology the main ideas of these papers are easily explained. One begins with a completely reducible Dedekind structure. Furthermore it is supposed that the descending chains have a finite maximal length n, eventually defining the dimension of the geometry. In addition only one further axiom is needed:

Axiom of irreducibility (tertium datur). The complement of an element is not unique, except for E_0 and O_0.

In the construction of projective geometry on this basis the element of the structure represents the various configurations like points, lines, planes. The cross-cut signifies common part and the union the least configuration containing two given ones. The Dedekind axiom together

---

[1] GARRET BIRKHOFF: Combinatorial relations in projective geometries. Annals of Math. v. 36 (1935) pp. 743—748.

[2] ORE, loc. cit. Part 2.

[3] M. STONE: Boolean algebras and their application to topology. Proc. Nat. Acad. v. 20 (1934) pp. 197—202. See also A. TARSKI: Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra I. Fundamenta Mathematicae v. 24 (1935) pp. 177—198.

[4] See note 1 this page.

[5] K. MENGER: New Foundations of projective and affine geometry. Annals of Math. v. 37 (1936) pp. 456—482. One of the principal axioms of Menger is easily seen to be equivalent to the Dedekind axiom.

with the finiteness condition classifies the elements as to dimension by means of the length of the corresponding Jordan-Hölder chain. The axiom of irreducibility insures the existence of at least three points on each line. Beside its simplicity this axiomatic theory possesses certain advantages from a systematic point of view. In HILBERT's foundation of three-dimensional geometry one starts with three different types of elements, points, lines and planes. In VEBLEN and YOUNG's treatment the points play an exceptional role, all other elements being considered as classes of points. By the foundation on structures all configurations appear in a symmetric manner.

The situation is quite analogous to our former theory of algebraic systems where we have reduced the importance of the elements while here the same thing is being done in regard to the points.

MENGER also gives a similar foundation for *affine geometry* through the introduction of a certain paralel axiom in structures.

To obtain the ordinary projective geometry of finite dimension a strong finiteness condition was required. Recently v. NEUMANN[1] has considered the case where this condition is omitted and replaced only by certain requirements on the existence and properties of union and cross-cut of an infinite number of elements. In this case one obtains what one may call a *continuous projective geometry* with a dimension function for the elements which takes on all values in a continuous range from 0 to 1. Hence there is no classification of the elements as points, lines etc. This geometry at the first glance seems curious and far-fetched. It has been shown however in a joint paper by MURRAY and v. NEUMANN[2] that this geometry has important applications to the theory of operators in Hilbert space and to quantum mechanics because the general operator theory in Hilbert space naturally may be based upon such a geometry. Various central problems of the theory may be solved by this new approach.

[1] J. v. NEUMANN: Continuous geometry. Examples of continuous geometry. Proc. Nat. Acad. v. 22 (1936) pp. 92–100, 101–108.

[2] F. J. MURRAY and J. v. NEUMANN: On rings of operators. Annals of Math. v. 37 (1936) pp. 116–229.

BERICHT ÜBER DIE VERLEIHUNG DER FIELDSMEDAILLEN

Von C. Carathéodory, München.

Lars Valerian Ahlfors wurde in Helsingfors am 18. April 1907 als Sohn des Professors für Maschinenbau an der dortigen Technischen Hochschule Axel Ahlfors geboren. Nachdem er die »Nya svenska samskolan« absolviert hatte, wurde er im Mai 1924 an der Universität Helsingfors immatrikuliert, wo er am 5. März 1928 »Filosofie kandidat« und am 20. November 1930 »Filosofie licentiat« wurde. Bei der solemnen Promotion an derselben Universität wurde er am 31. Mai 1932 zum »Filosofie magister« und »Filosofie doktor« promoviert.

Von 1929—1933 war er Lektor der Mathematik an der Åbo Akademie und seit Juni 1933 ist er Adjunkt der Mathematik an der Universität Helsingfors. Im akademischen Jahre 1935—1936 ist er beurlaubt worden, um an der Universität Harvard Vorlesungen zu halten. Im Jahre 1936 wurde er Mitglied der Societas Scientiarum Fennica.

Wiederholt haben ihn Studienreisen ins Ausland geführt: im Winter 1928—1929 war er in Zürich, im Frühjahr 1929 in Paris, im Sommer 1931 in Göttingen und im Sommer 1934 in München.

Das akademische Lehrjahr 1931—1932 verbrachte er in Paris als »International Research Council Fellow« der »Rockefeller Foundation«.

Ahlfors ist einer der glänzendsten Vertreter der berühmten Finnländischen Funktionentheoretischen Schule, die von Ernst Lindelöf gegründet, seit dreißig Jahren so viele wichtige Beiträge der Wissenschaft geschenkt und so zahlreiche große Mathematiker hervorgebracht hat. Er ist Schüler von Ernst Lindelöf und von Rolf Nevanlinna. Unter den Auspizien des letzteren ist seine Dissertation entstanden und die Ideen und Theorien von R. Nevanlinna haben weiterhin seine ganze Entwickelung beeinflußt.

Ausgegangen ist er von der Theorie der meromorphen Funktionen, die er von Anbeginn mit originellen Methoden befruchtet hat. So konnte er einmal einen wichtigen Satz von Henri Cartan für seine Zwecke benutzen, und seine Dissertation »Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildungen und der ganzen Funktionen« (1930) enthält eine Methode für die Behandlung der konformen Abbildung des verallgemeinerten Streifens mit beliebig gekrümmten Rändern, die sofort bei ihrem Erscheinen Aufsehen erregt hat.

Die reifste Frucht, die das Studium der meromorphen Funktionen durch Ahlfors gezeitigt hat, findet man in seiner Arbeit »Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen« (1935). Wenn man diese Arbeit liest, so weiß man nicht, was mehr zu bewundern ist: die Kunst, mit der Ahlfors die ganze, große Nevanlinnasche Theorie mit wunderbarer Klarheit auf nur 14 Seiten auseinanderzusetzen versteht, oder die geniale Intuition von Rolf Nevanlinna, der zu einer Zeit, wo die geometrischen Zusammenhänge noch ganz versteckt lagen, nur solche Begriffe entdeckt, ausgebildet und benutzt hat, die später die einfachste geometrische Deutung erfahren sollten.

Bei dem Entschluß des Komitees, eine der Fields-Medaillen Lars Ahlfors zuzuerkennen, ist aber vor allen eine andere Richtung seiner Arbeiten ins Gewicht gefallen. Das Studium der Riemannschen Flächen der Umkehrfunktionen von ganzen oder meromorphen Funktionen hat Ahlfors dazu geführt, allgemeinere Eigenschaften von Überlagerungsflächen zu betrachten. Es stellte sich allmählich heraus, daß die fertige, unberandete Überlagerungsfläche gewisse ganz allgemeine Eigenschaften besitzt, die man nur beobachten kann, wenn man sie gewissermaßen in statu nascendi als Grenze von berandeten, immer weiter um sich greifenden Überlagerungsflächen betrachtet. Bisher war diese Entstehungsweise einer Riemannschen Fläche, die HERMANN AMANDUS SCHWARZ die Methode des Ölflecks nannte, nur für die Zwecke der konformen Abbildung und der Uniformisierungstheorie benutzt worden. Es blieb Ahlfors vorbehalten, asymptotische Gesetze aufzustellen, in welche der Inhalt der behandeten Approximationsflächen, die Länge des Randes dieser Flächen und die charakteristische Zahl der Grundfläche eingehen.

Die Arbeit »Zur Theorie der Überlagerungsflächen« (1935), die diesen Untersuchungen gewidmet ist, kann als das erste Kapitel eines neuen Zweiges der Analysis angesehen werden, für welchen vielleicht der Name »metrische Topologie« der geeignete ist. Die Überlagerungsflächen sollen nämlich alle auf einer Grundfläche liegen, die gewisse metrische Eigenschaften hat.

Den Gebieten auf der Grundfläche und ihren Rändern werden in allgemeinster Weise gewisse Zahlen zugeordnet, die, wenn man sie als Inhalt und Länge deutet, einer isoperimetrischen Ungleichheit genügen sollen. Diese scheinbar so wenig sagende Bedingung ist aber hinreichend, um die Ahlforsche Theorie abzuleiten.

Die schönsten Anwendungen dieser Resultate beziehen sich auf die Theorie der quasikonformen Abbildungen. Es zeigt sich z. B., daß der Picardsche Satz schon für quasikonforme Abbildungen der dreifach punktierten Kugel gilt, also eigentlich als Satz der metrischen Topologie angesehen werden muß. Wenn nämlich eine Überlagerungsfläche der Kugel auf die ganze euklidische Ebene quasikonform abgebildet wird, so gibt es in der Ebene immer Folgen von konzentrischen Kreisen, deren

Bilder auf der Kugel folgende Eigenschaften haben: die Länge des Randes dieser sphärischen mehrblättrigen Fläche dividiert durch ihren Gesamtflächeninhalt, konvergiert gegen Null. Nach der Ahlforschen Theorie ist es aber unmöglich, diese Bedingung zu befriedigen wenn drei Punkte der Kugel von der Figur nicht überdeckt werden dürfen.

Noch merkwürdiger ist der Ahlforsche Scheibensatz, von dem ein partikulärer Fall folgendermaßen ausgesprochen werden kann: Die ganze xy-Ebene werde auf eine Riemannsche Fläche der uv-Ebene quasikonform irgendwie abgebildet. Man wähle drei beliebige einfach zusammenhängende schlichte Gebiete der uv-Ebene, die außerhalb einander liegen. Dann hat die Riemannsche Fläche die Eigenschaft, daß mindestens das eine ihrer Blätter auch das eine dieser drei beliebigen, aber fest gewählten Gebiete enthalten muß. Oder mit anderen Worten: es gibt in der xy-Ebene mindestens ein Gebiet, das eineindeutig auf das eine oder andere der drei Gebiete der uv-Ebene abgebildet wird. Daß man mit zwei Gebieten keinen derartigen Satz aufstellen kann, zeigt schon die konforme Abbildung, die durch die Gleichung $w = \sin z$ hervorgerufen wird.

Est ist leider unmöglich, die ganze Tragweite der Ahlforschen Theorie in wenigen Worten verständlich zu machen; nach diesen wenigen Proben sieht man aber schon, daß es sich um eine ganz erstklassige Leistung handelt.

Jesse Douglas wurde am 3. Juli 1897 in New York geboren. Er studierte am College of the City of New York, wo er 1916 den Grad des B. Sc. erwarb. Hierauf kam er zur Columbia University, wo er 1916—1920 als Instructor wirkte und wo ihm 1920 der Grad des Ph. D. verliehen wurde.

In den Jahren 1930—1934 war er »Assistant Professor« am Massachusets Institute of Technology in Cambridge, Mas. Seit 1934 wurde er zum »Associate Professor« an derselben Anstalt befördert.

In den Jahren 1928—1930 hat er als »National Research Council Fellow« der »Rockefeller Foundation« Studienreisen gemacht, die ihn nach den Universitäten Princeton, Harvard und Chicago und nach Paris und Göttingen führten.

Jesse Douglas befindet sich unter den Redakteuren der AMS Transactions und ist Mitglied des AMS Council. In diesem Jahre war er AMS Colloquium Lecturer.

Seit 1921 hat er über 60 größere Arbeiten und kleinere Noten publiziert, die sich teilweise überschneiden.

Seine ersten Arbeiten gehören dem Gebiete der Differentialgeometrie an. So hat er z. B. alle vierparametrigen Scharen von Kurven im dreidimensionalen Raume bestimmt, für welche die Summe der Winkel eines beliebigen Dreiecks, das von ihnen gebildet wird, immer zwei rechte ist. Er hat sich auch dafür interessiert, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzustellen, damit eine ebensolche Schar von Kurven durch die Schnittkurven von Flächen, die zu einer dreiparametrigen Schar gehören, dargestellt werden können.

Allmählich hat sich sein Blickfeld erweitert; man findet unter den zahlreichen Arbeiten von J. Douglas auch solche über Variationsrechnung, über Berührungstransformationen, über Differentialinvarianten und vieles andere. Alle diese Dinge, so interessant sie auch sind, können aber nur als Vorspiel angesehen werden für die Reihe der großen Arbeiten, die Jesse Douglas dem Plateauschen Problem gewidmet hat, und durch die sein Name auch weiteren Kreisen der Fachgenossen bekannt geworden ist.

Die Theorie der Minimalflächen hat bekanntlich durch die Untersuchungen von WEIERSTASS ihren Höhepunkt ereicht, der u. a. auch die Resultate von Lagrange, Monge und Riemann auf ihre entgültige Form gebracht hat. Auf diesen fußten die berühmten Arbeiten von H. A. SCHWARZ, der in einfachen Fällen das Randproblem der Minimalflächen zum ersten Male exakt löste und mit seinen Schülern, unter anderen auch E. R. Neovius, viele ins Einzelne gehende Resultate erhielt, die den Weg der späteren Entwickelung geebnet haben. Zur Zeit von Schwarz wäre es aber ein hoffnungsloses Bemühen gewesen, wenn man damals schon das allgemeine Randproblem in Angriff hätte nehmen wollen. Erst die Erfahrungen, die die Lösung des Uniformisierungsproblems durch POINCARÉ und KOEBE mit sich gebracht hat, haben Fortschritte in dieser Richtung ermöglicht. Nach einer ziemlich langen Entwickelung, an der viele Mathematiker teilgenommen haben, konnte TIBOR RADÓ im Jahre 1930 das Randproblem der Minimalflächen und das damit zusammenhängnde Plateausche Problem für alle geschlossenen räumlichen Jordanschen Kurven lösen, durch welche man eine Fläche von endlichem Flächeninhalt hindurchlegen kann.

Fast gleichzeitig aber veröffentlichte Jesse Douglas eine andere Methode, an der er seit 1926 gearbeitet hatte, die durchaus originell ist, nur ganz wenige Elemente aus der herkömmlichen Theorie benutzt und zu Konsequenzen von ungeahnter Tragweite führt.

Der Kern dieser Methode beruht darauf, daß die Fragestellung verschoben und durch eine andere ersetzt wird, deren Lösungen mit denen des Plateauschen Problems übereinstimmen.

Nach dem ursprünglichen Problem soll durch eine geschlossene Jordansche Kurve Γ des n-dimensionalen Raumes eine Fläche von möglichst kleinem Flächeninhalt hindurchgelegt werden. Wir gehen von einer beliebigen Fläche F_1 aus, die den vorgeschriebenen Rand besitzt und von der wir annehmen, daß ihr Inhalt endlich ist. Die Koordinaten der Punkte dieser Fläche stellen wir mit Hilfe von zwei Parametern u, v dar, die den Einheitskreis der uv-Ebene beschreiben sollen und überdies *isometrisch* sein mögen. Für die Koeffizienten E_1, F_1, G_1 der ersten Grundform hat man dann $E_1 = G_1$ und $F_1 = 0$, woraus sofort folgt

$$\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = \frac{1}{2} \frac{E_1 + G_1}{2}.$$

Der Flächeninhalt S_1 der Fläche F_1 wird hiermit durch eine Summe von Dirichletschen Integralen dargestellt. Nun ersetzen wir, ähnlich wie bei der Poincaréschen Ausfegemethode, jede der Funktionen $x_{1i}(u, v)$ durch eine andere $x_{2i}(u, v)$, die auf der Peripherie des Einheitskreises mit der ersten übereinstimmt, aber im Inneren *harmonisch* ist. Hierdurch wird die obige Summe der Dirichletschen Integrale nicht vergrößert und man sieht fast unmittelbar ein, daß auch der Flächeninhalt S_2 der Fläche F_2, deren Koordinaten durch die harmonischen Funktionen $x_{2i}(u, v)$ dargestellt werden und die aus diesem Grunde eine »harmonische« Fläche genannt werden soll, nicht größer als S_1 sein kann.

Dies stellt das eine der Hauptresultate des Herrn Douglas dar, nämlich, daß man bei der Behandlung des Plateauschen Problems sich darauf beschränken kann, die Flächeninhalte von *harmonischen* Flächen miteinander zu vergleichen.

Ist jetzt F_2 eine beliebige harmonische Fläche und gibt es eine Fläche F_3 mit demselben Rand Γ, deren Flächeninhalt S_3 kleiner ist als der Flächeninhalt von F_2, so kann mit ganz denselben Mitteln wie oben, eine Fläche F_4 konstruiert werden, die ebenfalls durch Γ berandet wird und für welche das Integral über $\frac{1}{2}(E_4 + G_4)$ nicht größer als S_3 und folglich kleiner als das Integral über $\frac{1}{2}(E_2 + G_2)$ ist.

Hieraus folgt das eigentliche Resultat von DOUGLAS, nach welchem man eine Lösung des Plateauschen Problems erhält, wenn man diejenige harmonische Fläche F ermitteln kann, für welche das Integral über $\frac{1}{2}(E + G)$ möglichst klein ist.

Das Plateausche Problem ist also durch ein anderes ersetzt worden, das nicht nur große Ähnlichkeit, sondern auch eine wahre innere Verwandtschaft mit dem allgemeinen Problem der konformen Abbildung aufzeigt, und ebenso wie dieses mit den verschiedensten Methoden behandelt werden kann.

Douglas selbst hat sich folgenden sehr interessanten Weg ausgedacht: er transformiert das Doppelintegral über $\frac{1}{2}(E+G)$ in ein anderes, in welches die Randwerte x (cos δ, sin δ) der Funktionen x_i selbst eingehen und das eine überraschend einfache geometrische Bedeutung besitzt.

Dies ist das Funktional $A(g)$, das Douglas seinen Überlegungen zu Grunde legt, um das Plateausche Problem zu lösen, wobei durch g die Abbildung der Jordanschen Kurve Γ auf den Einheitskreis $e^{i\delta}$ bezeichnet wird. Der Wert von $A(g)$ bleibt invariant, wenn man die Abbildung g durch eine andere ersetzt, die man durch eine konforme Abbildung des Einheitskreises auf sich selbst erhält. Diese Bemerkung erlaubt nur solche Abbildungen in Betracht zu ziehen, für welche drei gegebene Punkte von Γ auf drei feste Punkte des Einheitskreises abgebildet werden, wodurch erreicht wird, daß man die schon konstruierten harmonischen Flächen gewissen Grenzprozessen unterwerfen kann, ohne illusorische Grenzgebilde zu erhalten.

Es wird nun direkt gezeigt, daß wenn $A(g)$ nicht beständig gleich $+\infty$ ist, eine harmonische Fläche existiert, für welche $A(g)$ seinen kleinsten Wert erreicht, und daß diese Fläche nicht nur eine Minimalfläche ist, die den gewünschten Rand besitzt, sondern daß für diese Fläche das Plateausche Problem des absoluten Minimums gelöst wird.

Die Bedingung, daß $A(g)$ auch endliche Werte annehmen kann, ist gleichbedeutend mit der anderen, daß man in die Jordansche Kurve Γ mindestens eine Fläche von endlichem Flächeninhalt einspannen kann. Douglas hat zuerst recht komplizierte Beispiele von Jordanschen Kurven Γ angegeben, die nicht als Rand von Flächen mit endlichem Flächeninhalt angesehen werden können. Dann hat er aber andere derartige Kurven gefunden, die an Einfachheit und Eleganz nicht übertroffen werden können: sie haben überall stetige Tangenten und sind sogar, von einem einzigen Ausnahmepunkt abgesehen, analytisch.

Aber auch für den Fall, daß $A(g)$ beständig gleich $+\infty$ ist, hat Douglas zwar nicht das Plateausche Problem, das hier sinnlos ist, aber wenigstens das Randproblem der Minimalflächen mit Hilfe einer naheliegenden Grenzbetrachtung lösen können.

Dieses Resultat schien entgültig zu sein und schien auch nicht verbessert werden zu können: es war doch gezeigt, daß man jede noch so verknotete Jordansche Kurve als Rand einer Minimalfläche betrachten kann.

Douglas merkte aber bald, daß seine Methode viel weitreichender war, als es zuerst erschien. Er konnte das Randproblem der Minimalflächen bzw. das Plateausche Problem für Paare von beliebig miteinander verschlungenen Jordanschen Kurven oder für das Möbius'sche Band behandeln.

Und ganz neuerdings hat er ein Resultat angekündigt, daß an Allgemeinheit nicht übertroffen werden kann: die Zahl der gegebenen Ränder ist beliebig, das Geschlecht der gesuchten Minimalfläche kann vorgeschrieben werden und unter gewissen Voraussetzungen kann man sogar verlangen, daß die gesuchte Fläche entweder zweiseitig oder auch einseitig sein soll. Selbst-Verständlich ist hier das Funktional $A(g)$, in welches das Integral über $\frac{1}{2}\,(E+G)$ transformiert wird, entsprechend komplizierter als das ursprüngliche.

ÜBER DIE SCHLICHTHEIT ANALYTISCHER FUNKTIONEN*

Von E. Peschl, Jena.

K. Löwner hat als erster den Gedanken der Iteration (in Form seiner infinitesimalen Schlitzabbildungen) für das Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen in den Vordergrund gestellt und ausgewertet.[1] Diesen Gedanken kann man aber noch in einem anderen Sinne weiterführen. Sei mit $\varphi_{a,\eta}(z)$ die elementare Abbildung des Einheitskreises auf die radial von einem Randpunkt η her aufgeschlitzte Kreisscheibe mit $\varphi'(0)=a$ bezeichnet. Durch n-maliges Iterieren solcher elementaren Abbildungen (mit jeweils beliebigen η und a) entstehen gewisse weitere elementare Abbildungen, die wir der Kürze halber *Elementar-Iterierte* $\Phi^{(n)}(z)$ nennen. Man kann nun zeigen,[2] daß sich jede schlichte und beschränkte Abbildung durch eine Folge $f_n=\Phi^{(n)}(z)$ solcher Elementar-Iterierten (in jedem abgeschlossenen Teil des Einheitskreises gleichmäßig) approximieren läßt. (Bei beliebigen schlichten Abbildungen genügen hierzu dann trivialerweise gewisse $\varrho_n \cdot \Phi^{(n)}(z)$. Irgendeine Eigenschaft ist daher sicher dann für beliebige schlichte Funktionen bewiesen, wenn es gelingt, für sie nachzuweisen: 1) sie gilt für die Identität, 2 a) bei Ausführung eines Iterationsschrittes mittels $\varphi_{a,\eta}(z)$, sowie 2 b) beim Übergang von $\varphi(z)$ zu $\varrho \cdot \varphi(z)$ bleibt sie erhalten und 3) sie wird auch beim Übergang von irgendwelchen $f_n(z)$ einer Folge für die sie gilt, zur Grenzfunktion nicht geändert (diese letzte Eigenschaft ist bei Koeffizientenabschätzungen trivialerweise erfüllt). Es kommt also vor allem auf die Eigenschaft 2 a) an, welche wir *Iterationsfestigkeit* nennen wollen. Man zeigt,[2] *daß der genaue Variabilitätsbereich* B_n der Koeffizienten $a_2, a_3, \ldots a_n$ einer im Einheitskreise regulären und schlichten Funktion $z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ *der kleinste Iterationsfeste Bereich ist, welcher den entsprechenden Variabilitätsbereich der Koeffizienten der sternförmig abbildenden Funktionen enthält.* Hieraus gewinnt man für jeden stetig differentiierbaren Teil des Randes des Variabilitätsbereiches eine partielle Differentialgleichung.[2] Diese ist explizit allerdings erst nach Elimination eines Parameters aus zwei anderen Gleichungen zu erhalten, doch läßt sich, wie ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit[3] zeige, diese Elimination umgehen. Man erhält so den

* Conférence de section, reçue trôp tard pour être insérée dans le tome II.

[1] E. Löwner: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math. Ann. 89 (1923), 103—121.

[2] E. Peschl: Zur Theorie der schlichten Funktionen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 176 (1936), 61—94.

[3] Erscheint demnächst in der Math. Zeitschr.

exakten Variabilitätsbereich B_3 für (a_2, a_3).[1] Für manche der hier auftretenden Fragen, wie z. B. auch für die Frage nach den zugehörigen Schrankenfunktionen ist es schon nützlich — und dabei viel einfacher — zunächst einmal den Variabilitätsbereich E_3 für die im Einheitskreis schlichten Funktionen $z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ mit *reellen* a_2, a_3 zu betrachten, den ich bereits früher finden konnte.[2] Er läßt sich so beschreiben (a_2, a_3 *reell*): zu E_3 gehören

$$\text{für } a_3 \leqq 1 + \frac{a_2^2}{2} \text{ genau alle Punkte mit } a_3 \geqq a_2^2 - 1\,,$$

$$\text{für } a_3 \geqq 1 + \frac{a_2^2}{2} \text{ genau alle Punkte mit } |a_2| \leqq 2 A e^{1-A},$$

wobei zur Abkürzung $\frac{|a_2|}{2(1 + a_2^2 - a_3)}\left(|a_2| + \sqrt{2a_3 - 2 - a_2^2}\right) = A$ gesetzt wurde. Schon hieraus ersieht man, daß die Berandung von B_3 einer *transzendenten* Gleichung in $a_2, a_3, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ genügt. Als zum Rand von E_3 gehörende nicht triviale Schrankenfunktionen mit reellen Koeffizienten erhält man:

$$F(z) = \frac{1}{\varrho}\,\psi\left(z^2 e^{\frac{1-z^2}{\sigma z}}\right), \text{ worin } \psi \text{ durch } \frac{z}{(1+z)^2} = \psi\left(z^2 e^{\frac{1-z^2}{z}}\right)$$

erklärt ist und für den Parameter $0 < \sigma \leqq 1$ gilt. (Siehe l. c.[2] S. 93).

Sie liefern die Abbildung des Einheitskreises auf gewisse Schlitzgebiete *mit zweifach gegabeltem Schlitz*. Man kann sie durch Integration einer Differentialgleichung finden, welche ein Analogen zur Löwner'schen Differentialgleichung darstellt.[2] Der Unterschied gegenüber dieser besteht darin, daß 1) statt des gewöhnlichen Jordanbogenschlitzes ein allgemeiner *topologischer Baum mit endlich vielen Enden* tritt und 2) bei infinitesimaler Iteration $f'(0)$ als konstant festgehalten wird. Die Eigenschaft 2) liefert übrigens auch ohne die Verallgemeinerung 1) beim Ansetzen von gewissen Variationsproblemen, die mit dem Koeffizientenproblem in natürlichem Zusammenhang stehen, erhebliche Vorteile, die über das Bisherige hinaus einen weiteren Zugang zu diesen Fragen gestatten.[1]

---

[1] Erscheint demnächst in der Math. Zeitschr.

[2] E. Peschl: Zur Theorie der schlichten Funktionen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 176 (1936), 61—94.