ATTI

DEL IV CONGRESSO INTERNAZIONALE

DEI

MATEMATICI

(Roma, 6-11 Aprile 1908)

PUBBLICATI

PER CURA DEL SEGRETARIO GENERALE

G. CASTELNUOVO

PROF. ALL'UNIVERSITÀ DI ROMA

VOL. I.

RELAZIONE SUL CONGRESSO — DISCORSI E CONFERENZE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

PREFAZIONE

Secondo gli accordi presi prima dell'apertura del IV Congresso Internazionale dei Matematici, la pubblicazione degli Atti doveva essere affidata al Circolo Matematico di Palermo. Ma in seguito a vicende di cui si parla a pag. 5 del presente volume, il Comitato organizzatore fu costretto ad assumersi anche questo ufficio.

Non ostante l'inevitabile ritardo prodotto dal mutamento di direzione e di tipografia, la stampa degli Atti è già molto avanzata, e tutto lascia sperare che essa sia interamente compiuta nei primi mesi del 1909.

La mole dell'Opera (oltre 1000 pagine) ci indusse a dividere gli Atti in tre Volumi.

Il primo Volume, che oggi presento al pubblico, comprende la relazione sui lavori del Congresso ed i discorsi e le conferenze lette nelle sedute generali.

Il secondo Volume conterrà le comunicazioni delle Sezioni I (*Aritmetica, Algebra, Analisi*) e II (*Geometria*).

Il terzo Volume riguarderà le Sezioni III-A (*Meccanica, Fisica Matematica, Geodesia*), III-B (*Applicazioni varie della Matematica*) e IV (*Questioni filosofiche, storiche, didattiche*).

Della revisione definitiva delle bozze di stampa, mi occupai io stesso per questo primo Volume. Per i successivi approfitterò volentieri del concorso che gli Introduttori largamente mi offrono, ciascuno per le comunicazioni che più strettamente lo riguardano (1): (Arzelà, Capelli, Pascal, Pincherle per la **Sezione I**; Bianchi, Segre per la **Sezione II**; Levi-Civita, Pizzetti per la **Sezione III-a**; Luiggi, Toja per la **Sezione III-b**; Enriques, Loria, Vailati per la **Sezione IV**).

A tutti questi egregi e cari colleghi mi è grato esprimer qui la mia viva riconoscenza per l'aiuto prezioso.

Ed un ringraziamento rivolgo pure alla Tipografia dei Lincei, che si è assunta la difficile impresa di pubblicare questi Atti, e con molta cura e solerzia la conduce a compimento.

G. Castelnuovo.

Roma, dicembre 1908.

(1) La revisione, è quasi superfluo avvertire, si riferisce esclusivamente alla parte tipografica e formale. Per la parte scientifica, la responsabilità di ciascun articolo spetta interamente all'Autore.

PARTE I

RELAZIONE SUL CONGRESSO

I.

PREPARAZIONE DEL CONGRESSO

Nella Seduta di chiusura del III Congresso Internazionale dei Matematici (Heidelberg, 13 Agosto 1904) il Prof. VOLTERRA propose, a nome dei Soci italiani della Sezione Matematica della R. Accademia dei Lincei, e d'accordo colla Presidenza del Circolo Matematico di Palermo, che il IV Congresso si riunisse a Roma nella primavera del 1908.

In seguito alla favorevole accoglienza fatta dall'Assemblea a tale proposta, fin dal Giugno 1906 si riunirono più volte i Soci italiani della Sezione Matematica della R. Accademia dei Lincei per prendere alcuni accordi sull'organizzazione del Congresso. Furono stabiliti i punti seguenti:

1°) Il Congresso sia posto sotto gli auspici di un Comitato internazionale composto:

a) del Presidente e dei Soci italiani e stranieri delle sezioni di Matematica e Meccanica della R. Accademia dei Lincei;

b) del Presidente e dei membri del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo.

Al detto Comitato furono poi aggregati i Conferenzieri, di cui sotto si parla.

2°) L'organizzazione del Congresso sia affidata ad un Comitato costituito dai Professori di Matematica e Fisica della R. Università di Roma. La Presidenza di tale Comitato fu assunta dal Prof. BLASERNA, Presidente della R. Accademia dei Lincei; Segretario fu il Prof. CASTELNUOVO, Tesoriere il Prof. REINA.

3°) Sia fatta una larga parte nel Congresso alle questioni di indole generale, affidandone la trattazione a scienziati illustri, preferibilmente stranieri, invitati a parlare sullo stato dei principali rami delle matematiche pure ed applicate alla fine del secolo XIX. Accettarono l'invito i Prof.i DARBOUX, FORSYTH, HILBERT, KLEIN, LORENTZ, MITTAG-LEFFLER, NEWCOMB, PICARD e POINCARÉ. Disgraziatamente i Prof.i KLEIN e HILBERT dovettero poi rinunziare all'incarico, il primo per le molteplici occupazioni sopraggiunte, il secondo per ragioni di salute. Il tema, che il KLEIN si era proposto di trattare, fu assunto e svolto dal Prof. v. DYCK; mentre non fu possibile sostituire l'HILBERT per l'epoca in cui la rinunzia ci pervenne. A rappresentare l'Italia in questo ciclo di Conferenze generali fu chiamato il Prof. VERONESE; al Prof. VOLTERRA fu affidato l'incarico di leggere un discorso nella Seduta inaugurale del Congresso.

4°) Il Congresso sia diviso in quattro Sezioni, ad ordinar le quali provvedano gli *introduttori* qui nominati:

Sezione I. **Aritmetica, Algebra, Analisi.** Introduttori: ARZELÀ, CAPELLI, PASCAL, PINCHERLE.

„ II. **Geometria.** Introduttori: BIANCHI, SEGRE.

„ III. **Meccanica, Fisica matematica, Geodesia, Applicazioni varie della Matematica.** Introduttori: LEVI-CIVITA, LUIGGI, PIZZETTI, TOJA.

„ IV. **Questioni filosofiche, storiche, didattiche.** Introduttori: ENRIQUES, LORIA, VAILATI.

Fra le Applicazioni della Sezione III fu deciso di comprendere, in modo esplicito, la Matematica Attuariale.

* * *

Per provvedere alle spese di organizzazione, S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione accordò la somma di Lire 10.000, che fu iscritta nel Bilancio dell'esercizio 1907-1908. Vari enti pubblici e privati vollero inoltre accrescere colle loro contribuzioni i fondi disponibili, dando prova con ciò dell'interesse sempre crescente che le Matematiche, attraverso alle loro molteplici applicazioni, destano anche all'infuori dei cultori della Scienza pura.

Compiamo un gradito dovere col segnalare i nomi degli offerenti, e coll'esprimere loro la viva riconoscenza del Comitato organizzatore:

Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio	L.	600 —
Ministero del Tesoro (Cassa Depositi e Prestiti)	»	500 —
Ministero dei Lavori Pubblici	»	500 —
R. Università di Roma	»	500 —
Cassa Nazionale di Previdenza	»	300 —
Assicurazioni generali « Venezia »	»	300 —
Compagnia di Assicurazioni « La Fondiaria » (Vita e Incendio).	»	300 —
Associazione italiana per l'incremento della Scienza degli Attuari	»	100 —
Comm. U. Hoepli, Editore.	»	200 —
Casa editrice Zanichelli.	»	100 —
Casa editrice Pellerano	»	100 —
Dalla « Deutsche Mathematiker-Vereinigung » (M. 800) (1). .	»	981,90
	L.	4481,90

(1) Somma proveniente dai residui del Bilancio del III Congresso Internazionale dei Matematici (Heidelberg, 1904).

Ma un'altra offerta più cospicua, sebbene non traducibile in cifre precise, dobbiamo menzionar qui, colle espressioni della nostra calda gratitudine verso il « Circolo Matematico di Palermo » ed il Direttore dei Rendiconti Prof. G. B. GUCCIA. Il Prof. GUCCIA, le cui benemerenze verso la nostra scienza sono universalmente note, aveva voluto dare una nuova prova del suo entusiasmo per le ricerche geometriche col fondare un premio di L. 3000, da conferirsi durante il Congresso ad una Memoria sulla teoria delle curve algebriche sghembe. Non contento di questa offerta personale, che accresceva interesse al Congresso, il Prof. GUCCIA sottopose, il 31 Agosto 1907, al Circolo Matematico di Palermo una convenzione, già accolta dal Comitato organizzatore, in virtù della quale il detto Circolo si assumeva l'incarico di tutte le pubblicazioni riguardanti il Congresso, compreso il Volume degli Atti, in cambio di una mitissima contribuzione, che il Comitato gli avrebbe versato, dovendo l'eventuale profitto rimanere a beneficio del Circolo e l'eventuale perdita ad esclusivo carico del Prof. GUCCIA.

In base a questa convenzione, il Circolo Matematico di Palermo stampò colla solita larghezza, e diffuse in gran copia le Circolari d'invito al Congresso (1), e pubblicò inoltre gli estratti di alcune delle Conferenze che dovevano esservi lette; il Circolo si disponeva a compiere la seconda e più cospicua parte dei suoi impegni, relativa alla pubblicazione degli Atti, quando un malaugurato sciopero, che disorganizzò la Tipografia Matematica di Palermo, costrinse il Prof. GUCCIA a chiedere, come rappresentante del Circolo al Congresso e Direttore dei Rendiconti, che il Circolo fosse sciolto dai patti non ancora eseguiti, rinunziando ad ogni compenso per le spese già sostenute.

Riconosciuta la gravità dei motivi addotti, la Presidenza del Congresso dovette aderire a tale richiesta, pur esprimendo il suo rammarico che la pubblicazione degli Atti non potesse esser affidata ad una Società, come il Circolo di Palermo, che avrebbe dato sicuro affidamento di un lavoro sollecito e perfetto.

***

Non meno preziosi delle contribuzioni finanziarie sopra menzionate riuscirono gli appoggi morali di cui tutte le Autorità ci furon larghe. Dobbiamo esprimere la nostra riconoscenza in particolare a S. M. il Re, che volle concedere l'Alto Patronato al Congresso e volle onorare di Sua presenza la Seduta inaugurale; al Ministro della Pubblica Istruzione, on. RAVA, che in varie occasioni volle manifestare il Suo interesse per questa riunione scientifica; al Sindaco di Roma, al Sindaco di Tivoli, al Rettore della R. Università di Roma, che fecero liete accoglienze agli ospiti illustri, a S. E. l'Ambasciatore d'Austria presso il Quirinale, che con squisita sollecitudine procurò ai Congressisti il permesso di visitare la Villa d'Este. Dobbiamo infine rin-

(1) Della prima Circolare (gennaio-febbraio 1907) furono spedite circa 2500 copie ai Soci delle principali Società Matematiche ed ai maggiori cultori della Scienza attuariale. Della seconda Circolare (gennaio 1908) furono distribuite più di 4000 copie alle persone comprese nel primo elenco e inoltre alle Università, Accademie, ecc., di tutto il mondo, e alle Scuole medie italiane.

graziare tutte quelle persone, di cui troppo lungo sarebbe qui fare i nomi, che in mille modi facilitarono il nostro compito. Tutti contribuirono, in varia misura, a render gradito ai Congressisti il soggiorno di Roma, ed a promuovere il conseguimento di uno degli scopi principali che questi Congressi internazionali si propongono: stringere legami di simpatia ed amicizia fra uomini provenienti dai più lontani paesi, distinti per lingue ed abitudini, ma pur congiunti da un unico ideale, il progresso della scienza e dell'umanità.

II.

ELENCO

DEI DELEGATI E DEI CONGRESSISTI

Autorità e Delegati.

S. E. RAVA Prof. Avv. Gr. Cord. LUIGI
Ministro della Pubblica Istruzione.

S. E. CIUFFELLI Gr. Uff. AUGUSTO
Sottosegretario di Stato per la Pubblica Istruzione.

Comitato organizzatore.

P. Blaserna, *Presidente.*
G. Castelnuovo, *Segretario generale.*
V. Reina, *Tesoriere.*
V. Cerruti.
A. Di Legge.
G. Pittarelli.
A. Tonelli.
V. Volterra.

Comitato internazionale.

Albeggiani, M. L.
Appell, P.
Arzelà, C.
Bazin, H.
Bertini, E.
Betocchi, A.
Bianchi, L.
Blaserna, P.
Capelli, A.
Castelnuovo, G.
Cerruti, V.
Colombo, G.
Darboux, G.
Darwin, G.
Del Pezzo, P.
Del Re, A.
Dini, U.
D'Ovidio, E.
Dyck, W. v.
Enriques, F.
Forsyth, A. R.
Gebbia, M.
Gordan, P.
Greenhill, A. G.
Guccia, G. B.
Hilbert, D.
Jordan, C.
Klein, F.
Lauricella, G.
Léauté, H.
Levi-Civita, T.
Lorentz, H. A.
Loria, G.
Maggi, G. A.
Mittag-Leffler, G.
Morera, G.
Newcomb, S.
Noether, M.
Ovazza, E.
Painlevé, P.
Pascal, E.
Peano, G.
Picard, E.
Pincherle, S.
Pizzetti, P.
Poincaré, H.
Reye, T.
Ricci, G.
Segre, C.
Somigliana, C.
Strutt, J. W. (Lord Rayleigh).
Tonelli, A.
Torelli, G.
Venturi, A.
Veronese, G.
Voigt, W.
Volterra, V.
Waals, J. van der.
Weber, H.
Weingarten, J.
Zeuthen, H. G.

Ufficio di Presidenza del Congresso.

Presidente: P. Blaserna.

Vice-Presidenti: Cerruti, D'Ovidio Forsyth, Gordan, Jordan, Lorentz, Mertens, Mittag-Leffler, Newcomb, Vassilief, Zeuthen.

Segretario generale: Castelnuovo.

Vice-Segretari: Fano, Reina.

Segretari aggiunti: Barnes, Borel, Hadamard, Holgate, Krazer, Phragmén, Schlesinger.

Delegati e Rappresentanti delle Pubbliche Amministrazioni, Istituti, e Società diverse.

Gouvernement Français.

Ministère de l'Instruction Publique.

M. Darboux, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris.
M. Poincaré, Membre de l'Académie française.
M. Picard, Membre de l'Académie des Sciences de Paris.
Professeurs à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

M. Niewenglovski, Inspecteur Général de l'Instruction Publique.

M. Hadamard, Professeur suppléant au Collège de France.

M. Padé, Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Bordeaux.

M. Molk, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy.

M. Lebeuf, Directeur de l'Observatoire et Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Besançon.

Ministère des Travaux Publics.

M. D'Ocagne, Professeur à l'École Nationale des ponts et chaussées.

Service de la Statistique générale de la France.

M. Borel, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

Governo Ungherese.

G. Rados, B. Tötössi — Prof.[i] alla Scuola Tecnica Superiore di Budapest.

Gouvernement de la Boulgarie.

M. Sp. Ganeff, Professeur à l'Université de Sophia.

Survey Department of Egypt.

J. I. Craig, Director of the computation Office of the Department.

Governo Italiano.

Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio.

Dott. Gr. Uff. Vincenzo Magaldi, Ispettore generale del Credito e della Previdenza.

Prof. Comm. Giuseppe Castelli, Direttore capo-divisione per l'insegnamento industriale, professionale e commerciale.

On. Prof. Anselmo Ciappi, Deputato al Parlamento.

Prof. Ing. Cav. Tullio Bagni, Ispettore del Credito e della Previdenza.

Ministero dei Lavori Pubblici.

Ing. Comm. Alberto Torri, Ispettore superiore del Genio Civile.

Ferrovie dello Stato.

Ing. Cav. Nicola Amoroso, Capo degli Uffici Previdenza e Infortunî.

Ufficio Tecnico della Cassa Depositi e Prestiti
(Ministero del Tesoro).

Prof. Cav. Francesco Paolo Cantelli.

Cassa Nazionale di Previdenza per la invalidità e vecchiaia degli operai.

Prof. Comm. Orazio Paretti, Direttore Generale della Cassa suddetta.

Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux et Conseil de l' Université de Bordeaux.

Prof. H. Padé, predetto, Secrétaire général de la dite Société.

University of St. Andrews.

Prof. J. E. A. Steggal.

Accademia delle Scienze di Budapest.

Prof.i Rados, Tötössi, predetti.

Jugoslavenska Akademija di Zagreb.

Prof. Vladimir Varićak.

Università di Atene.

Prof. Cyparissos Stéphanos.

Smithsonian Institution, Washington.

Prof. S. Newcomb, Emeritus of the John Hopkins University of Baltimore.

American Philosophical Society, Philadelphia.

Prof. S. Newcomb, predetto.

Circolo Matematico di Palermo.

Prof. Cav. G. B. Guccia.

R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo.

Prof. G. B. Guccia, predetto.

Accademia Pontaniana di Napoli.

Prof.i Amodeo, Capelli, Del Re, Pascal.

Società Astronomica Italiana.

Prof. G. Boccardi, Presidente.
Prof.i Levi-Civita, Pizzetti, Venturi.

Institut des Actuaires français.

MM. Quiquet, Razous, Pannier.

Association des Actuaires suisses.

Dr. Eggenberger.

Associazione belga degli Attuari.

MM. Lembourg, Gustin.

Assicurazioni Generali Venezia.

Comm. Marco Besso.

Associazione Italiana degli Attuari.

Ing. Guido Toja.

Comitato delle Signore.

Signora Liliah Ascoli-Nathan.
» Sofia Beduschi-Todaro.
Sig.ina Beloch.
Signora Adele Cerruti.
Sig.ina Rosina Di Legge.
Signora Amalia Donati.
Sig.ina Folgheraiter
Signora Maria Giolitti.
» Maria Giorgis.
Sig.ina Alide Goldschmidt.
Signora Maria Grassi-Koenen.
Sig.ina Isabella Grassi.
Signora Hermanin.
Sig.ina Enrichetta Hertz.
Signora Elvira Mancini.
» Margherita Mengarini.
Sig.ina Valeria Mengarini.
Sig.ina Elisa Millosevich.
» Minghelli.
Signora Frida Mond.
Sig.ine Nathan.
Sig.ina Pigorini.
Signora Giannina Pirotta.
Sig.ina Pittarelli.
Signora Maria Rava-Baccarini.
Sig.ine Rava.
Signora Eugenia Ravà.
Sig.ina Bice Ravà.
Sig.ine Schiaparelli.
Signora Amelia Tonelli.
Sig.ine Tonelli.
Sig.ina Gina Vivante.
Signora Virginia Volterra.

Elenco dei Congressisti.

ABRAHAM H., Prof., Paris.
M.me ABRAHAM.
ABRAHAM M., Prof., Berlin.
ACKERMANN-TEUBNER A., Hofrat. Dr., Leipzig.
ADAU G. H., Directeur de la Comp. d'Assurances « La Royale Belge », Bruxelles.
ADHÉMAR (V. R. d'), Prof., Lille.
Mme ADHÉMAR (d').
ADLER G., Prof., Wien.
AJELLO C., Napoli.
ALBEGGIANI M. L., Ing., Palermo.
ALVAREZ UDE J., Dr., Saragozza.
AMALDI U., Prof., Modena.
AMODEO F., Prof., Napoli.
AMOROSO L., Dr., Roma.
AMOROSO N., Ing., Roma.
ANDRADE J., Prof., Besançon.
ANSCHUETZ R., Prof. Dr., Bonn (Rhein).
ANSCHUETZ L.
APPELL P., Prof., Paris.
ARCHENHOLD F. S., Dr., Treptow-Berlin.
Frau ARCHENHOLD.
ARTEMAS M., Washington (U. S. A.).
ARTNER HELENE, Cand. math., Wien.
Frl. ARTNER.
ARZELÀ C., Prof., Bologna.
ASCOLI M., Prof, Roma.
AUTONNE L., Ing., Châteauroux.
Mme AUTONNE.

BAGNERA G., Prof., Messina.
BAGNI T., Prof., Roma.
BARCHI A., Prof., Palermo.
BARNES E. W., Lecturer, Cambridge.
BARONI E., Prof., Roma.
BAUSCHINGER J., Prof., Berlin.
BEGGI E., Roma.
BEKE M., Prof. Dr., Budapest.
Frau BEKE.
Frl. BEKE A.
Frl. BEKE M.
BELJANKIN J., Privat-Dozent, Kieff.
BELOCH MARGHERITA, Dr., Roma.
BENETTI J., Prof., Bologna.
BERNSTEIN F., Prof., Göttingen.
Frau BERNSTEIN M.
BERTINI E., Prof., Pisa.
BERZOLARI L., Prof., Pavia.
BESSO M., Comm., Roma.
BIANCHI L, Prof., Pisa.
BIASI G., Prof., Sassari.
BIASI ISABELLA, Stud., Sassari.
BISCONCINI G., Dr., Roma.
BLASCHKE W., Dr. Phil., Graz.
BLASERNA P., Prof., Roma.
BLOCK J., Prof., Wilmersdorf-Berlin.
BLUMENTHAL O., Prof., Aachen.
BOBYLEFF D., Prof., St-Pétersbourg.
BOCCARDI G., Prof., Torino.
BOGGIO T., Prof., Torino.
Sig.ra BOGGIO N.
BOHLMANN G., Wilmersdorf-Berlin.
BONAPARTE Prince R., Paris.
BONAVENTURA P., Prof., Livorno.
BONOLA R., Prof., Pavia.
BORDONI U., Ing., Roma.
BORDIGA G., Prof., Venezia.
Sig.ra BORDIGA B.
BOREL E., Prof., Paris.
Mme BOREL.
BORIO A., Prof., Aosta.
BORTOLOTTI E., Prof., Modena.
BOULANGER A., Prof., Lille.
BOUTROUX P., Prof., Paris.
BRADSHER E. L., Stud., Berlin.
BROCARD H., Bar-le-Duc.
BROGGI O., Prof., Roma.
BROUWER L., Dr., Amsterdam.
BRUECKNER M., Gymnasial Prof., Bautzen.
BRUSOTTI L., Prof., Sondrio.
BRYAN G. H., Prof. Upper Bangor (N. Wales).
Mrs. BRYAN.
Mrs. BRYAN R. P.
Miss HUGH PRICE D.
BUATTINI A., Prof., Cortona.
BUDMANI P., Prof., Castelferretti.
BURGATTI P., Prof., Messina.
BUSTELLI A. M, Prof., Roma.
Sig.ra BUSTELLI M.

BUETTNER F., Gymnasial Prof, Danzig.
Frau BUETTNER M.
BYDZOVSKY B., Prof., Karlin (Prag).

CALDARERA G., Prof., Catania.
CANEVAZZI S., Prof., Bologna.
CANTELLI F. P., Dr., Roma.
CAPELLI A., Prof., Napoli.
Sig.ra CAPELLI T.
BERETTA U.
CARATHÉODORY C., Dr. Phil., Bruxelles.
CARDA K., Prof., Prag.
CARTAN, Prof, Nancy.
Mme CARTAN.
Mlle CARTAN.
CASABONNE G., Prof., Nizza.
CASAZZA G., Prof., Milano.
CASSINIS G., Ing., Roma.
CASTELLI G., Comm., Roma.
CASTELNUOVO G., Prof., Roma.
CELORIA G., Prof., Milano.
CERADINI C., Prof., Roma.
CERRUTI V., Prof., Roma.
CHAZY J., Agrégé de Math, Paris.
CIAPPI A., Prof., Roma.
CIVININI L., Prof., Genova.
CLAPIER T., Prof., Paris.
CODDINGTON J., New-York.
Miss. CODDINGTON.
COHEN H., Dr. Prof., Marburg.
Frau COHEN.
COLLIER A. B., Lecturer, Cambridge.
COLMAR N., Gymnasial Prof., Danzig.
COMMISSAIRE J. H., Prof., Lyon.
Mme COMMISSAIRE J.
Mr. GRÉMILLOT L.
Mme GRÉMILLOT H.
CONTI A., Prof., Bologna.
CORDONE G., Prof., Como.
COSSERAT T., Prof., Toulouse.
COSTANZI G., Prof., Rieti.
CRAIG J. F., Ing., Giza.
CREPAS E., Prof., Roma.
CRESPI ISABELLA, Prof., Roma.
CRUDELI U., Ing., Roma.
CURJEL H. W., Mexico.
CZEKE MARIANNE, Dr., Budapest.

DALLAS R. J., Teacher of Math., London.
D'AMICO G., Ing., Cagliari.
DARBOUX G., Prof., Paris.
DARWIN G. H., Prof., Cambridge.
Mr. DARWIN C. G.
Mrs. DARWIN.
Miss DARWIN M.
DAWIS E. W., Prof., Lincoln (U. S. A.).
DAWSON M. M., Actuary, New-York (U S. A.).
DE AMICIS E., Prof., Forlì.
DEBRÉ J., Prof., Neully s/S.
DE DONDER T., Bruxelles.
DE FRANCHIS M., Prof., Parma.
DEGENHAST H., München.
DEHN M., Prof., Hamburg.
Frau DEHN B.
DELITALA G., Prof., Sassari.
DEL RE A., Prof., Napoli.
DELL'AGNOLA C. A., Prof., Venezia.
DENJOY A., Agrégé de Math., Paris.
DICKSTEIN S., Prof., Varsovie.
DI DIA G., Prof., Milano.
DI LAUDO R., Roma.
DI LEGGE A., Prof., Roma.
DINGELDEY F., Dr. Prof., Darmstadt.
Frau DINGELDEY A.
Frau EISENLOHR G.
DINGLER H., Dr. Assistent., München.
DINI U., Prof., Pisa.
DISTELI M., Prof., Dresden.
DITTRICH N., Cand. math., Breslau.
DOEHLEMANN K., Prof., München.
Frau DOEHLEMANN.
Frl. FRAUENHOLZ L.
DOMSCH P., Dr. Phil., Chemnitz.
DONADIO E., Ing., Roma.
D'OVIDIO E., Prof., Torino.
DRACH, Prof., Poitiers.
DRECKER J., Prof. Dr., Aachen.
DUBOIS A., Prof., Neuchâtel.
DUHEM P., Prof., Bordeaux.
DYCK (W. von), Prof., München.

EGGENBERGER J., Dr., Zurig.
EHRENSTEIN STELLA, stud., Budapest.
EMCH A., Prof., Solothurn.
ENA S, Dott., Roma.
ENGELBERT K., Prof. Dr., Loeben.
ENRIQUES F., Prof., Bologna.
Sig.ra ENRIQUES L.
EPRÉMESNIL (c. d'), Paris.
Mme EPRÉMESNIL (c. d').
EZEKIEL, Roma.

Faber G., Prof., Karlsruhe.
Fabry F., Prof., Montpellier.
Mme Fabry J.
Fano G., Prof., Torino.
Faerber C., Dr. Prof., Berlin.
Frau Faerber F.
Fasciotti Ernesta, Prof., Bobbio.
Fazzari G., Prof., Palermo.
Fehr H., Prof., Genève.
Féjer L., Privat Dozent, Kolozsvár.
Finsterbusch J., Gymn. Prof., Zwickau.
Fiske T. Prof., New York (U. S. A).
Fiedler E., Prof., Zürich.
Finzi L., Dr. Prof., Aachen.
Foà R., Prof., Alessandria.
Forsyth A. R., Prof., Cambridge.
Frank Ph., Dr. Phil., Wien
Frank J.
Frau Frank E.
Frattini G., Prof., Roma.
Fredholm I., Prof., Stockholm.
Freytag Thekla, Oberlehrer, Bonn.
Friesendorff T., Prof., St-Pétersbourg.
Mme Friesendorff H.
Fritz H., Oberlehrer Prof., Darmstadt.
Frizell A. B., Instructor, Göttingen.
Frolov M., Général, Genève.
Mme Frolov.
Fruscione V., Prof, Noto.
Fubini G., Prof., Genova.
Fujiwara M., Phil., Charlottenburg.
Furtwaengler P., Prof., Aachen.

Galdeano Z. G., de, Prof., Zaragoza.
Gallucci G., Prof., Napoli.
Galvani L., Dr., Bologna.
Ganew S., Prof. Dr., Sophia.
Garbasso A., Prof., Genova.
Sig.ra Garbasso V. B.
Gauthier-Villars A., Éditeur, Paris.
Genese R. W., Prof., Aberystwyth.
Gérardin A., Directeur du Spinx-Oedipe, Nancy.
Gerbaldi F., Prof., Palermo.
Geysser I., Dr. Prof., Münster i. W.
Frau Geysser E.
Giacomelli F., Dr., Roma.
Sig.ra Giacomelli G.
Giacomelli R., Dr., Roma.
Gianfranceschi G., Prof., Roma.
Gibson G. A.. Prof., Glasgow.
Gigli D., Prof., Sassari.
Gini C., Dr., Motta di Livenza.
Giorgi G., Ing. Prof., Roma.
Giorgis G., Prof., Roma.
Giraud G., Dr., Torino.
Giuliani G., Prof., Pisa.
Golmann A. J., Ing., Tunis.
Gordan P., Prof., Erlangen.
Goretti Miniati C., Prof., Roma.
Gottlieb G. B., Prof., Neuchâtel.
Goursat F., Prof., Paris.
Graham W. J., Prof., Minneapolis.
Grassmann H., Prof. Dr., Giessen.
Frau Grassmann Holste M.
Greenhill A. G., London.
Grelling K., Göttingen.
Gremigni M., Prof., Firenze.
Grimaldi G., Prof., Catania.
Gruebler M., Prof., Dresden.
Guareschi G., Pavia.
Gubler E., Prof., Zürich.
Guccia G. B., Prof., Palermo.
Guenot A., Nizza.
Mme Guenot.
Guggenheim M. Comm., Venezia.
Sig.ra Guggenheim.
Sig.na Guggenheim.
Guenther N., Prof., St-Pétersbourg.
Mme Guenther N.
Guentsche R., Prof., Berlin.
Frau Guentsche C.
Gutzmer A., Prof., Halle a. S.
Frau Gutzmer H.

Hadamard J., Prof., Paris.
Mme Hadamard L.
Haentzschel E., Prof., Berlin.
Frau Haentzschel.
Hagen G., Direttore della Specola Vaticana. Roma.
Hamel G., Prof., Brünn.
Hahn H , Dr., Wien.
Hardy J. G., Prof., Williamstown.
Mrs. Hardy N. M.
Harrington E. A., Stud. Mat., Berlin.
Hartogs F., Privatdozent, München.
Hauser W., Dr., Lehrer, Ladenburg a Neckar.
Hawkersworth Rev. A. S., Sheridanville (U. S. A).
Helguero F. de, Prof., Asti.
Hensel K., Prof., Marburg.

Frau HENSEL G.
Frl. HENSEL R.
Frl. HENSEL L.
Frl. BAUM B.
HERMANN A., Paris.
HERMANN L. Capitaine, Tunis.
HERMANN V., Berlin.
HERTZ P., Dr., Bonn.
HESSENBERG G., Prof., Dr. Phil., Bonn.
Frau HESSENBERG E.
HEUMANN C, Dr., München.
Frau HEUMANN.
HEYSE M., Dr. Oberlehrer, Berlin.
HILLEBRAND E., Ing., Charlottenburg.
HJELMSLEV J., Prof, Hellerup.
HOČEVAR F., Prof., Graz.
HOEPLI U., Milano.
HOLGATE T. F., Prof., Evanston (U. S. A.).
Miss HOLGATE.
HOLMGREN E., Prof., Upsala.
HOSTINSKY B., Dr., Novy Bydzov.
HUDSON W. H. H., Prof., Croydon.
Miss HUDSON H. P.

IMMLER W., Augsburg.
INSOLERA F., Dr., Roma.
ITELSON G., Berlin.

JACCOTTET Ch., Prof., Dr., Lausanne.
JACOBSTHAL E., Dr., Berlin.
JAHNKE E, Prof., Dr., Berlin.
JANISCH E., Prof., Prag.
Frau JANISCH I.
JIRGENSEN N. R., Kopenaghen.
JOACHIMESCU A. G., Prof., Bucarest.
JOLLES S., Prof., Dr., Halensee Berlin.
Frl. JOLLES A.
Frl. JOLLES B.
Mme DE NEUSCHOTZ.
JONESCU J., Ing., Bucarest.
JORDAN C., Prof., Paris.
JUNG G., Prof., Milano.

KAREL P., Prof., Prag.
KEIL P., Gymn. Prof., Danzig.
Frau KEIL I.
KIEPERT L., Dr., Prof., Hannover.
Frau KIEPERT G.
KLANG F., Stud., Wien.
KLANG J., Dr., Wien.
KLUG L., Prof., Kolozsvar.
KOBALD E., Prof., Leoben.
KOEBE P., Prof., Berlin.
KÖLMEL F., Prof., Baden.
KOLOSSOFF G. W., Prof., Jurserff.
KOHN G., Dr., Wien.
KOLLROS L., Dr. Prof., La Chaux-de-Fonds.
KOENIG D, Dr., Budapest.
KORELLA W., Gymn. Prof., Danzig.
KORN A., Prof., München.
Frau KORN M.
KORNFELDE W., Stud. Mat., Wien.
KRAZER A., Dr. Prof., Karlsruhe.
KRYLOFF N., Ing. Prof., Paris.
KULLRICH E., Prof., Gera.
Frau KULLRICH Ch.
KUWAKI A., Dr. Phil., Charlottenburg.

LAISANT C. A., Prof., Paris.
LALESCO T., Prof., Bucarest.
LALIVE A., Prof., La Chaux-de-Fonds.
LAMB H., Prof., Manchester.
Miss LAMB H.
Miss LANGLEY W.
LANCELIN F., Astronome, Paris.
LANNER A., Dr. Prof., Innsbruch.
LARMOR J., Prof., Cambridge.
LAURICELLA G., Prof., Catania.
Sig.ra LAURICELLA A.
Sig.na RICCÒ P.
LAZZERI G., Prof., Livorno.
Sig.na LAZZERI I.
LEATHEM J. G., Prof., Cambridge.
LEBEUF A. V., Prof., Besançon.
Mme LEBEUF M.
Mme SAUVAGE A.
LEICHSENRING O., Dr. Prof., Berlin.
Frau LEICHSENRING.
LEMBOURG C., Actuaire, Bruxelles.
LEONCINI M., Prof., Brescia.
LEVI B., Prof., Cagliari.
LEVI E. E., Dr., Pisa.
LEVI-CIVITA T., Prof., Padova.
LEVY L., Examinateur à l'Ecole Polytechnique, Paris.
LEVY BRUHL M., Prof., Paris.
Mr. LEVY BRUHL H.
Mr. LEVY BRUHL M.
LEWENT L., Oberl., Berlin.

LEWIS T. C., Cambridge.
Mrs LEWIS.
LEZ H., Lower le Borage.
LIAPOUNOFF A., Prof., St. Petersbourg.
Mme LIAPOUNOFF N.
LIETZMANN W., Dr. Phil. Oberl., Barmen.
LINDELÖF E. L., Prof., Helsingfors.
LORENTZ H. A., Prof., Leiden.
Mme LORENTZ A. C.
LORIA G., Prof., Genova.
Sig.ra LORIA I.
LO-VETERE GALLO V., Ing. Prof., Teramo.
LUCKWALDT F., Dr. Prof., Stettin.
LUIGGI L., Prof. Ing., Roma.
LUKAT M., Oberlehrer, Danzig.

MACFARLANE A., Prof., Chatam.
MAGALDI V., Comm., Roma.
MAGGI G. A., Prof., Pisa.
MAGNANI TERESA, Dr., Milano.
MAJCEN G.. Prof., Dr., Agram.
Frau MAJCEN Z.
Frau GUNČEVIĆ I.
MANES A., Prof., Berlin.
MANFREDINI G., Prof., Terni.
MANTELL LYDIE, Paris.
MANVILLE O., Dr., Bordeaux.
MARCH L., Direct. de la Statistique, Paris.
MARCOLONGO R, Prof., Napoli.
MARONI A., Prof., Gubbio.
MAROTTE F., Prof., Paris.
MARTINETTI V., Prof., Messina.
MASSARINI IGINIA, Prof., Roma.
MASSIMI P., Prof., Avezzano.
MAURER L., Prof., München.
MEDOLAGHI P., Dr., Roma.
MEHMKE, Dr. Prof., Degerloch (Stuttgart).
MERTENS F., Dr. Prof., Wien.
METH P., Dr. Phil., Charlottenburg.
METH R., Dr. Phil.
MEYER E., Dr. Prof., Charlottenburg.
MEYER F. G., Oberlehrer, Schöneberg-Berlin.
MEYER MARGARET THEODORA, Math. Lecturer, Cambridge.
Miss THOMAS B.
MICHEL P., Dr., Firenze.
MICHIELS, Marseille.
Mme MICHIELS.
MILLOSEVICH E., Prof., Roma.
MINETOLA S., Prof., Taranto.
MINKOWSKI H, Dr. Prof., Göttingen.
Frau MINKOWSKI A.
Frau HEIDEN-HEIMER J.
MIRIMANOFF D., Dr., Cannes.
MISANI M., Prof., Udine.
MITTAG-LEFFLER G., Prof., Stockholm.
Mme MITTAG-LEFFLER de LINDFORS.
MOLK J., Prof., Nancy.
Mme MOLK J.
MOND L., Dr., Roma
MONTCHEUIL (l'abbé de), Toulouse.
MONTEL A., Ing., Roma.
MONTEL P., Dr. Prof., Paris.
MONTESANO D., Prof., Napoli.
MONTESSUS (V. R. de), Prof., Lille.
Mme de MONTESSUS.
MOORE E. H., Prof., Chicago (U. S. A.).
Mrs. MOORE E. H.
MOORE C. L. E., Instructor in Math., Boston, (U. S. A.).
MORERA G., Prof., Torino.
MORGAN LEWIS D., Prof., Aberystwyth.
MOSER C., Dr. Prof., Bern.
MOZZANI V., Prof., Roma.
MUIRHEAD R. F., Glasgow.
MUELLER E., Dr. Prof., Wien.
Frau MUELLER G.
MYLLER A., Dr. Prof., Bucarest.
MYLLER-LEBEDEFF WERA, Dr. Phil., Bucarest.

NEWCOMB S., Prof, Washington (U. S. A.).
Mrs. WILSON E. K.
NICOLET F., Prof. Neuchâtel.
NICCOLETTI O, Prof., Pisa.
NICOLI F., Prof., Modena.
Sig.ra MAGNANINI A. NICOLI.
NIEWENGLOWSKI B. A., Insp. général de l'Instruction, Paris.
Mme NIEWENGLOWSKA I. A.
NOETHER M., Dr., Prof., Erlangen.
Frau NOETHER.
Frl. NOETHER E., Dr.

OBEAR G. B., Prof., Providence R. I. (U. S. A.).
OCAGNE (M. d') Ing., Prof., Paris.
Mme d' OCAGNE.
Mlle d' OCAGNE.
OESTREICH P., Oberlehrer, Schönberg-Berlin.
OLDS G., Prof., Amherst Mass. (U. S. A.).
OLIVIER L, Paris.

ORLANDI CESIRA, Prof., Anagni.
ORLANDO L., Dr., Roma,
ORTU CARBONI, Prof., Genova.
Sig.ra ABRAMO N.
Sig.na ORTU CARBONI A.
ORTWAY R., Stud. Math., Göttingen.

PADÉ H. E., Prof., Bordeaux.
Mme PADÉ H.
PAGLIERO G., Dr., Torino.
PAHL F., Prof., Charlottenburg.
PANNELLI M., Prof., Roma,
PANNIER G., Prof., Paris.
PARETTI O., Prof., Roma.
PARVOPASSU C., Ing., Roma.
PASTORE A., Prof., Aosta.
Sig.ra PASTORE-MUCCHI M.
PATERNÒ E., Prof., Roma.
PASCAL E., Prof., Napoli.
PEANO G., Prof., Torino.
PEGRAM G. B., Dr., Berlin.
PELLERANO, Editore, Napoli.
PENNACCHIETTI G., Prof., Catania,
PERNA A., Prof., Napoli.
PEROZZO L., Ing., Milano.
PERRIN F. O. R., Insp. gén. des Mines, Paris.
Mme PERRIN C.
PERRON O., Privatdozent, München.
PESLOÜAN C. L. de, Ing., Paris.
Mme PESLOÜAN J. L. de.
PETROVITCH M., Dr. Prof., Belgrade.
PFEIFFER G. F., Prof., Kiew.
PHRAGMÉN E., Stockholm.
PIAZZA S., Prof., Milano.
Sig.ra PIAZZA G.
PICARD E., Prof., Paris.
Mme PICARD E.
PICK G, Prof., Prag.
PIEPER A., Dr. Prof., Münster in W.
PIERI M., Prof., Catania.
PIETSCH F., Dr., Slany.
PINCHERLE S., Prof., Bologna.
PIOLA F., Prof., Roma.
PIRONDINI G., Prof., Roma.
PITTARELLI G., Prof., Roma.
PIZZETTI P., Prof., Pisa.
POCHETTINO A., Prof., Roma.
POINCARÉ J. H., Prof., Paris.
POLIGNAC (Prince de) C., Podwein Radmannsdorf.
Princesse de POLIGNAC C.
Mlle de POLIGNAC A.
POPOVICI C., Paris.
POSSÉ C., Prof., St. Petersbourg.
POUSSIN R., Prof., Actuaire, Paris.
PREZEBORSKI A., Prof., Charkow.
PRINGSHEIM A., Prof., München.
PRINGSHEIM P., Dr.
Frau PRINGSHEIM H.
PUCCIANO G., Prof., S. Demetrio Corace.
PUND O., Oberlehrer, Charlottenburg.

QUINTILI PIERINA, Prof., Roma.
QUIQUET A., Dr., Paris.

RACHMANINOFF J., Dr., Davos-Platz.
RADOS G., Prof., Budapest.
Frau RADOS F.
RAGANTI B., Canonico, Sarzana.
RAVÀ V., Ing., Roma.
REINA V., Prof., Roma.
RÉMOUNDOS G., Prof., Athènes.
RETALI V., Prof., Milano.
RICCI-CURBASTRO G., Prof., Padova.
Sig.ra RICCI-CURBASTRO B.
RICHMOND H. W., Prof., Cambridge.
RIESZ F., Prof., Löcse.
RIESZ M., Stud. Math, Budapest.
RUIS Y CASA J., Prof., Zaragoza.
ROLLA L., Dr., Genova.
ROSENBLATT A., Ing., Krakau.
ROSSKOTHEN F., Baurat, Berlin.
Frau ROSSKOTHEN.
Frau SPORBORG H.
ROVETTI C., Dr., Torino.
RUBINI LUISA, Prof., Milano.
RUHLAND, Dr. Prof., Bonn.
RUNGE C., Prof., Göttingen.
Frau RUNGE A.
Frau SCHROEDER FANNY.
RUSSYAN C., Prof., Charkow.
RUSSEL B., Oxford.
RUSSO G., Prof., Catanzaro.
RUSSO D.

SADUN E., Prof., Roma.
SALTYKOW N., Prof., Charkow.
Mme SALTYKOW O.
SANNIA G., Dr, Torino.
SARW J., Marienburg.

Mme SARW J. W.
SAUVAGE L., Prof., Marseille.
Mme SAUVAGE A.
SAVITCH S., Prof., St. Petersbourg.
SCHEFFERS G., Dr. Prof., Steglitz (Berlin).
Frau SCHEFFERS E.
SCHESTAKOFF P., Ing., Kiew.
SCHILLING F., Prof., Danzig.
Frau SCHILLING M.
SCHILLING G. Dr., Wien.
Frau SCHILLING M.
SCHLESINGER L., Prof., Kolozswar.
Frau SCHLESINGER C.
SCHRUTKA L., Wien.
SCHRUTKA E., Prof.
Frau SCHRUTKA M.
SCHUR F., Dr. Prof., Karlsruhe.
Frau SCHUR L.
SCHUETTE F., Prof., Düren.
SEGRE C., Prof., Torino.
SÉLIVANOFF D., Prof., St. Pétersbourg.
SERVANT M., Sécrétaire de la Société Math. de France, Paris.
SEVERI A., Prof., Tivoli.
Sig.ra SEVERI M.
SEVERI F., Prof., Padova.
Sig.ra SEVERI R.
SEVERINI C., Prof., Catania.
SILLA L., Dr., Roma.
SIMON M., Honorar Prof., Strassburg.
Frau SIMON J.
Frl. WEGNER HARRIET.
SINIGALLIA L., Ferrara.
SINTSOV D., Dr. Prof., Charkow.
SMITH D. E., Prof., New-York (U. S. A.).
Miss DEWAR A.
Miss SHERMANN J. E.
Miss SMITH TAYLOR F.
SOBOTKA F., Prof., Prag.
SOLER E., Prof. Messina.
SOMIGLIANA C., Prof., Torino.
SOMMER J., Danzig.
Frau SOMMER P.
SOMMERVILLE D. M. V., Lecturer, St. Andrews.
SPIESS O., Prof., Basel.
STEAD J., Prof., Göttingen.
STEGGAL J. F. A., Prof., Dundee.
STEIN G., Astronomo della Specola Vaticana, Roma.
STEINITZ E., Prof. Dr., Breslau.
STEKLOFF W., Prof., St. Pétersbourg.
Mme STEKLOFF O.

STÉPHANOS C., Prof., Athènes.
STEPHANSEN ELIZABETH, Dr., Aas (Kristiania).
Mlle STEPHANSEN G.
STOERMER C., Prof., Kristiania.
Mme STOERMER A.
STRAUSS C., Reallehrer, Bad Dürcheim.
STRAUSS J., Math. Stud., Wien.
STRAZZERI V., Prof., Palermo.
STUDY E., Prof., Bonn.
SUPPANTSCHITSCH R., Prof., Wien.

TAUBER A., Dr. Prof. Wien.
Frau TAUBER O.
TEDONE O., Prof., Genova.
TERRADAS E., Prof., Barcelona.
TIETZE H., Dr., Wien.
TIMERDING H. E., Prof., Strassburg.
TOJA G., Ing., Firenze.
TONELLI A., Prof., Roma.
TORNÉR DE LA FUENTE J., Ing., Prof., Escorial Madrid.
TORRI A., Ing., Roma.
TÖTÖSSY B. v., Prof., Budapest.
Frau TÖTÖSSY E. v.
TÖTÖSSY IDA v., Budapest.
TOURET G., Paris.
TREUTLEIN P., Prof., Carlsruhe.
Frau TREUTLEIN M.
TZITZEICA G., Prof., Bucarest.

UNWERTH v. WOLF, Dr. Phil., Niesky.

VAILATI G., Prof., Roma.
VAN VLECK J. M., Prof., Middletown (U. S. A.).
Miss VAN VLECK A.
Miss VAN VLECK C.
Miss VAN VLECK J.
VANNI G., Prof., Roma.
VARIĆAK V., Prof., Agram.
Mme VARICAK A.
VASSILIEF A., St. Pétersbourg.
VECCHIETTI E., Dr., Roma.
VENTURI A., Prof., Palermo.
VERDE F., Spezia.
VERONESE G., Prof., Padova.
VERSLUYS W. A., Prof., Delft.
VOGT H., Prof., Nancy.
Mme VOGT M.
VOLTERRA V., Prof., Roma,

WAEGLER C., Dr. Phil., Gera (Reuss).
WAITZ K., Prof., Tübingen.
Frau WAITZ T.
WAEHNER F., Prof., Prag.
Frau WAEHNER M.
WALLENBERG G., Prof., Charlottenburg.
WANGERIN A., Prof., Halle.
Frau WANGERIN J.
WEBER E. v., Prof., Wurzburg.
Frau WEBER F. v.
WEGENER Ph., Dr. Gymnasial-Direktor, Greifswald.
Frau WEGENER M.
WEICKMANN L., Dr., München.
WEINMEISTER L., Dr. Phil., Tharandt bei Dresden.
WEISS F., Dr. Phil., Gross Lichterfelde.
Frl. WEISS E.
WESTFALL W. D. A., Prof., Göttingen.
WIELEITNER, Dr. Gymn. Lehrer, Speyer.
WILD C., Prof., St. Gallen.
Mlle WILD O.
WILHELM R., Prof., Dr. Phil., Thorn.
WIMAN A., Prof., Upsala.
WOLGRAM T., Prof., Thorn.
WURSCHMIDT J., Stud. Math., Erlangen.

YOUNG W. H., Lecturer, Liverpool, Cambridge.

ZAPPA G., Dr., Roma
ZAREMBA S., Prof., Krakau.
ZERMELO E., Prof., Göttingen.
ZERVOS P., Prof., Athènes.
ZEUTHEN H. G., Prof., Kopenhaghen.
Mme ZEUTHEN S.
Mlle WARMING L.
ZINDLER K., Prof., Innsbruck.
ZORAWSKI K., Prof., Dr. Phil., Krakau.
Mme ZORAWSKI L.
ZSIGMONDY K., Prof., Wien.
Frau ZSIGMONDY V.
ZUEHLKE P., Dr. Phil., Halensee-Berlin.
Frau ZUEHLKE C.
ZWICKER H., Dr., Zwickau.

Distribuzione dei Congressisti per Nazioni.

	CONGRESSISTI	PERSONE DI FAMIGLIA	TOTALE
Italia	190	23	213
Germania	120	54	174
Francia	63	29	92
Austria-Ungheria	51	23	74
Inghilterra	22	11	33
Stati Uniti (America)	16	11	27
Russia	19	6	25
Svizzera	16	2	18
Svezia	5	1	6
Romania	6	—	6
Spagna	5	—	5
Danimarca	3	2	5
Olanda	3	1	4
Norvegia	2	2	4
Belgio	4	—	4
Grecia	3	—	3
Tunisia	2	—	2
Bulgaria	1	—	1
Canadà	1	—	1
Egitto	1	—	1
Messico	1	—	1
Serbia	1	—	1
TOTALE	**535**	**165**	**700**

III.

REGOLAMENTO DEL CONGRESSO

ART. 1. La prima seduta plenaria sarà presieduta dal Presidente del Comitato organizzatore. In essa si procederà alla costituzione del Seggio definitivo, il quale comprenderà:

Un Presidente effettivo,
Alcuni Vice-Presidenti,
Un Segretario generale,
Alcuni Segretari aggiunti.

ART. 2. Le sedute plenarie successive saranno presiedute dal Presidente effettivo o da uno dei Vice-Presidenti.

ART. 3. La prima adunanza di ciascuna Sezione sarà presieduta da uno degli Introduttori designato dal Comitato organizzatore. In questa seduta la Sezione nominerà un Segretario ed uno o più Segretari aggiunti. I Segretari resteranno in carica per tutta la durata del Congresso.

Alla fine di ogni adunanza i membri presenti eleggeranno il Presidente della seduta successiva.

ART. 4. Il Comitato organizzatore stabilirà l'ordine delle letture di ciascuna Sezione; questo però potrà esser modificato dal voto delle Sezioni rispettive.

ART. 5. La lettura di una Comunicazione non potrà durare più di venti minuti. Durante la discussione gli oratori non potranno tener la parola più di dieci minuti, nè potranno prenderla più di una volta sullo stesso argomento, senza speciale permesso del Presidente.

ART. 6. Gli oratori sono pregati di trasmettere al Segretario della Sezione, appena compiuta la lettura, un breve sunto degli argomenti trattati. Il Segretario, terminata la lettura, redigerà e consegnerà al Segretario generale un estratto del processo verbale destinato alla stampa nel Bollettino del giorno successivo.

Il processo verbale completo, contenente il sunto delle letture fatte e delle discussioni avvenute, dovrà esser redatto dal Segretario della Sezione nel corso della giornata.

Art. 7. Le Conferenze e le Comunicazioni lette al Congresso saranno raccolte nei Volumi degli Atti . . . .

Si pregano gli Autori di voler consegnare il testo delle loro letture al Segretario generale del Congresso *non più tardi del 12 aprile 1908*. Per gli scritti in lingue straniere (francese, tedesco, inglese) è richiesto l'uso della macchina da scrivere (tranne che per le formole). Se vi sono figure, i relativi « clichés » dovranno essere forniti dagli Autori.

IV.

PROGRAMMA

E SVOLGIMENTO DEL CONGRESSO

PROGRAMMA DEL CONGRESSO.

Domenica 5 aprile.

ORE 9 $^1/_2$ pom. — Ricevimento dei Congressisti nell'Aula Magna della R. Università (Via della Sapienza), offerto dal Rettore.

Lunedì 6 aprile.

ORE 10 ant. — Inaugurazione del Congresso nella Sala degli Orazi e Curiazi al Campidoglio, con intervento di S. M. il Re.

Discorso del Prof. V. VOLTERRA: *Le Matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX.*

ORE 3 pom. — Seduta plenaria. - Nomina della Presidenza. - Relazione intorno al concorso alla Medaglia GUCCIA.

Conferenze: MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe.*

FORSYTH, *On the present condition of partial differential Equations of the second order, as regards formal integration.*

Martedì 7 aprile.

ORE 9 ant. — Costituzione e sedute delle singole Sezioni.

ORE 3 $^1/_2$ pom. — Seduta plenaria.

Conferenze: DARBOUX, *Les méthodes et les problèmes de la Géométrie infinitésimale.*

DYCK (v.), *Ueber die mathematische Encyclopädie.*

Mercoledì 8 aprile.

ORE 9 ant. — Sedute delle singole Sezioni.
ORE 4 pom. — Seduta plenaria.
Conferenze: NEWCOMB, *La théorie du mouvement de la lune; son histoire et son état actuel.*
LORENTZ, *Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther.*
ORE 10 pom. — Ricevimento nel Museo Capitolino, offerto dal Municipio della Città di Roma.

Giovedì 9 aprile.

ORE 9 ant. — Sedute delle singole Sezioni.
ORE 3 pom. — Visita al Palatino per invito di S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione.
ORE 9 pom. — Concerto orchestrale nell'Anfiteatro Corea (Mausoleo di Augusto).

Venerdì 10 aprile.

ORE 9 ant. — Sedute delle singole Sezioni.
ORE 3 $^1/_2$ pom. — Seduta plenaria.
Conferenze: POINCARÉ, *L'avenir des mathématiques.*
PICARD, *L'Analyse dans ses rapports avec la Physique mathématique.*
ORE 9 pom. — Conferenza del Prof. STOERMER: *Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans le champ d'un aimant élémentaire avec application aux aurores boréales.*

Sabato 11 aprile.

ORE 9 ant. — Sedute delle singole Sezioni.
ORE 3 $^1/_2$ pom. — Seduta plenaria.
Conferenza del prof. G. VERONESE: *La Geometria non-archimedea.*
Chiusura del Congresso e designazione della sede ed epoca del V Congresso Internazionale dei Matematici.

Domenica 12 aprile.

Visita alla Villa Adriana e colazione a Tivoli.

SVOLGIMENTO DEL CONGRESSO.

Domenica 5 aprile.

Alle 9 $^1/_2$ pom., per gentile invito del Rettore dell' Università di Roma, professore comm. TONELLI, quasi tutti i Congressisti già arrivati a Roma e numerosissime signore si riunirono ad amichevole convegno nell'Aula Magna dell' Università.

Il Prof. TONELLI con brevi parole porse agli intervenuti un caldo e cordiale saluto.

La riunione continuò animatissima fino alle ore 11 $^1/_2$.

Lunedì 6 aprile.

Alle 10 ant. nella Sala degli Orazi e Curiazi del Campidoglio e all'Augusta presenza di S. M. il RE, fu solennemente inaugurato il IV Congresso Internazionale dei Matematici.

S. M. il RE fu ricevuto al suo arrivo da S. E. il Ministro della P. I., dal Sindaco di Roma, Sig. ERNESTO NATHAN, dal Senatore Prof. P. BLASERNA, Presidente, e da altri Membri del Comitato organizzatore del Congresso.

Dopo che S. M. e i presenti si furono seduti, il Sindaco così saluta i numerosi intervenuti:

« Per chi minutamente indaga, come per chi cerca a grandi tratti ed in sintesi la storia della civiltà, i recenti scavi del Foro Romano, dovuti alle geniali intuizioni del comm. Boni, offrono un singolare interesse. I ricordi della gente italica preromana, popolante i sette colli, costituiscono nei sepolcreti e nelle urne cinerarie una prima stratificazione della geologia civile; a loro vicino si sovrappongono le evidenze di Romolo, che traccia l'Urbe; più in là sono sparse le vestigie della Repubblica, sino a quando troneggia, tutto dominando, la colossale statua equestre di Domiziano. Cavallo, cavaliere, crollano e rovinano in mezzo al rovinìo di un Impero mondiale sorretto dalla forza delle armi, dalla forza delle armi spezzato il fascio, distrutto. E all'aquila dalle ali potenti, dagli artigli aguzzi, dal becco adunco, simbolo di quella forza, si sostituisce la croce, simbolo della fede. Allora è la cupola di San Pietro che domina la città ed il mondo, e la nuova êra di civiltà, accentrando in Roma una seconda volta il verbo della umanità, di là l'irradia, l'espande e lo svolge fra le genti. E la fede si afferma, conquide, impera, sino a quando vecchie passioni la sofisticano, nuovi intuiti ne spezzano l'unità, e la colossale cupola di Michelangelo, come il colossale piedistallo del monumento equestre, rimane ad attestare di un grande potere che fu.

« Perchè nell' ansioso affannarsi alla ricerca del vero un nuovo fattore si avanzò, si sovrappose; i bagliori della fede illanguidirono, gli occhi degli uomini si rivolsero ad una nuova stella che s' innalzava nel firmamento, la cui luce serena indicava nuove vie, che le luminosità intermittenti delle fedi dominanti avevano sottratto allo sguardo: e la coscienza di un popolo, dalla scienza illuminata, attraverso la breccia di Porta Pia e sulle rovine di due civiltà tramontate, additava all' eterna città una terza missione tra le genti. In nome di quella scienza, di quella nuova, intensa, costante luce, o Signori, voi siete qui raccolti dalle varie parti del mondo; voi fra i più degni cultori dell' umano sapere, inquantochè voi rappresentate nei vostri studî, nelle vostre ricerche, nelle vostre inconfutabili illazioni, la base granitica su cui si erge quel maestoso edificio di sapienza moderna che ha trasformato uomini e cose, assoggettando la natura ai bisogni sociali e creando nuovi vincoli e rapporti nella umana convivenza.

« E però a me, umile cultore di discipline economiche — quanto era più adatto il mio illustre collega Prof. Tonelli — è grato dare a voi, maestri di scienze esatte, il benvenuto: con riverenza in nome mio, con plauso in nome della città che io ho l' onore di rappresentare.

« Non solo per la eccelsa somma di cognizioni da voi complessivamente rappresentate, nella quale mi è grato constatare che la terza Italia non sia quantità trascurabile, ma altresì per la più vasta idea dalla vostra riunione adombrata.

« Nei tempi passati, quando ancora le sparse membra della patria erano a ricomporsi ad unità, avvenivano convegni di scienziati in questa o in quella città, e gli eletti colà riuniti, nel mentre prendevano ad argomento visibile quel ramo dello scibile che più propriamente a loro competeva, coglievano occasione del felice incontro fra uomini di varie regioni, per cementare, affermare, ordire quella unità che al disopra delle varie avocazioni era in cima ai loro pensieri.

« Partivano col cuore rinfrancato da quella fraterna comunione, col pensiero più nitido intorno all' opera comune a loro incombente: le multiformi discipline scientifiche così concorrevano a predisporre, costituire, rafforzare il patrio organismo: era una grande, una bella, una nobile idea che sovrastava ai varî rami della scienza per unirli tutti nella formazione di una coscienza nazionale. Oggi, qui in Roma, capitale d' Italia, più alti fini aspettano da voi opera e sanzione. Non sono più gli scienziati di un Paese, radunati in una comunità di aspirazioni circoscritte da frontiere; sono gli scienziati del Mondo intero che, nella rappresentanza dei varî popoli, dei varî intelletti, delle varie cognizioni, s'incontrano, si uniscono in nome della scienza per la formazione non più di una coscienza nazionale, ma di una coscienza internazionale. I vostri lavori si rivolgono alla ricerca di un solo vero, sebbene si possa esprimere in molte lingue; e questa mirabile camera di compensazione per scambiare i valori scientifici è una delle armi più potenti per abbattere le frontiere, distruggere le antinomie, calmare gli odî, rinfocolare gli affetti fra le genti. È preludiare a quella fratellanza universale che la scienza conosce ed intuisce, la politica oggi ignora e sospetta.

« In nome di quella idea di pace e di civiltà, in questa storica sala, in presenza della più Alta Rappresentanza della Nazione, fin tra voi, uomini insigni, esempio singolare di scienza e coscienza, Roma a voi tutti delle regioni Italiche, delle regioni Estere, dà col cuore l'augurale saluto ».

Dopo il Sindaco, prende la parola il Presidente del Comitato organizzatore del Congresso, Prof. Blaserna:

Sire!

« A nome del Comitato ordinatore di questo Congresso ed a nome della R. Accademia dei Lincei, che ne assunse la Direzione, ringrazio V. M. di avere accettato l'Alto Patronato e di avere voluto onorare coll'Augusta Sua presenza questa nostra prima riunione.

« V. M. ha voluto così provare, una volta di più, quanto Le stiano a cuore le scienze e le arti del nostro paese, e come il Suo cuore batte all'unisono con quello della nazione in tutte le nobili e più elevate sue manifestazioni.

Signore e Signori!

« Chiunque coltivi una scienza, s'accorge facilmente che due cultori della stessa materia, anche se lontani e appartenenti a nazioni diverse, sono più vicini fra di loro, che altri due cultori di scienze diverse anche se vivono nella stessa città.

« Questo concetto ha creato nei secoli scorsi quelle ammirabili corrispondenze fra scienzati stranieri, in cui si comunicavano a vicenda i risultati sulle loro indagini. Le occasioni erano rare: giornali scientifici internazionali non esistevano, ed erano le corrispondenze private che servivano a colmare la grave lacuna.

« Oggidì, lo stesso concetto ha creato i Congressi Internazionali di una sola scienza, Congressi che ebbero e che hanno un benefico influsso. Ed anche la Matematica ha sentito tale influenza. Il primo Congresso Internazionale di Matematica ebbe luogo a Zurigo, poi con periodo regolare di quattro in quattro anni, a Parigi, ed a Heidelberg. A questo ultimo, nel 1904, la R. Accademia dei Lincei, che ho l'onore di presiedere, fece col mezzo del suo distintissimo Socio, Prof. Volterra, e d'accordo col Circolo Matematico di Palermo, la proposta che il prossimo Congresso di Matematica si riunisse a Roma, e tale proposta fu accolta con molto favore.

« L'Accademia si costituì in Comitato ordinatore, col mezzo delle sue Sezioni di Matematica e di Meccanica, alle quali aggiunse l'egregio Rettore dell'Università e alcuni distinti professori, nonchè la Presidenza del Circolo matematico di Palermo, che sotto la potente iniziativa del Prof. Cav. Guccia ha acquistato valore nazionale ed anche internazionale.

« L'idea ebbe subito molti fautori: l'onor. Ministro della Pubblica Istruzione volle mettersi alla testa del movimento, ed i suoi colleghi di Agr. Ind. e Comm., del Tesoro e dei Lavori pubblici, proposero alla loro volta, che il Congresso fosse non solo di Matematica pura, ma anche di Matematica applicata. Ecco come nacque questo Congresso.

« Oggi stesso ci ritireremo al palazzo dell'Accademia per lavori tranquilli e sereni; ma io devo un caldo ringraziamento all'egregio Sindaco di questa città per la nobile iniziativa da lui presa, col voler salutare la grande riunione da questo classico colle, che rispecchia tanta grandezza e tante speranze della nostra patria ».

S. E. L. Rava, Ministro della P. I., pronuncia un discorso che qui riproduciamo in sunto:

« Nel nome del Governo porgo a quanti sono qui convenuti, illustri cultori delle scienze matematiche in ogni Nazione civile, il saluto beneaugurante dell' Italia.

« Un sentimento di alta idealità scientifica e civile vi ha fatto sospendere le assidue ricerche individuali, per recare il contributo della vostra sapienza ad un còmpito collettivo, che mira all' assunto generale e al progresso speciale delle vostre discipline. Il convegno vostro otterrà nella bella armonia dei risultati, che con energie concordi saprete conseguire, il suo premio adeguato.

« Queste rassegne temporanee di comune lavoro rispondono alle più profonde esigenze del sapere moderno. Quanto più apparisce urgente e impellente la necessità della divisione del lavoro scientifico, per cui pare sia sempre inadeguata ogni più fervida attività intellettuale rivolta a conseguire anche solo una parte e, quasi si direbbe, un frammento di verità; d' altro lato il nostro spirito anela alla conquista unitaria del sapere, e solo nella unità della verità riconosce e sente lo sforzo supremo dell' intelletto umano.

« Tale esigenza — prima che da ogni altro gruppo di scienze — è stata avvertita dalle matematiche, così nel conseguire e nel mantenere il proprio ordine rispetto alle altre discipline, come nell' animarle e orientare — con luce perenne di infaticate ricerche — il loro interno progresso.

« La matematica è tale scienza che il solo riconoscere il posto che le spetta si accompagna ad un ampio allargarsi dell' orizzonte mentale. Platone, che costruisce la più seducente armonia di idealità che sia mai fiorita nella mente e nel cuore dell' uomo, glorifica la matematica come una divina musica di proporzioni; i Romani, che cementano la più granitica struttura giuridica dell' ordinamento civile, consacrano nelle loro leggi essere l' apprendimento e l' esercizio dell' arte matematica di pubblico interesse e decoro; Dante, che è matematico nella concezione del poema immortale si paragona nella ricerca di sublimi verità al geometra

. . . . che tutto s' affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova
pensando, quel principio ond' egli indige;

Leonardo, che nel cuore del Rinascimento scruta con occhio acuto e con sagacia che tuttora pare miracolo le incognite della natura e della vita, dichiara ' essere le scienze tanto più vere, quanto più s' informano ai metodi matematici '; Galileo che

all'Anglo che tanta ala vi stese
sgombrò primo le vie del firmamento,

considera tutta la natura come un libro i cui caratteri sono scritti con segni geometrici, e la geometria ' maestra dell' onesto acquistare l' utile, il dilettevole, il bello, il buono '; Newton, Cartesio che creano la geometria analitica, il calcolo infinitesimale; Emanuele Kant — dalla cui critica demolitrice di fantasmi dogmatici rifiorisce tutta la filosofia moderna — tutti affermano il principio che ' una scienza della natura è scienza solo in quanto è matematica '.

« Ma in questi nomi — che segnano punti significativi della traiettoria del pensiero umano — non è che un riflesso e una proiezione di ciò che è stato lo sviluppo interno delle scienze matematiche per opera di chi vi dedicò di proposito tutta la vita. Poichè le scienze matematiche presentano di secolo in secolo tale un accrescimento ininterrotto e disciplinato, che nessun altro gruppo di scienze potrebbe vincerle nel paragone. Persino le pause apparenti non sono che un concentramento dinamico delle conquiste future.

« Leonardo aveva scritto: dove si grida non è vera scienza, perchè la verità ha un solo termine, il quale essendo pubblicato, il litigio resta in eterno distrutto, e se esso litigio risurge, è bugiarda e confusa scienza e non certezza rinata.

« Giova ricordare, per comprendere l'evoluzione della scienza, il pronto fecondarsi dei primi germogli delle matematiche, quali scienze astratte, nella zolla storica della intellettualità greca. Non è senza un profondo significato che un popolo, il quale diede al mondo un'arte che parve il tipo ideale della perfezione, ebbe anche — e pur nella decadenza — un fiorente periodo di ricerche matematiche.

« Giova ricordare l'Italia dei Comuni e del Rinascimento, coi nomi del Fibonacci, del Tartaglia, del Ferro, del Ferrari e di tanti e tanti altri, che preparò di conserva col maturarsi storico di nuove esigenze spirituali e sociali il rifiorire della scienza. Dopo Fibonacci, già da noi due correnti si manifestano, l'una che si afferma con gli studî di dottrina pura, e l'altra con quelli di studî applicati ai commerci, nei quali l'Italia traeva ragione delle sue rinnovate fortune. E così sorgeva la partita doppia con Luca Paciolo e la sua scuola fiorente di aritmetica commerciale.

Signori,

« Facendo l'augurio che il fervore dei vostri lavori doni ad ognuno di voi, a Congresso compiuto, il conforto di moltiplicate energie — e son già tanto grandi — da spendere in servigio della missione scientifica che così altamente vi onora, lasciate che io vi esprima il voto, come Ministro degli Studî, che dalle vostre discussioni maturino anche germi preziosi di opportuni suggerimenti a quanti hanno a cuore l'incremento della scuola moderna quale abbiamo debito di offrire, come frutto dei nostri propositi più tenaci e alti, alle giovani generazioni.

« L'Italia per tradizione mai interrotta onora i vostri studî. Ormai non v'è persona colta la quale non sappia — lo dirò con nobili parole di Luigi Cremona — che ' quand'anche un'esperienza secolare non ci ammonisse che le più astratte teorie matematiche sortono in un tempo più o meno vicino applicazioni prima neppur sospettate; quand'anche non ci stesse innanzi al pensiero la storia di tanti illustri che senza mai desistere dal coltivare la scienza pura furono i più efficaci promotori della presente civiltà; questa scienza è degna che voi l'amiate; tante sono e così sublimi le sue bellezze, ch'essa non può non esercitare su le generose e intatte anime una alta influenza educativa alla serena e inimitabile poesia della verità '.

« Queste belle parole che Luigi Cremona pronunziava nell'Ateneo di Bologna dieci anni prima che Roma fosse nella storia — come già era nel cuore di ogni italiano — Capitale d'Italia, ancora oggi esprimono una così nobile voce di fede, che ben suonano in Roma italiana al cospetto del Re assertore e cultore nobilissimo degli studî e degli ideali moderni, e al cospetto degli scienziati del mondo civile qui convenuti per il progresso delle loro alte dottrine ».

Il prof. VOLTERRA legge poi il suo discorso: *Le matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX*, che viene riprodotto integralmente nel seguito.

***

Alle ore 15 ebbe luogo la prima seduta plenaria, con numerosissimi intervenuti.

Il Presidente del Comitato organizzatore, aperta la seduta, invita l'Assemblea a nominare il Presidente del Congresso. Per acclamazione viene eletto lo stesso Presidente del Comitato organizzatore, Prof. BLASERNA.

Questi, ringraziata l'Assemblea, propone che la Presidenza venga, insieme a lui, così costituita:

Vice-Presidenti: CERRUTI, D'OVIDIO, FORSYTH, GORDAN, JORDAN, LORENTZ, MERTENS, MITTAG-LEFFLER, NEWCOMB, VASSILIEF, ZEUTHEN.

Segretario generale: CASTELNUOVO.

Vice-Segretari: FANO, REINA.

Segretari aggiunti: BARNES, BOREL, HADAMARD, HOLGATE, KRAZER, PHRAGMÉN, SCHLESINGER.

Queste proposte sono tutte accettate dall'Assemblea.

Il Segretario generale comunica che l'Accademia Reale di Scienze, Lettere e Belle Arti del Belgio invia al Congresso i suoi migliori auguri e voti.

Comunica altresì che il Comitato delle onoranze a TORRICELLI, nel salutare i Congressisti, si augura di averli ospiti a Faenza, all'epoca della commemorazione del grande scienziato.

Presenta infine i libri inviati al Congresso dagli editori Longmans e C° e Teubner.

Il Prof. SEGRE, anche a nome dei colleghi NOETHER e POINCARÉ, legge la Relazione sul concorso alla Medaglia GUCCIA. A questo concorso furono presentate tre Memorie; ma la Commissione, pur tributando loro elogi, ritiene che a nessuna di esse possa venir conferito il premio; ed esaminati invece i lavori che, senza essere stati presentati al concorso, furono tuttavia pubblicati sull'argomento che era oggetto del concorso medesimo e nell'epoca durante la quale tale concorso rimase aperto, viene unanime alla conclusione di assegnare il premio al Prof. FRANCESCO SEVERI per i suoi lavori sulla *Geometria sopra le superficie algebriche.*

Il Prof. SEGRE consegna quindi la Medaglia GUCCIA al Prof. SEVERI.

Il Prof. MITTAG-LEFFLER tiene poi la sua conferenza: *Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe.*

Segue la conferenza del Prof. FORSYTH: *On the present condition of partial differential Equations of the second order as regards formal integration.*

Il Presidente, nel chiudere l'adunanza, propone che a Presidenti della successiva seduta plenaria vengano scelti i Prof.i NEWCOMB e JORDAN. L'Assemblea accetta.

Martedì 7 aprile.

Alle 9 ant. si riuniscono le singole Sezioni.

Alle 3 ½ pom. il Presidente Prof. NEWCOMB apre la seduta plenaria e dà la parola al Prof. DARBOUX per la lettura della sua Conferenza: *Les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale.*

Terminato il discorso, il Prof. NEWCOMB cede la presidenza al prof. JORDAN; il Prof. W. v. DYCK legge la sua Conferenza: *Ueber die mathematische Encyklopädie.*

Per la seduta plenaria successiva viene designato come Presidente il professore GORDAN.

Mercoledì 8 aprile.

Alle 9 ant. sedute delle singole Sezioni.

Alle 4 pom. seduta plenaria, sotto la presidenza del Prof. GORDAN. Hanno luogo le seguenti letture:

NEWCOMB, *La théorie du mouvement de la lune; son histoire et son état actuel.*
LORENTZ, *Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther.*

Come Presidente per la prossima seduta plenaria è designato il prof. MITTAG-LEFFLER.

Alle 10 pom. ebbe luogo un Ricevimento nel Museo Capitolino, offerto ai Congressisti dal Municipio della Città di Roma.

Vi intervennero in gran numero gli Scienziati convenuti a Roma e le Signore che li accompagnavano.

Facevano gli onori di casa con signorile cortesia il Sindaco sig. NATHAN, l'Assessore delegato Prof. TONELLI, e gli altri Assessori Municipali.

Agli invitati fu servito un lauto rinfresco.

La riunione animatissima si sciolse soltanto dopo la mezzanotte.

Giovedì 9 aprile.

Alle 9 ant. si riuniscono le singole Sezioni.

Nel pomeriggio ebbe luogo la visita dei Congressisti al Palatino, per invito di S. E. il Ministro della P. I.

I Congressisti accorsero in folla; e, suddivisi in varî gruppi, accompagnati dal Prof. VAGLIERI e da altre competenti persone che fornivano loro nelle differenti lingue le opportune illustrazioni, visitarono con soddisfazione e interesse quelle secolari rovine.

Alla visita era presente S. E. Rava, colla sua Signora e Signorine; ed erano pure presenti quasi tutte le Signore del nostro Comitato.

Dopo la visita, gli invitati non mancarono di fare il dovuto onore allo squisito buffet.

Alle 9 pom. l'Anfiteatro Corea, di recente inaugurato, accolse i Congressisti per l'annunciato Concerto diretto dal M.° Mancinelli. I Congressisti occupavano parecchi palchi e quasi tutte le poltrone di platea.

Durante la serata, alcuni fra i più illustri scienziati esteri qui presenti furono cordialmente intrattenuti, nel palco del Municipio, da S. E. Rava e dal Sindaco di

Venerdì 10 aprile.

Alle 9 ant. sedute delle singole Sezioni.

Alle $3\frac{1}{2}$ pom. il Presidente Prof. Mittag-Leffler apre la seduta plenaria. Assistono S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione e S. E. Luzzatti, Ministro di Stato.

Essendo indisposto il Prof. Poincaré, l'annunciata conferenza di lui sul tema: *L'avenir des mathématiques*, viene letta invece, per suo incarico, dal Prof. Darboux.

Dopo di che il Presidente ringrazia il Prof. Darboux, e lo prega di farsi interprete presso il collega Poincaré della riconoscenza dell'Assemblea e dei voti che essa forma per la prossima sua guarigione.

L'adunanza è sospesa per dieci minuti.

Ripresa la seduta, il Presidente comunica un telegramma di augurî al Congresso inviato dalla « Société Mathématique de France ».

Ha poi luogo l'altra interessante lettura: Picard, *L'Analyse dans ses rapports avec la Physique mathématique.*

Sabato 11 aprile.

Alle 9 ant. si riuniscono ancora una volta le singole Sezioni.

Alle $3\frac{3}{4}$ pom. il Presidente Prof. Blaserna apre la seduta plenaria di chiusura del Congresso.

Egli comunica che il Senatore Prof. Veronese, per una lieve indisposizione sopraggiuntagli, non può tenere l'annunciata Conferenza sulla *Geometria non-archimedea*, la quale sarà inserita negli Atti del Congresso.

Dà poi lettura di uno scritto del Prof. Georg Cantor, diretto al Prof. Guccia, e contenente saluti e voti pel Congresso. L'Assemblea, dolente che il Prof. Cantor non abbia potuto venire a Roma, ricambia il cordiale saluto.

L'Assemblea, con vivi applausi, fa proprio l'Ordine del giorno votato questa mattina dalla Sezione IV del Congresso:

« Il Congresso, avendo riconosciuto la importanza di un esame accurato dei programmi e dei metodi d'insegnamento delle matematiche nelle scuole secondarie delle varie nazioni, confida ai Professori KLEIN, GREENHILL e FEHR l'incarico di costituire un Comitato internazionale che studii la questione e ne riferisca al prossimo Congresso ».

Il Prof. HADAMARD presenta, brevemente illustrandola, la seguente proposta:

« La Section III (Mécanique), après un échange de vues, dans lequel a été reconnue l'importance d'une *unification des notations vectorielles*, propose au Congrès la nomination d'une *Commission internationale* pour l'étude de cette question.

« Le président de cette section pour la séance du 11 avril propose au Congrès de prier son Comité d'organisation de vouloir bien constituer cette Commission et lui soumet la liste des noms mis en avant, à cet égard, dans la séance du 11 avril ».

Anche questa proposta è approvata con vivi applausi.

Il Prof. CONTI presenta la seguente proposta:

« Il Congresso fa voto che all'Ordine del giorno del prossimo Congresso sia « posta la costituzione di un'Associazione internazionale dei Matematici ».

La proposta è approvata.

Il Prof. D'OCAGNE fa la seguente proposta:

« Il résulte de l'échange de vues qui a eu lieu dans la Section III-B qu'il « serait hautement désirable de provoquer une entente de plus en plus étroite entre « ceux qui s'occupent de perfectionner les méthodes mathématiques et ceux qui ont « besoin de les appliquer à un objet pratique.

« A cet effet la Section émet le voeu que les mathématiques appliquées à « la Science de l'Ingénieur fassent, au prochain Congrès, l'objet d'une Section spéciale.

« En outre, la Section III-B propose la constitution d'une Commission inter- « nationale chargée de préparer les travaux de cette nouvelle Section. La composition « de cette Commission internationale sera fixée par le bureau du IV^{ème} Congrès ».

Anche questa proposta è accolta a voti unanimi.

La Sezione IV nella sua adunanza del 9 corr. ha deliberato di presentare al Congresso il seguente Ordine del giorno:

« Il IV Congresso internazionale dei matematici in Roma considera come « questione di massima importanza per le scienze matematiche pure ed applicate la « pubblicazione di tutte le opere di Eulero.

« Il Congresso saluta con riconoscenza l'iniziativa presa in proposito dalla « Società dei Naturalisti Svizzeri, e fa voti che la grande opera sia eseguita dalla « Società stessa colla collaborazione dei matematici delle altre Nazioni.

« Il Congresso prega l'Associazione internazionale delle Accademie, e special- « mente le Accademie di Berlino e di Pietroburgo, delle quali Eulero è stato cele- « berrimo membro, di aiutare l'impresa di cui è parola ».

Il Presidente dichiara che, ove quell'Ordine del giorno sia approvato, egli porterà la questione alla riunione dell'Associazione internazionale delle Accademie, che si terrà l'anno venturo a Roma.

Darboux osserva che la questione fu già discussa in altri Congressi, ed anche nella recente riunione di Vienna dell'Associazione delle Accademie. Il voto troverà perciò probabilmente un terreno già propizio.

Dopo ciò l'Ordine del giorno è approvato a voti unanimi.

Riguardo alla pubblicazione degli « Atti del Congresso », il Presidente ricorda che essa doveva farsi per cura del « Circolo Matematico di Palermo » e sotto la direzione del Direttore dei Rendiconti Prof. Guccia. Disgraziatamente in seguito ad uno sciopero degli operai tipografi di Palermo, che ha portato per un tempo indeterminato la disorganizzazione della tipografia adibita alle pubblicazioni del Circolo stesso, il Prof. Guccia, quale Delegato del Circolo al Congresso, gli ha scritto che questa Società trovasi nell'impossibilità di provvedere alla pubblicazione degli Atti. Il Presidente aggiunge che la detta pubblicazione avrà luogo in ogni modo per cura del Comitato organizzatore del Congresso. E pertanto, dopo la chiusura del Congresso, tutti i manoscritti da inserirsi negli Atti dovranno essere inviati al Segretario Generale del Congresso.

* * *

Dovendosi ora designare la sede ed epoca del V Congresso Internazionale dei Matematici, il Presidente dà la parola al Prof. A. R. Forsyth, il quale, ricordando il desiderio già espresso a Heidelberg dal Prof. Greenhill, e favorevolmente accolto da quella Assemblea, che tale Congresso avesse a tenersi in Inghilterra, fa formale proposta ch'esso si tenga a **Cambridge** nel 1912; e ciò a nome della *Cambridge Philosophical Society*, che si incaricherà della preparazione del Congresso. Ciò è pure desiderato dalla *London Mathematical Society* e da molti matematici Inglesi, Scozzesi, Irlandesi. Conclude colle seguenti parole:

« The Cambridge Philosophical Society invites the International Congress of « Mathematicians to hold their fifth meeting in 1912 in Cambridge.

« This invitation is supported by the London Mathematical Society ».

Questa proposta è caldamente appoggiata dal Presidente ed è approvata dall'Assemblea a voti unanimi e con vivi applausi.

Dopo ciò il Prof. Forsyth soggiunge:

« I desire to thank this Congress for the honour they have done to Cambridge « by accepting the invitation of the Cambridge Philosophical Society. The meeting « will be held in the month of August 1912: doubtless you will be willing to allow « the Executive Committee, wich will be formed, to fixe the exact date in that « month. Meanwhile, let me assure you that we shall do everything in our power « to promote the scientific interests of the Congress ».

Il Prof. Mittag-Leffler pronuncia le seguenti parole:

« Dans ma qualité de mathématicien Suédois et de rédacteur en chef des Acta « Mathematica, j'ai l'insigne honneur d'inviter le Congrès International des Mathé« maticiens à se réunir à Stockholm en 1916.

« Mon august Souverain, le Roi Gustave, m'a gracieusement confié la charge « d'exprimer au Congrès qu'Il serait prêt à le prendre sous Son haut patronage dans « le cas que le Congrès se décide à se réunir à Stockholm, et qu'Il le saluerait « avec plaisir le bienvenu dans sa belle capitale.

« Nous autres mathématiciens Suédois nous nous estimerions heureux autant « qu'honorés, si le Congrès voulait accepter notre invitation, et nous ferons tout ce « qui est en notre pouvoir pour rendre le séjour des membres dans notre pays aussi « agréable et aussi instructif que possible ».

Il Presidente dichiara che una deliberazione su di ciò non potrà prenderla che il prossimo (V) Congresso; ma che questa proposta verrà testualmente inserita negli Atti del Congresso attuale, e vivamente raccomandata al Congresso futuro.

Hadamard sottopone al Congresso un suo voto personale.

Convinto dell'utilità del riavvicinamento tra la Matematica e la Fisica, convinto altresì che questo riavvicinamento non sia ancora così intimo come sarebbe desiderabile, emette il voto che in avvenire si convochino possibilmente insieme i Congressi internazionali di Matematica e di Fisica. Con ciò non vuole tuttavia influire sulle deliberazioni già prese.

L'Assemblea si associa a questo voto.

Forsyth avverte che a Cambridge il voto sarà, per quanto possibile, attuato.

Il Presidente, dichiarando chiuso il Congresso, porge a tutti i presenti un caldo saluto. Ringrazia gli intervenuti che col loro valore e col loro numero hanno conferita tanta importanza al Congresso, ed è sicuro che questa riunione scientifica lascierà una profonda traccia nella scienza, e contribuirà a rafforzare la solidarietà e la feconda armonia fra i cultori di essa.

Il Prof. Darboux è sicuro di interpretare il sentimento di tutti i Congressisti rivolgendo i più caldi ringraziamenti a tutte le Autorità e alle persone che hanno contribuito a rendere così importante il Congresso che oggi si chiude. Egli prega il Presidente di ringraziare anzitutto S. M. il Re per la nobile prova di interesse alla Scienza che ha voluto dare intervenendo alla Seduta Inaugurale. La sua gratitudine si rivolge poi a S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione, al Sindaco di Roma e al Rettore dell'Università per le festose accoglienze che hanno voluto fare ai Congressisti. Ringrazia anticipatamente il Sindaco di Tivoli per la cortese ospitalità che si propone di esercitare domani. Ringrazia infine l'illustre Presidente, il Segretario generale, e gli altri componenti l'Ufficio di Presidenza del Congresso per il modo come il Congresso fu organizzato e diretto; nonchè tutti gli impiegati e addetti dell'Ufficio di Segreteria per la loro costante cortesia e sollecitudine.

Con queste parole accolte da unanimi applausi, la seduta è tolta alle ore 16 e 45.

Domenica 12 aprile.

Quest'ultimo giorno era dedicato alla escursione a Tivoli, alla quale, fra Congressisti ed invitati, parteciparono circa 600 persone. Due treni speciali della linea tramviaria Roma-Tivoli trasportarono gli escursionisti alla stazione di Villa Adriana, dove numerose carrozze erano pronte per portarli fin dentro la Villa imperiale. Visitate quelle grandiose rovine, entro la sala dei Filosofi venne offerto un rinfresco dal Municipio di Tivoli, rappresentato dal Sindaco cav. BENEDETTI e dagli Assessori. Ripreso il viaggio col treno fino a Tivoli, ivi nel *Restaurant des Cascades* ebbe luogo il banchetto, al termine del quale furono, in varie lingue, pronunciati diversi brindisi, tutti accolti con calorosi applausi.

Dopo il banchetto, i Congressisti si divisero per visitare Villa Gregoriana colle pittoresche cascatelle, e la magnifica Villa d'Este, della quale l'Arciduca Ferdinando d'Austria aveva cortesemente concesso il libero ingresso.

Con diversi treni speciali ebbe luogo il ritorno a Roma.

V.

PROCESSI VERBALI

DELLE SEDUTE DELLE SEZIONI

---

7 aprile 1908.

Sezione I.

La seduta è aperta alle ore 9 $^1/_4$.

Il Prof. Arzelà, a nome degli Introduttori della Sezione, rivolge agli intervenuti il saluto augurale. Indi, su proposta di lui, la Sezione acclama Presidente per la giornata il Prof. Jordan, e nomina Segretari Amaldi e Galvani.

Vengono quindi presentate e svolte le seguenti Comunicazioni:

1. Gordan, Die Auflösung der allgemeinen Gleichung 6.ten Grades.
2. Zermelo, Ueber die Grundlagen der Arithmetik und Analysis.
3. Borel, Sur les principes de la théorie des ensembles.
4. Riesz, Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre.
5. Frizell, Die Mächtigkeit des Kontinuums.

La seduta è tolta alle ore 11 $^1/_4$.

Sezione II.

Il Prof. Segre, anche a nome del Prof. Bianchi, rivolge un saluto ai Congressisti stranieri; e propone l'invio di un telegramma di augurî al Prof. Reye, ciò che è approvato per acclamazione. La Sezione nomina a Segretario il Prof. De Franchis e a Segretario aggiunto il Dott. Amoroso. Su proposta del Prof. Segre, viene nominato Presidente della seduta odierna, per acclamazione, il Prof. Zeuthen.

Hanno luogo le Comunicazioni seguenti:

1. Andrade, Le théorème d'Ampère-Stockes et le postulatum d'Euclide.
2. Varićak, Beitrag zur nicht-euklidischen analytischen Geometrie.

Si sospende la seduta per 20 minuti. Ripresa la seduta, hanno luogo le Comunicazioni dei signori:

3. ZEUTHEN, Un exemple d'une correspondance sans « Werthigkeit ».
4. MONTESANO, Sui complessi bilineari di coniche nello spazio.

Quest'ultima Comunicazione viene letta dal Prof. MARCOLONGO.

Su proposta del Presidente, si elegge Presidente per la seduta di domani il Prof. DARBOUX.

Sezione III-A.

Alle ore 9 $^1/_2$ l'introduttore Prof. PAOLO PIZZETTI apre la seduta, saluta gli intervenuti, ed invita il Prof. VITO VOLTERRA ad assumere la Presidenza. Sono nominati Segretari i Dott. G. GIANFRANCESCHI e E. E. LEVI.

Vengono svolte le seguenti Comunicazioni:

1. G. H. DARWIN, The rigidity of the Earth.
2. LAMB, The flexure of narrow Beams.
3. LAURICELLA, Sull'equazione $\Delta^{2n} V = 0$ e su alcune estensioni delle equazioni dell'elasticità.

A proposito di quest' ultima Comunicazione aggiunge qualche considerazione il Prof. BOGGIO.

Prendono ancora la parola, per esporre all'Assemblea alcune osservazioni su altro argomento, il Prof. LAURICELLA e il Sig. CASAZZA.

Si stabilisce che la seduta di domani sarà presieduta dal Prof. G. H. DARWIN.

Sezione III-B.

La seduta si apre alle ore 9 $^3/_4$.

Assume la Presidenza l'Ing. GUIDO TOJA, e viene nominato Segretario il Dott. PAOLO MICHEL.

Si procede quindi alla lettura e discussione delle seguenti Comunicazioni:

1. TOJA, Alcune considerazioni sui rapporti tra le Matematiche e la Scienza Attuariale.

   Prende parte alla discussione il Prof. BAGNI.
2. QUIQUET, Sur une nouvelle application des Jacobiens aux probabilités viagères.
3. POUSSIN, Sur l'application du graphicisme aux calculs d'assurances.

   Prende parte alla discussione il Dott. MICHEL.
4. ELDERTON, A comparison of some curves used for graduating.

   Prende parte alla discussione il Dott. CANTELLI.

   Si nomina Presidente per la seduta successiva il Dott. QUIQUET.

Si toglie la seduta alle ore 11 $^1/_2$.

Sezione IV.

Alle ore $9\,^1/_4$ è aperta la seduta dal Prof. Enriques, che dà lettura della sua Comunicazione: Matematica e Filosofia.

Per acclamazione l'Assemblea nomina Presidente per la seduta odierna il Prof. Enriques, Segretario il Prof. Lazzeri e Segretario aggiunto il Prof. Conti.

Vengono poi lette le seguenti Comunicazioni:

1. Hessenberg, Zählen und Anschauung.
2. Boutroux, Sur la relation de l'Algèbre à l'Analyse mathématique.
3. Itelson, Logik und Mathematik.
4. Itelson, Deduction, Induction und Perduction.

A un'osservazione del Prof. Dickstein risponde subito il Prof. Itelson.

Seguono poi altre Comunicazioni:

5. Simon, Ueber das Continuum, den Punkt und die Gerade; historische Bemerkungen.
6. Bernstein, Nachweis dass unter allen Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes der Beweis des An-Nairizi (900 n. Chr.) der axiomatisch einfachste ist.
7. Pastore, Sopra la natura extra-logica delle leggi di tautologia e di assorbimento.

Sul tema stesso parla il Prof. Itelson. Ne segue un'animata discussione tra i Prof.i Pastore e Itelson.

Su proposta del Presidente è approvato per acclamazione che la seduta successiva sia presieduta dal Prof. Loria.

Alle ore $11\,^1/_2$ la seduta è tolta.

8 aprile 1908.

Sezione I.

La seduta è aperta alle ore $9\,^1/_4$ dal Presidente P. Gordan, designato dalla Sezione per la giornata.

Su invito del Presidente vengono successivamente svolte le seguenti Comunicazioni:

1. Koebe, Ueber ein allgemeines Uniformisierungsprinzip.
2. Boutroux, Sur l'inversion des fonctions entières.
3. Petrovich, Une classe remarquable de séries entières.
4. Pincherle, Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti.

Dopo questa Comunicazione, il Presidente sospende la seduta per 15 minuti.

Ripresa la seduta, ha luogo la seguente Comunicazione:

5. Young, On some applications of semi-continuous Functions.

Il Presidente dà quindi la parola al Prof. MARCOLONGO, il quale commemora con affettuose parole la signorina Dott. LAURA PISATI, morta nel fiore degli anni il 30 marzo u. s., mentre si preparava a recare a questo Congresso il suo contributo con la Comunicazione iscritta oggi nell'Ordine del giorno: « Saggio di una teoria sintetica delle funzioni di variabile complessa ».

Infine, su proposta del Prof. GORDAN, viene acclamato a Presidente per la seduta di domani A. R. FORSYTH.

La Seduta è tolta alle ore 11 $^3/_4$.

Sezione II.

Presiede il Prof. DARBOUX.

Hanno luogo le seguenti Comunicazioni:

1. SEVERI, Di alcuni recenti risultati nella geometria algebrica e di qualche problema ad essa collegato.
2. BAGNERA, Sopra le equazioni algebriche $f(x, y, z) = 0$ che si possono risolvere con x, y, z funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di due parametri.

A proposito di questa Comunicazione, prende la parola il Prof. ENRIQUES, rallegrandosi dei risultati ivi accennati.

Si sospende la seduta per 10 minuti.

Ripresa la seduta, vengono lette le Comunicazioni seguenti:

3. DE FRANCHIS, Intorno alle superficie regolari di genere uno che ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti.
4. RADOS, Ueber die Wendeberührungsebenen der Raumkurven.
5. BIANCHI, Sulle trasformazioni di Darboux delle superficie d'area minima.

Sopra questo argomento prende la parola il Prof. DARBOUX, esponendo alcune sue considerazioni ed alcuni suoi risultati.

Vengono eletti, per acclamazione, Presidenti per la seduta di domani i Professori NOETHER e D'OVIDIO.

Sezione III-A.

La seduta è aperta alle ore 9 $^1/_4$; presiede il Prof. DARWIN.

In sostituzione del Dott. E. E. LEVI, che desidera assistere alle sedute della Sezione di Analisi, viene nominato Segretario il Prof. BOGGIO.

Vengono quindi svolte le seguenti Comunicazioni:

1. SOMIGLIANA, Sulle deformazioni elastiche non regolari.

   Discussione: Prof.i MAGGI e VOLTERRA.
2. ABRAHAM, Zur Theorie der Wirbelstrombremsen.

3. Andrade, Sur une nouvelle méthode de mesure des frottements.
4. Korn, Ueber die universellen Schwingungen der Materie mit Anwendungen auf die Theorie der Gravitation und der intramolekularen Kräfte.

Dopo una breve interruzione si riprende la seduta e si svolge l'ultima Comunicazione:

5. Levi-Civita, Sulla espressione asintotica dei potenziali ritardati.

Per la seduta successiva è nominato Presidente il Prof. A. Liapounoff.

Sezione III-b.

Alle ore 9,40 si apre la seduta sotto la presidenza del sig. Quiquet. Viene nominato Segretario aggiunto il Dott. Insolera.

Vengono poi lette le seguenti Comunicazioni:

1. Bohlmann, Ueber die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung.
2. Borel, Sur les applications du Calcul des Probabilités aux sciences biologiques.
3. March, Une nouvelle statistique internationale de la population. Observation sur la comparaison et sur la terminologie des statistiques.
4. De Helguero, Sulla rappresentazione analitica di alcune statistiche.
5. Lembourg, L'actuaire, sa fonction et les deux aspects de celle-ci.
6. Gini, La regolarità dei fenomeni rari.
7. Dawson, Necessary Cautions in Dealing with Actuarial Problems.
8. Castelli, Sull'insegnamento della matematica attuariale e finanziaria nelle scuole professionali inferiori, medie, e superiori.

Il Presidente ringrazia i convenuti ed esprime l'augurio che nei prossimi Congressi questa sezione sia conservata, ed ottenga crescente successo.

La Seduta è tolta alle 11 $^3/_4$.

Sezione IV.

Alle ore 9 il Prof. Loria apre la seduta con un discorso sul tema: « Le tradizioni matematiche dell'Italia ».

Lo stesso Prof. Loria annunzia poi che la Redazione dell'*Enseignement mathématique* ha messo a disposizione dei Congressisti vari esemplari dei N.^{i} 1-2 di questa Rivista (Annata corrente), contenenti un documento importante: la traduzione del Rapporto Klein-Gutzmer, *Sur la préparation des professeurs à l'enseignement scientifique*. Facendosi interprete dei sentimenti unanimi dei convenuti, il Presidente ringrazia la Redazione dell'interessante e cortese omaggio, e augura alla Rivista di proseguire nella sua prospera e feconda vita.

Ha poi luogo la Comunicazione seguente:

1. ZEUTHEN, Sur les rapports entre les anciens et les modernes principes de la Géométrie.

Il Prof. A. KRAZER, riferendosi al voto che già il Congresso di Heidelberg emise per la pubblicazione delle opere di Eulero, chiede alla Sezione l'approvazione di un Ordine del giorno d'appoggio, di plauso e d'augurio all'iniziativa presa dalla Società Svizzera dei Naturalisti per la pubblicazione di tali opere. L'Ordine del giorno, nei termini qui sotto riprodotti, viene accolto dal Presidente, e, su proposta del Prof. PITTARELLI, votato per acclamazione dalla Sezione.

« Il IV Congresso internazionale dei matematici in Roma considera come « questione di massima importanza per le scienze matematiche pure ed applicate la « pubblicazione di tutte le opere di Eulero.

« Il Congresso saluta con riconoscenza l'iniziativa presa in proposito dalla « Società dei Naturalisti Svizzeri, e fa voti che la grande opera sia eseguita dalla « Società stessa colla collaborazione dei matematici delle altre Nazioni.

« Il Congresso prega l'Associazione internazionale delle Accademie, e special« mente le Accademie di Berlino e di Pietroburgo, delle quali Eulero è stato cele« berrimo membro, di aiutare l'impresa di cui è parola ».

Questo Ordine del giorno sarà sottoposto al Congresso a Sezioni riunite in una delle prossime adunanze.

Il Prof. AMODEO prende occasione del voto emesso per la pubblicazione delle opere d'Eulero per proporre che il Congresso faccia voto che l'Italia sciolga un pegno, che essa ha verso uno dei suoi figli che più grandemente l'onorarono, col pubblicare in un avvenire più o meno prossimo le Opere di Bonaventura Cavalieri.

L'Assemblea approva la proposta.

Seguono le Comunicazioni:

2. SMITH (D. E.), The Ganita-Sāra-Saṅgraha of Mahāvīrācārya.
3. DUHEM, Sur la découverte de la loi de la chute des graves (letta dal Prof. PEANO in sostituzione del sig. DUHEM, assente).
4. GIACOMELLI, I risultati di alcune ricerche sull'opera meccanica di Galileo.
5. PITTARELLI, Luca Pacioli usurpò per sè stesso qualche libro di Piero de' Franceschi?

Prendono parte alla discussione: FOÀ, FRATTINI, SMITH.

Il Prof. G. DE GALDEANO ha fatto omaggio di varie sue pubblicazioni. Il Presidente a nome della Sezione ringrazia.

In seguito a proposta del Prof. LORIA è approvato per acclamazione che la seduta di domani sia presieduta dal Prof. VAILATI.

Alle ore 11 $^3/_4$ la seduta è tolta.

9 aprile 1908.

Sezione I.

La seduta è aperta alle ore 9 1/4 sotto la presidenza del Prof. A. R. FORSYTH, il quale dà successivamente la parola ai Professori seguenti:

1. HADAMARD, Sur l'application d'une méthode de Calcul des Variations.
2. SCHLESINGER, Sur quelques problèmes paramétriques de la théorie des équations différentielles linéaires.

A proposito della precedente Comunicazione prende la parola il Sig. HADAMARD.

SCHLESINGER fa omaggio al Congresso delle sue *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* (Leipzig 1908); di che il Presidente lo ringrazia.

3. RÉMOUNDOS, Sur les zéros des intégrales d'une classe d'équations différentielles.

Il Prof. HADAMARD aggiunge su ciò qualche osservazione.

4. PICK, Ueber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion.
5. SALTYKOW, Sur l'existence des intégrales complètes de S. Lie et le perfectionnement de la méthode de Jacobi dans la théorie des équations partielles.
6. LALESCO, Sur les solutions analytiques de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$.
7. VOLTERRA, Sopra il metodo delle immagini nelle equazioni del tipo iperbolico.

Sull'argomento ha luogo una discussione fra HADAMARD e VOLTERRA.

8. ZERVOS, Sur la correspondance entre les théories d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et d'intégration des systèmes de Monge.

Su proposta del Presidente, l'Assemblea acclama come Presidente per la seduta di domani il Prof. MITTAG-LEFFLER.

La seduta è tolta a mezzodì.

Sezione II.

Alle ore 9,10 il Presidente Prof. D'OVIDIO apre la seduta dando la parola al Prof. PANNELLI, che legge la seguente Comunicazione:

1. PANNELLI, Sopra un carattere delle varietà algebriche a tre dimensioni.

Segue la Comunicazione:

2. DINGELDEY, Zur Erzeugung der Kegelschnitte nach Braikenridge und Maclaurin.

Assume poi la presidenza il Prof. NOETHER. Si legge la Comunicazione:

3. FINSTERBUSCH, Ueber Erweiterung eines Schliessungsproblems von J. Steiner und ihre Beziehung zur Gauss'schen Theorie zentrierter Lynsensysteme.

Si sospende la seduta per 10 minuti.

Ripresa la seduta, hanno luogo le Comunicazioni:

4. Gallucci, Su la configurazione armonica.
5. Bruckner, Bemerkungen zur Morphologie der aussergewöhnlichen Polyeder erläutert durch die Sechsflache.
6. Brouwer, Die Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie.

Per acclamazione viene eletto Presidente per la seduta di domani il Prof. Schur.

Sezione III-a.

Il Prof. A. Liapounoff apre la seduta alle 9 $^1/_4$. Dà la parola al Prof. Garbasso che svolge la sua Comunicazione:

1. Garbasso, Sullo spettro normale di una vibrazione smorzata.
   Su questa Comunicazione prende la parola il Prof. Greenhill.
   Segue la Comunicazione:
2. Greenhill, Geometry of Motion of a spinning Top.

La Comunicazione del Prof. Sommerfeld, che segue nell'ordine del giorno, è riassunta dal Prof. Levi-Civita.

Seguono poi le altre Comunicazioni:

3. Boggio, Sopra alcuni teoremi di Fisica Matematica.
4. Boccardi, Sur une nouvelle équation dans les observations des passages.
   Su questa Comunicazione prende la parola il Prof. Pizzetti.
5. Andrade, La synchronisation par le fer doux.

Per la seduta di domani è nominato Presidente il Prof. A. Wangerin.

La seduta è tolta alle 11 $^1/_2$.

Sezione III-b.

Alle ore 10 si apre la seduta.

Il Prof. Luiggi, introduttore, rivolge un saluto ai Congressisti italiani e stranieri; e la Sezione nomina quindi, su di lui proposta, a Presidente il Prof. D'Ocagne, e a Segretario l'Ing. Parvopassu.

Su invito del Presidente vengono successivamente svolte le seguenti Comunicazioni:

1. Luiggi, Considérations sur les rapports entre les sciences mathématiques et l'art de bâtir.
2. Canevazzi, La matematica e l'arte del costruttore in Italia.
3. Ocagne (D'), La technique du calcul dans la science de l'ingénieur.
4. Ocagne (D'), Sur la rectification approchée des arcs de cercle.

5. Claxton-Fidler, On the Applications of Mathematics to the Theory of Construction.
6. Swain, The teaching and use of Mathematics in the civil Engineering profession.

Prendono parte alla discussione intorno alle dette Comunicazioni i Professori M. R. Mehmke, Pittarelli, C. Runge, Canevazzi, Luiggi.

Il Presidente ringrazia i convenuti ed esprime l'augurio che nei Congressi venturi la Sezione Ingegneria si affermi con ognor crescente sviluppo.

La seduta è tolta alle ore 11 $^{3}/_{4}$.

Sezione IV.

Presiede il Prof. Vailati, che prega il Prof. Fehr di coadiuvarlo nella presidenza.

Il Prof. Gutzmer presenta come omaggio al Congresso il volume: *Die Thätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte* (Leipzig, 1908); di che il Presidente lo ringrazia. Egli riferisce poi sul tema:

1. Gutzmer, Ueber die Reformbestrebungen auf dem Gebiet des mathematischen Unterrichts in Deutschland.

Prendono parte alla discussione Simon e Suppantschitsch. Ha poi luogo la Comunicazione:

2. Borel, Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en France.

Tale Comunicazione dà luogo ad un'animata discussione, a cui prendono parte Niewenglowski, Borel, Peano, Marotte, Pittarelli, Zeuthen, Enriques.

In assenza dell'autore, il Prof. Vailati dà lettura, riassumendola in parte, della Comunicazione:

3. Godfrey, The teaching of Mathematics in English public Schools for boys.

Prende parte alla discussione Gibson, riferendo sull'insegnamento nelle scuole scozzesi.

Seguono le Comunicazioni:

4. Smith (D. T.), The teaching of secondary Mathematics in the United States.
5. Suppantschitsch, L'application des idées modernes à l'enseignement secondaire des Mathématiques en Autriche.

Il Prof. Archenhold, in appoggio a un'idea già espressa dal Prof. Smith nella sua Comunicazione, propone che sia istituito un Comitato permanente per lo studio delle questioni riguardanti l'insegnamento della Matematica nelle scuole secondarie. La proposta è accolta favorevolmente dalla Sezione.

Seguono le Comunicazioni:

6. Beke, Ueber den mathematischen Unterricht in Ungarn.
7. Vailati, Su alcuni caratteri degli attuali programmi per l'insegnamento della Matematica nelle scuole secondarie.

Per la seduta di domani, su proposta VAILATI, la Sezione acclama a Presidente il Prof. ZEUTHEN.

Alle ore 12 la seduta è tolta.

10 aprile 1908.

Sezione I.

La Seduta è aperta alle 9 $^1/_4$ sotto la presidenza del Prof. PASCAL, che sostituisce il Prof. MITTAG-LEFFLER assente.

Su invito del Presidente vengono successivamente svolte le seguenti Comunicazioni:

1. MOORE (E. H.), On a form of general Analysis, with application to differential and integral Equations.

   A questa Comunicazione aggiunge qualche considerazione il Prof. PINCHERLE.
2. FREDHOLM, Les intégrales de FOURIER et la théorie des équations intégrales linéaires.
3. ADHÉMAR (D'), Sur les équations intégrales de MM. Fredholm et Volterra.

   Sull'argomento fanno qualche osservazione VOLTERRA e HADAMARD.
4. ORLANDO, Sulla risoluzione delle equazioni integrali.

Sull'argomento delle tre ultime Comunicazioni prendono la parola MOORE, D'ADHÉMAR e LAURICELLA.

La Comunicazione del sig. DE DONDER non ha luogo, perchè egli è assente; ha però fatto omaggio al Congresso di una copia del suo lavoro, che verrà inserito negli Atti.

5. PASCAL, Sulla nuova teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque.
6. STÉPHANOS, Sur une extension de la théorie des covariants et invariants des formes binaires.

   Discutono sull'argomento PICK, PERRIN.

Per le successive due Comunicazioni, la Presidenza, su proposta del Prof. PASCAL, è affidata al Prof. STÉPHANOS.

7. MONTESSUS, Sur les relations de récurrence à trois termes.

   Sull'argomento parlano PINCHERLE e D'ADHÉMAR.
8. PUCCIANO, Contributo alla critica di alcune questioni che si riattaccano all'equazione differenziale di Laplace.

Su proposta del Presidente l'Assemblea acclama Presidente per la seduta di domani il Prof. MOORE (E. H.).

La seduta è tolta alle ore 12,35.

Sezione II.

La seduta si apre alle ore 10. Presiede il Prof. SCHUR.

Il Prof. SEGRE legge un telegramma di ringraziamento del Prof. REYE per gli augurî rivoltigli; dopo di che il Presidente dà la parola al sig. TZITZEIKA che legge la seguente Comunicazione:

1. TZITZEIKA, Sur une nouvelle classe de surfaces.

Segue la Comunicazione:

2. PFEIFFER, Du développement des fonctions algébriques de deux variables indépendantes en séries entières des variables indépendantes.

L'adunanza, ultima della Sezione, è tolta alle ore 11.

Sezione III-A.

Presiede il Prof. A. WANGERIN.

Ha luogo la Comunicazione:

1. GENESE, The Method of Reciprocal Polars applied to Forces in Space.

Il Prof. MACFARLANE, assente, ha inviata la sua Memoria per mezzo del Prof. GENESE, che la presenta.

Dopo una breve interruzione si riprende la seduta con la Comunicazione:

2. TEDONE, Sopra il problema di Lamè.
Su questo tema prende la parola il Presidente Prof. WANGERIN.

Segue la Comunicazione:

3. BRYAN, Notes on the steering of Automobiles and on the balancing of Ships.

Dopo la quale il Prof. BRYAN medesimo riassume la Comunicazione:

4. POYNTING and BARLOW, The momentum of a Beam of Light.

È nominato Presidente per la seduta di domani il Prof. HADAMARD.

Alle 9 pom., nella sala della Società degli Ingegneri e Architetti gentilmente concessa, sotto la presidenza del Prof. LUIGGI, ebbe luogo la Conferenza, illustrata da una serie interessante di proiezioni luminose:

STÖRMER, Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans le champ d'un aimant élémentaire, avec application aux aurores boréales.

Sezione IV.

Presiede il Prof. Zeuthen.

Ha la parola il Prof. Marcolongo, il quale svolge la sua Comunicazione:

1. Marcolongo, Di un trattato di Meccanica inedito anteriore alla Mécanique analytique di Lagrange.

Il Prof. Loria presenta al Congresso il primo esemplare del 4° volume delle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* di Moritz Cantor; e propone di inviare al Prof. Cantor un telegramma di ringraziamento, di plauso e di augurio. La proposta del Prof. Loria è appoggiata dal Presidente e approvata per acclamazione dall'Assemblea.

Seguono le Comunicazioni:

2. Fehr, Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en Suisse.
3. Stéphanos, Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en Grèce.
4. Archenhold, Ueber die Bedeutung des mathematischen Unterrichtes im Freien in Verbindung mit Reformvorschlägen für den Lehrgang.

Prendono parte alla discussione Gubler, Zeuthen.

Viene sospesa la seduta per 10 minuti.

Seguono le Comunicazioni:

5. Andrade, Quelques observations psycologiques recueillies dans les enseignements scientifiques d'initiation.
6. Conti, Sulla iniziazione alle matematiche e sulla preparazione matematica dei maestri elementari in Italia.

Prendono parte alla discussione i Prof.i Frattini e Piazza, i quali propongono che il Prof. Conti prepari per la seduta di domani un Ordine del giorno da sottoporre alla Sezione.

7. De Galdeano, Quelques mots sur l'enseignement mathématique en Espagne.

Il seguito dell'Ordine del giorno è rinviato a domani.

Su proposta del Presidente, l'Assemblea acclama Presidenti per la seduta di domani Picard e Simon.

Alle ore 12 la seduta è tolta.

11 aprile 1908.

Sezione I.

La seduta è aperta alle ore 9 $^1/_4$ sotto la presidenza del Prof. Moore, il quale dà successivamente la parola ai signori:

1. Capelli, Sopra i coefficienti degli sviluppi delle funzioni algebriche.

Sull'argomento prende la parola il Prof. Pincherle.

2. Nicoletti, Riduzione a forma canonica di un fascio di forme bilineari o quadratiche.
3. Fubini, Sulla teoria dei gruppi discontinui.

Il Presidente dà lettura della Comunicazione seguente:

4. Dickson, On the last theorem of Fermat.

Seguono poi:

5. Levi (B.), Sopra la equazione indeterminata del 3° grado.

Il Prof. Moore cede la presidenza al Prof. Capelli. Vengono lette le seguenti Comunicazioni:

6. Frattini, La nozione d'indice e l'analisi indeterminata dei polinomi interi.
7. Severini, Sulle successioni infinite di funzioni analitiche.
8. Zaremba, Sur le principe de Dirichlet.
9. Boggio, Sulla risoluzione di una classe di equazioni algebriche che si presentano nella matematica finanziaria ed attuariale.

Il Presidente comunica e presenta il seguente lavoro:

10. Autonne, Sur les fonctions homogènes d'une variable hypercomplexe.

Esaurito così l'Ordine del giorno, il Presidente, nel dichiarare chiusi i lavori di questa Sezione, rileva con grande compiacimento la copia, l'elevatezza e l'importanza delle Comunicazioni svolte.

Sezione III-a.

Presiede il Prof. Hadamard.

Si svolgono le seguenti Comunicazioni:

1. Kolosoff, Sur le problème plan dans la théorie d'élasticité.

Su questo argomento prendono la parola i Prof.i Runge, Boggio, Volterra e Hadamard, il quale ultimo a questo proposito svolge due piccole Note.

2. Marcolongo, Per l'unificazione delle notazioni vettoriali.

Su questo argomento discutono Hadamard, Peano, Volterra, Maggi, Levy, Molk, Genese. In particolare, il Presidente Hadamard porge al Prof. Marcolongo sentiti ringraziamenti per l'opera da lui prestata in argomento.

Dopo tale discussione, su proposta del Presidente, la Sezione decide di presentare al Congresso il voto che sia nominata una Commissione internazionale per la unificazione delle notazioni vettoriali.

3. Pizzetti, Sulla riduzione delle latitudini e delle longitudini al livello del mare.
4. Casazza, Nuove deduzioni dalla teoria della Composizione dei moti.
5. Beljankin, Exemple d'une force centrale telle qu'un point matériel peut décrire une courbe du 2me ordre.

Alle ore 11 3/4 si toglie la seduta ed insieme si chiude la Sezione.

Sezione IV.

Presidenti: PICARD e SIMON.

Alle ore 9 il Prof. PICARD apre la seduta, dando comunicazione di un telegramma di ringraziamento pervenuto dal Prof. CANTOR.

Seguono le Comunicazioni di:

1. GALLUCCI, La questione logica e gnoseologica nei fondamenti della matematica.
2. BROGGI, Sui fondamenti del calcolo delle probabilità.
3. EMCH, Der Rechenkünstler Winkler und seine Methoden.
4. LORIA, Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques.

Prende parte alla discussione il Prof. GUBLER.

5. AMODEO, Appunti su Biagio Pelacani.
6. PITTARELLI, Due lettere inedite di Lagrange all'Abate di Caluso esistenti nell'Archivio storico municipale di Asti.
7. AMODEO, Sulla necessità di formare un Archivio delle scienze matematiche.

Prende parte alla discussione il Prof. CONTI, il quale, riferendosi all'Ordine del giorno col quale ha concluso il Prof. AMODEO, sostiene che sia più opportuno che il Congresso affermi semplicemente la convenienza, in massima, di creare un Archivio delle scienze matematiche, senza entrare affatto nei particolari. Il Prof. AMODEO accetta la modificazione, e il Congresso approva la proposta del Prof. AMODEO emendata nel senso proposto dal Prof. CONTI.

È sospesa la seduta per 10 minuti.

Ripresa la seduta, il Prof. CONTI dichiara che non ha preparato l'Ordine del giorno pel quale avevano fatto proposte nella seduta di ieri i Prof.i FRATTINI e PIAZZA, sembrandogli che per questo Congresso sia sufficiente l'avervi portata la questione, e il passaggio agli Atti della sua Comunicazione. L'Assemblea consente nel parere del Prof. CONTI, e passa all'Ordine del giorno.

Segue la Comunicazione di:

8. DE AMICIS, L'equivalenza in planimetria indipendentemente dalle proporzioni e dal circolo.

Prende parte alla discussione il Prof. GREMIGNI.

9. BROUWER, Die möglichen Mächtigkeiten.
10. DELITALA, La tetragonometria piana nelle scuole secondarie.

Esaurito così l'Ordine del giorno, e nessun altro domandando la parola, il Presidente, con un saluto ed un ringraziamento ricambiati dal Prof. PITTARELLI, dichiara chiusi i lavori della Sezione.

Viene riaperta la seduta dal Prof. ENRIQUES, per domandare all'Assemblea se intenda discutere sulla costituzione del Comitato internazionale per lo studio delle riforme riguardanti l'insegnamento della matematica nelle Scuole secondarie. L'Assemblea consentendo, ha luogo un'animata discussione, a cui prendono parte i Professori Bonola, Smith, Conti, Archenhold, Castelnuovo, Stéphanos, Fehr. Viene approvato infine l'Ordine del giorno seguente presentato dal Prof. Castelnuovo:

« La Sezione IV, avendo riconosciuto l'importanza di un esame comparato « dei programmi e dei metodi dell'insegnamento delle matematiche nelle Scuole se- « condarie delle varie Nazioni, confida ai Prof.i Klein, Greenhill e Fehr l'incarico « di costituire un Comitato internazionale che studii la questione e ne riferisca al « prossimo Congresso.

« La Sezione su tale proposta domanda l'appoggio dell'Assemblea generale ».

Alle ore 12 $^1/_2$ i lavori della Sezione IV sono definitivamente chiusi.

PARTE II

DISCORSI, CONFERENZE, RELAZIONI

LETTE NELLE SEDUTE GENERALI

V. VOLTERRA

LE MATEMATICHE IN ITALIA

NELLA SECONDA METÀ DEL SECOLO XIX

Nel novembre dell'anno 1860 un giovane trentenne saliva per primo la cattedra di geometria superiore nell'antica Università di Bologna.

Era l'anno medesimo in cui tante memorabili imprese ricostituivano la nazione e tanti inaspettati avvenimenti rinnovavano tutta la vita italiana. Ma l'eco degli strepiti della guerra ed il clamore che suscitava il costituirsi del nuovo regno non coprivano la voce di LUIGI CREMONA, il quale dalla cattedra bolognese esponeva il largo programma, che egli stesso e la scuola che prese il nome da lui dovevano svolgere e svolsero, e le nobili parole pronunziate nella sua prolusione volarono e si ripercossero per tutta Italia.

È con un sentimento di soddisfazione che oggi, trascorso un mezzo secolo, misurando il cammino percorso, possono rievocarsi gli alti eccitamenti che il CREMONA allora rivolgeva ai giovani scienziati italiani. All'appello del nuovo professore rispondevano i sentimenti ed i voti universali in Italia; liete speranze arridevano negli animi nei quali il compiacimento per la Patria novellamente e faticosamente conquistata si associava alla aspirazione verso i più elevati ideali scientifici (1).

Il BETTI aveva inaugurato in Pisa, pochi mesi prima, con eguali propositi, il suo insegnamento di alta analisi e geometria. A Pavia, quasi contemporaneamente, il BRIOSCHI iniziava il corso di analisi superiore e lo stesso insegnamento a Napoli EMANUELE FERGOLA incominciava pure in quell'anno, mentre il BATTAGLINI dava principio alle sue nuove lezioni di geometria superiore.

L'Italia ebbe allora chiara coscienza che un'alta missione intellettuale le spettava per le sue antiche tradizioni e per il posto che nuovamente veniva ad occupare nel mondo civile.

Il MATTEUCCI, fisico di grande ingegno, che consacrò i suoi ultimi anni alla organizzazione degli studi italiani, negli albori del nuovo regno, preparando gli ordina-

(1) Prolusione al corso di geometria superiore letta nell'Università di Bologna nel novembre 1860 da LUIGI CREMONA (Il Politecnico, 1861).

menti scolastici, diceva al Parlamento che una nazione la quale vuol essere libera e grande non vive soltanto di soldati e di strade ferrate, e che male si intenderebbe l'Italia risorta a nazione se, nelle arti, nelle lettere e nelle scienze, non ripigliasse quel posto che l'aveva distinta altre volte.

E QUINTINO SELLA, che forse meglio di ogni altro raccolse nella sua grande anima i sentimenti della parte più eletta della nazione, e meglio comprese quali gravi doveri morali incombessero all'Italia il giorno in cui compì la sua grande opera politica prendendo possesso della città eterna, al MOMMSEN, che gli diceva che a Roma non si sta senza avere propositi cosmopoliti, rispondeva: « Sì, un proposito cosmopolita non possiamo non averlo a Roma: quello della scienza »; e solennemente dinanzi al Parlamento affermava: « L'Italia ha un debito d'onore verso l'umanità... la scienza per noi a Roma è un dovere supremo ».

Nessuna meraviglia dunque se, nel seguire lo svolgimento delle scienze, si osserva una trasformazione improvvisa nel pensiero italiano, dovuta al rapido suo progredire e diffondersi, ed ai nuovi caratteri di cui si riveste e si arricchisce negli anni che seguono il periodo del risorgimento politico.

Presentare nei brevi termini che mi sono concessi lo sviluppo delle matematiche in Italia negli ultimi anni, ecco il còmpito che mi sono oggi prefisso.

Di vari elementi bisogna tener conto per ben comprendere quali furono i fattori che contribuirono al recente sviluppo degli studi presso di noi e per ben sceverare la parte che ciascuno di essi ha avuta.

Dobbiamo dapprima aver riguardo ai caratteri propri del genio italiano rivelatisi in una lunga e non interrotta tradizione che, movendo dalle scuole dell'antichità, giunge fino al nostro secolo; esaminare poi l'effetto prodotto dai nuovi metodi di insegnare e di apprendere, e la proficua emulazione che sortì dal cozzare delle opposte tendenze. Infine è d'uopo vedere l'influenza che le scoperte dei matematici stranieri ebbero su di noi, l'azione che esercitò il carattere sempre più universale acquistato dalla scienza e la feconda virtù dei rapporti internazionali ognor più stretti e delle correnti sempre più vive di pensiero che si stabilirono.

***

Con una di quelle frasi scultorie proprie del suo stile concettoso il BELTRAMI così giudica un libro del CESÀRO: « Al libro spetta davvero il requisito dell'italianità, vale a dire di quel *quid* che risulta dal connubio della serietà coll'agilità della parola e del pensiero, cioè dell'elaborazione artistica del materiale scientifico » (1).

Nessuna parola più efficacemente ed in modo più sobrio e preciso potrebbe caratterizzare la produzione matematica italiana non solo recente ma di tutti i tempi.

Il sentimento artistico, inteso nel suo significato più alto e comprensivo, ha avuto ed ha una gran parte nelle scoperte geometriche. Si comprende quindi come la matematica, la scienza che non solo è la più pura e la più ideale, ma è la più schiet-

(1) Queste parole sono tolte da una lettera che il BELTRAMI scrisse al CESÀRO. Esse vennero riportate nella biografia del CESÀRO che il prof. ALFREDO PERNA pubblicò nel vol. XLV del Giornale di matematiche di BATTAGLINI diretto dal prof. A. CAPELLI (Napoli, 1907).

amente artistica delle scienze, abbia potuto trovare, sino dalle epoche lontane, un erreno favorevole per svilupparsi in Italia, ove il genio artistico è innato nelle genti, ı ben si comprende il carattere dell'opera matematica prodotta dagli ingegni itaiani, carattere che si ravviserà nelle varie scuole e nelle diverse tendenze che avremo ›ccasione di esaminare.

Uscirei dai limiti che mi sono prescritto se io volessi seguire la tradizione in ıutto il suo lungo cammino, dall'epoca classica, attraverso il medio evo, il rinascinento, fino ad ora, o se anche solo mi soffermassi alla prima metà del secolo scorso, a quale segna forse il periodo più triste e più oscuro. Triste ed oscuro periodo, nel ıuale le discordie intestine quasi si rispecchiano nelle intransigenze e nelle intolle-'anze scientifiche.

È nota, per quanto ne ha scritto il Loria, la storia della scuola matematica ›he imperò a Napoli al principio del secolo XIX. In essa, uomini che pure erano li ingegno, avversarono le grandi scoperte di Lagrange e quanto era moderno e ıuovo nella scienza, stimando opera meritoria il ricondurla indietro di parecchi se-›oli. È stato molte volte ripetuto che al Battaglini, prima del 1860, non venne ıffidato nessun pubblico insegnamento; in un concorso egli era rimasto soccombente ɘ la ragione fu che nella trattazione del tema si era inspirato alle nuove e feconde idee del Salmon, anzichè agli antichi metodi di Newton.

Si racconta poi, e mi permetto di ripeterlo come un indice dei tempi, che in Toscana verso il 1835 un cultore di diritto ecclesiastico (studioso anche di lingue orientali) ed un algebrista chiesero le rispettive cattedre dell'Università. Nell'assegnarle vennero per errore scambiate; il matematico fu nominato professore di gius canonico e il giurista ebbe l'algebra. Le proteste degli interessati a nulla valsero perchè i « motupropri » di nomina erano ormai firmati e non si volle mutarli. Il matematico rinunziò, ma il giureconsulto orientalista insegnò algebra, ripetendo a memoria il Francoeur, per tutta la vita.

Nondimeno sarebbe cosa ingiusta il tacere che in questo intervallo di tempo luminosi sprazzi di luce di tratto in tratto si manifestarono in Italia; nomi illustri ed opere ben conosciute lo attestano. Il mio collega prof. Cerruti, nella passata riunione della Società italiana per il progresso delle scienze, ha lumeggiato con rara maestria questo periodo ed ha illustrato alcune importanti ricerche che vi si compirono od iniziarono [1].

Ciò che mancava in quel primo cinquantennio il Cremona lo nota con sagacia e lo enuncia con rude franchezza nella sua celebre prolusione. I retrivi ordinamenti delle nostre scuole ed il piccol numero delle cattedre impedivano che si allargasse il campo della istruzione universitaria e che si atterrassero le colonne d'Ercole dei programmi ufficiali. I nobili sforzi di uomini egregi riescivano il più sovente infruttuosi perchè mancanti di ogni connessione fra loro e perchè avversati spesso dai Governi del tempo, pei quali l'ignoranza pubblica era valido sostegno al potere.

[1] *Le matematiche pure e miste nei primi dodici Congressi della Società italiana per il progresso delle scienze,* per il prof. V. Cerruti (Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze - Congresso di Parma, settembre 1907).

Fu primo e luminoso pensiero del Governo nazionale la istituzione delle cattedre speciali di insegnamento superiore delle matematiche, cattedre che affidò agli uomini illustri di cui facemmo i nomi, ai quali, man mano, altri non meno illustri seguirono. Così d'un tratto un nuovo ambiente si formò ed un'era nuova ebbe principio.

I professori, nel pieno vigore della loro produzione intellettuale e del loro entusiasmo per la ricerca scientifica, erano chiamati ad insegnare ciò che essi medesimi giorno per giorno studiavano e scoprivano; gli allievi dovevano assistere alla creazione della scienza con tutte le sue lotte, le sue difficoltà, i suoi pentimenti, le sue crisi, le sue dolci vittorie, e dovevano essi stessi, alla loro volta, lavorare accanto ed insieme agli uomini di genio che li avevano iniziati.

Le scuole che in tal modo si formarono e che valsero, per la connessione degli sforzi e per la continuità degli intenti, non solo a far risplendere gli ingegni meglio dotati, ma anche a rendere proficua l'opera di menti meno elevate, possono facilmente riconoscersi; è poi agevole in esse scoprire e seguire l'origine e la filiazione dei vari e più importanti pensieri.

***

Enrico Betti a Pisa ed Eugenio Beltrami, prima a Pavia e poi a Roma, furono per circa un trentennio i due campioni della fisica matematica in Italia.

Di ingegno e di coltura diversa (già maestro il primo nelle teorie algebriche e scopritore originale l'altro nel campo geometrico, prima ancora che si consacrassero alle applicazioni dell'analisi ai problemi fisici), salirono in alta fama anche in questo ramo di studi, del quale svolsero, nella loro lunga carriera, quasi tutte le parti più astratte e teoriche, lasciandovi l'impronta del loro genio.

Le ricerche che il Betti, parallelamente con i suoi corsi, sviluppò sul potenziale, sulla elasticità e sul calore non possono considerarsi staccate le une dalle altre, giacchè un unico pensiero le guida, pensiero che passò da lui a quelli che lo seguirono, e, man mano, andò affinandosi e completandosi sino a raggiungere gli ultimi e più perfetti risultati.

I concetti ed i metodi fondamentali di Green e di Gauss avevano aperto la via maestra per la integrazione generale della equazione di Laplace, base della teoria del potenziale; scopo del Betti fu di trasportare gli stessi metodi, prima nel campo della scienza dell'equilibrio elastico, poi in quella del calore.

Coi lavori del Betti, come ben mostrò il Marcolongo in un suo succoso riassunto storico [1], si inaugura una nuova e lunga serie di ricerche schiettamente italiane sulla integrazione delle equazioni dell'elasticità, tanto che può dirsi che, se Galileo per il primo adombrò i problemi dell'equilibrio dei corpi elastici, fu merito dei geometri italiani, a più di due secoli di distanza, di aver largamente contribuito a svolgere la teoria generale di quelle equazioni nelle quali Navier aveva rappresentato e, per dir così, racchiuso tutto il meccanismo del fenomeno.

[1] *Progressi e sviluppo della teoria matematica della elasticità in Italia* (*1870-1907*), del prof. Roberto Marcolongo (Nuovo Cimento, s. V, t. XIX).

Al brillante esordire del BETTI nella questione col teorema di reciprocità e colle sue larghe e fondamentali applicazioni, le quali gettano le basi di tutto il metodo, seguono a breve intervallo le ricerche del CERRUTI e la scoperta delle formule del SOMIGLIANA.

Il MARCOLONGO, il TEDONE ed altri svolgono numerose questioni ed intanto si iniziano parallelamente a questi studi, mercè le ricerche di ALMANSI, LAURICELLA, LEVI-CIVITA, BOGGIO, quelli sulla doppia equazione di LAPLACE.

Infine si distaccano e si differenziano, per la irriduttibile ed essenziale diversità della questione rivelata dalle qualità delle caratteristiche, i problemi generali di vibrazione da quelli di equilibrio ed assurgono anche questi ad una trattazione sistematica.

Di diversa natura furono le ricerche del BELTRAMI anche in quello stesso campo nel quale il BETTI aveva mietuto così largamente e con tanto frutto.

Per ben seguire il filo ininterrotto di idee che guidò il BELTRAMI in tutta la sua carriera scientifica, bisogna risalire alle prime ricerche di lui che si riferiscono alla teoria delle superficie, alla loro rappresentazione, e si svolsero intorno ai parametri differenziali ed alle variabili complesse; ricerche tra cui brillano, per importanza e per originalità, le Memorie relative alla geometria non euclidea, colle quali il BELTRAMI mirò a dare un substrato reale alle idee di GAUSS e di LOBATSCHEWSKI e quelle celebri Memorie che commentarono e interpretarono le teorie di RIEMANN sugli spazi curvi.

Queste dottrine sullo spazio destarono nuove curiosità negli uomini di scienza e furono l'origine di un nuovo indirizzo di pensiero. È egli possibile accertare, ed in in qual modo, se lo spazio abbia o no una curvatura?

L'idea di ricorrere all'esame dei fenomeni naturali che potessero rivelarla venne spontanea. Il BELTRAMI può ascriversi fra coloro che concepirono il disegno di stabilire in maniera sistematica una teoria dei fenomeni fisici nella ipotesi di una curvatura dello spazio, e ciò spiega la transizione di questo grande matematico dal terreno delle ricerche analitico-geometriche in quello della fisico-matematica, giacchè la evoluzione del suo genio resta dominata da questo alto pensiero.

Ma un lungo periodo di preparazione e di orientamento precede in lui la esplicazione del pensiero stesso, ed a questo periodo si deve una larga produzione di lavori che si riattaccano a ricerche classiche sopra vari campi della meccanica e della fisica. Ciascuno di essi porta per sè un contributo scientifico e rifulge per la squisita fattura e per la limpida trattazione, talchè la loro importanza si manifesta grandissima, non solo per il contenuto, ma anche perchè s'imposero come modello di eleganza ai geometri italiani. Fu detto che la robusta prosa del CARDUCCI insegnò l'arte di esprimere i propri pensieri a tutta una generazione di scrittori. Io mi domando se in modo analogo gli scritti del BELTRAMI non valsero a foggiare ciò che chiamerei lo stile matematico della nuova generazione in Italia, la quale si inspirò alla sua arte finissima di svolgere pensieri e calcoli e di fondere mirabilmente gli uni con gli altri.

Con ciò che ho detto fin qui, ed anche se aggiungessi quanto fecero ERNESTO PADOVA, il CESÀRO e gli altri che, seguendo le orme del BELTRAMI, si occuparono di analoghi problemi, non avrei dato che una idea ben incompleta dei lavori italiani nel campo fisico-matematico.

Le ricerche di meccanica, in cui fra gli altri SIACCI e MORERA rivolsero i loro studi ai metodi di JACOBI, di LIE e di MAYER, le applicazioni delle teorie dei gruppi di trasformazione al potenziale, dei quali si occupò il LEVI-CIVITA, i lavori sulla meccanica celeste, sulla dinamica dei sistemi ed in particolare dei fluidi, e sulla statica, in cui spiccano, oltre i nomi già ricordati, quelli del CHELINI e del TURAZZA e più recentemente del PADELLETTI e del MAGGI, e tanti altri studi sarebbe eziandio necessario analizzare per potere indicare e raccogliere, se non coordinare, il lavoro dell'ultimo cinquantennio in questo ramo delle matematiche. Nè con ciò sarebbe esaurito quanto converrebbe esporre, chè le ricerche fisico-matematiche dalla regione più astratta ed analitica di grado in grado si prolungano quasi con continuità fino a quella della fisica. Io non estenderò la mia analisi a questo intero campo, ma non mi è possibile lasciare senza ricordo le scoperte di GALILEO FERRARIS, la cui sorgente va cercata nella più pura concezione geometrica, e che nondimeno ebbero tanta importanza nella pratica e dettero origine ad una fiorente scuola di studi elettrotecnici, nella quale divenne nobile tradizione il fondarsi sopra solide e sicure basi matematiche.

***

Ebbi già occasione, in uno dei passati congressi, di parlare del BRIOSCHI, del BETTI e del CASORATI e di porre in luce il modo diverso col quale ognuno di essi concepì la teoria delle funzioni analitiche [1]. I loro metodi si collegano alle tre grandi fasi che, nella sua maestosa evoluzione, questa dottrina, vera dominatrice delle matematiche del secolo XIX, attraversò. Il rivolgersi di ciascuno di questi grandi maestri verso uno degli aspetti col quale la teoria delle funzioni si è presentata, fu una conseguenza delle qualità stesse più salienti del loro spirito, delle loro intime disposizioni naturali, e le attitudini da essi prese di fronte alla teoria stessa si rispecchiano in tutti gli altri atteggiamenti della loro vita scientifica.

Questo io cercai dimostrare otto anni fa e non voglio adesso ripetermi. Parlai allora della feconda virtù che ebbero gli scritti e le lezioni di questi tre matematici sui giovani italiani, molti dei quali, divenuti alla lor volta maestri, consacrarono gran parte della loro attività alla teoria delle funzioni ed a tutte le altre dottrine direttamente ad essa collegate, sia nel campo delle equazioni differenziali ed integrali, sia in quello delle applicazioni alla geometria ed alla meccanica; tentai pure in quella occasione rilevare in qual modo si esplicò e si esercitò in Italia l'influenza delle opere di ABEL e di JACOBI e dei concetti fondamentali posti da CAUCHY, da WEIERSTRASS e da RIEMANN.

È sempre presente a noi la memoria di quel periodo, ormai classico, nel quale la teoria delle funzioni si plasmò nella forma che essa ha assunto e conserva, e vivo

[1] *Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes Italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse,* par M. VITO VOLTERRA (Compte-rendu du 2me Congrès international des mathématiciens, Paris, Gauthier Villars, 1902).

si mantiene il ricordo degli anni, pieni di intenso fervore, nei quali si conobbero in Italia, esposti dalla bocca stessa del suo scopritore, i fondamentali teoremi del Mittag-Leffler, e in cui le lezioni che l'Hermite dettava a Parigi si spargevano ed erano lette e ripetute, mentre dalla Germania tornavano coloro che, ascoltati il Weierstrass e il Klein, diffondevano le loro scoperte. Intanto i grandi lavori di Poincaré e di Picard, di Fuchs e di Neumann aprivano vasti orizzonti e spingevano i nostri geometri verso nuovi problemi.

Il solo accenno di quanto fecero il Dini, il Bianchi, il Pincherle, il Pascal, il Morera, il Cesàro, il Tonelli, il Vivanti e molti altri ancora, che lavorarono con tanto successo, mi condurrebbe assai lontano.

Del resto i resultati di cui dovrei parlare, ben conosciuti ed ormai entrati a far parte del patrimonio comune matematico, si riattaccano e si intrecciano colle insigni scoperte che i più illustri matematici stranieri fecero nello stesso tempo, tanto che i resultati italiani non potrebbero considerarsi da soli, ma bisognerebbe esaminarli fusi nella grande corrente che sospinse e trascinò il pensiero matematico dell'ultimo secolo.

Ma, senza intrattenermi ulteriormente sulla teoria delle funzioni analitiche, sulla loro estensione e sugli studi affini, e non accennando nemmeno alle tante dottrine di cui è ricca l'algebra, nelle quali Brioschi, Betti, Bellavitis, Trudi, Faa Di Bruno prima, e più recentemente il Capelli, il Pascal, il Bagnera si segnalarono, nè sulla scienza dei numeri, che il Genocchi, il Bianchi, il Cesàro, il Torelli coltivarono con tanto amore, mi sia dato parlare di un ramo di ricerche fiorito presso di noi in disparte dal grande movimento che agitò tutta la matematica in Europa, rimasto qualche anno alquanto dimenticato, ma che recentemente suscitò un po' dappertutto interesse e curiosità.

Intendo dire di quelle ricerche non molto vaste, sebbene irte di sempre nuove difficoltà, aride spesso, ma pur ricche di resultati attraenti per il loro aspetto talora paradossale; di quelle ricerche cioè, sopra le funzioni di variabili reali e le più riposte singolarità loro, che efficacemente furon chiamate gli studi sulle deformità e le mostruosità della matematica, in cui l'aiuto delle leggi, per dir così, fisiologiche della geometria viene a mancare, e non solo ogni intuizione fa difetto, ma tutte le facili e seducenti previsioni inducono il più spesso in errore.

In ogni vasto giardino, nel quale antiche piante secolari, ricche e rigogliose culture, richiamano sole l'attenzione di chi l'osserva per la prima volta, esiste un cantuccio solitario, una serra nascosta, ove l'abile giardiniere sceglie e cura alcune piante singolarissime, nelle quali il suo occhio esperto ha ravvisato delle variazioni e dei caratteri particolari. Nel campo delle ricerche matematiche quel riposto cantuccio con quelle delicate culture è rappresentato dagli studi a cui adesso ho accennato. Ma son quelle umili pianticelle, che probabilmente un giorno daranno belle e nuove varietà e che arricchiranno il giardino di forme rare e preziose; nello stesso modo quei sottili e minuti studi sono destinati a dar vita a nuovi concetti e ad impreveduteapplicazioni.

Fu il Dini che introdusse e diffuse in Italia l'amore per queste ricerche colle sue opere, e più ancora, con l'efficace ed originale suo insegnamento. Chi ha subìto il fascino delle sue lezioni, nelle quali tanti astrusi pensieri divengono per incanto facili e chiari, risentirà per tutta la vita viva simpatia verso le ricerche stesse.

Weierstrass e Riemann, movendo da idee che si erano un poco alla volta infiltrate nell'analisi, le avevano iniziate, Giorgio Cantor aveva fatto strabiliar tutti colle sue inattese rivelazioni, il Du Bois-Reymond era penetrato addentro a molti oscuri problemi ed il Darboux aveva scoperto tante belle ed originali proposizioni. Il Dini, coordinando questo insieme di dottrine, arricchendole di nuove verità, ebbe il coraggio di portarle in Italia nella scuola all'inizio stesso degli studi di analisi infinitesimale e come base di essi. Ardita impresa dei suoi anni giovanili, mercè la quale il suo insegnamento acquistò un colorito nuovo, mentre le antiche teorie venivano come vivificate da un soffio di freschezza e di gioventù.

Attratta da questi studi, si formò in Italia una scuola di matematici che consacrarono le forze del loro ingegno allo sviluppo di queste dottrine ed apportarono loro importanti resultati.

E presero gli studi stessi doppia direzione fra noi: l'una condusse l'Ascoli, l'Arzelà ed altri a ricerche concrete sopra le serie, i limiti e la teoria delle funzioni; l'altra mirò, col Peano e colla scuola che ebbe l'impulso da lui, a dare una base sempre più solida ai concetti fondamentali, si fuse con quelle dottrine che approfondivano la critica dei postulati e si spinse di giorno in giorno in regioni sempre più astratte, acquistando un carattere vieppiù filosofico.

***

Ed ora che ho accennato nel mio rapido esame a queste ultime ricerche, nelle quali domina sovrano ciò che il Klein chiama lo spirito aritmetico, mi sia concesso passare nel campo che ordinariamente suol chiamarsi degli studi geometrici.

Passaggio invero che alcuni anni fa in Italia sarebbe apparso, più che il trascorrere da uno ad un altro ordine di discipline, il varcare i confini di due accampamenti l'un contro l'altro armato. Singolare situazione questa di combattimento, manifestatasi fra noi forse con maggiore intensità che altrove e il cui studio offre argomento ad interessanti e curiose considerazioni.

Analisi e geometria, che furon ritenuti e impiegati come due termini opposti, non possono, nè per la loro origine, nè per la loro storia, nè per la natura loro, farsi corrispondere a concetti che si eliminino e si escludano a vicenda; dirò anzi che non possono porsi a confronto, come non può stabilirsi un rapporto fra il colore ed il volume, fra il peso e la forma dei corpi.

I nomi di analisti e geometri dettero origine a quelle singolari classificazioni o, per dir meglio, a quelle strane confusioni che tanto meravigliano chi, dal di fuori, guarda lo svolgimento degli studi italiani. Una semplice comunanza del linguaggio che adoperavano fece raggruppare insieme cultori di materie essenzialmente diverse, mentre vennero separati fra loro matematici miranti ad un fine comune e che, pel contenuto delle loro opere, non avevano ragione di distinguersi, ma che solo per l'aspetto dei procedimenti impiegati potevano apparire differenti.

Si direbbe quindi che un grande equivoco abbia presieduto a certe lotte di scuole, per quanto certamente vi abbiano anche contribuito il persistere di antiche consuetudini e quelle reazioni che si manifestano verso tutti i metodi quando tendono a varcare certi limiti.

Ma queste lotte, feconde e generose lotte, che giovarono eccitando gli animi e spingendo le ricerche lungo le diverse vie solo in apparenza divergenti per cui la scienza progredisce, sono ormai, come il mio amico SEGRE dimostrò nel suo bel discorso letto all'ultimo Congresso, un ricordo del passato (1).

La figura del CREMONA predomina e campeggia in tutto lo svolgimento degli studi geometrici in Italia: all'impulso primitivo che essi ebbero da lui, si deve il rapido loro sviluppo ed al suo insegnamento, che fu un apostolato, la larga simpatia che incontrarono e la diffusione che ebbero.

Gli elementi della geodesia, della fisica-matematica e dell'analisi infinitesimale, sebbene in modo ristretto e limitato, erano tuttavia materie di insegnamento nelle nostre Università, anche nella prima metà dello scorso secolo, ma nelle Università stesse, in nessun modo si accoglievano le dottrine della geometria superiore, le quali invece fiorivano nelle scuole straniere. Ebbene, poco più di quarant'anni eran trascorsi dal giorno in cui il CREMONA aveva principiato il suo insegnamento, ed il KLEIN poteva attestare che l'Italia era divenuta il centro proprio della ricerca geometrica.

Il CREMONA si riattacca direttamente allo CHASLES e per esso al PONCELET, nel primo periodo della sua produzione scientifica, poi si fan più stretti i rapporti suoi col PLÜCKER, col MÖBIUS e principalmente collo STEINER. I suoi lavori sulla teoria delle curve e delle superficie sono opere ormai classiche, e la dottrina delle trasformazioni (che a buon dritto presero il nome di cremoniane) fu da lui stesso fondata allorchè pose il problema della trasformazione razionale in tutta la sua generalità.

Il VERONESE, il BERTINI, il DE PAOLIS, il CAPORALI, il GUCCIA, il MONTESANO, suoi diretti discepoli, ed altri, come il MARTINETTI e il DEL RE, che indirettamente a lui si collegano, sebbene distinti fra loro da indirizzi diversi, formano una schiera di valorosi geometri che resero celebre la sua scuola.

Seguendo il programma di Erlangen (2) che, in base al fecondo concetto di gruppo, è riescito a classificare le teorie antiche e moderne della geometria e le ha coordinate secondo un piano sistematico, mostrando i vari indirizzi sotto un punto di vista comune, sarebbe facile situare nel grande schema l'opera del CREMONA e quelle dei suoi continuatori ed allievi ed in generale dei diversi geometri italiani. Ma il tempo non mi consente di farlo ed io dovrò quindi limitarmi ad un breve cenno su alcuni indirizzi e tendenze.

(1) *La geometria d'oggidì e i suoi legami coll'analisi*, per C. SEGRE, in Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses (Leipzig, B. G. Teubner, 1905).

(2) È il programma pubblicato dal prof. FELIX KLEIN, in occasione del suo ingresso nella Facoltà filosofica e nel Senato dell'Università di Erlangen, col titolo: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, A. Deichert, 1872). Una buona traduzione italiana ne fu fatta dal prof. GINO FANO e venne inserita nel t. XVII, s. II, degli Annali di Matematica pura ed applicata.

Il concetto generale degli spazi a più dimensioni era stato largamente sviluppato, ed in Italia, il BELTRAMI con gli studi generali della curvatura ed il BETTI con quelli della connessione, lo avevano reso abbastanza famigliare, allorchè il VERONESE iniziò le sue ricerche in questo campo. Ora, ciò che distingue l'opera sua da quella dei predecessori è il carattere schiettamente geometrico che il VERONESE diede alla sua trattazione, carattere che si manifesta nella generazione stessa degli spazi e nelle applicazioni che egli ne ha fatte.

L'ulteriore sviluppo di questi studi in Italia e la nuova direzione che presero sono merito principalmente del SEGRE col primitivo indirizzo delle sue ricerche, ed a lui vanno uniti il DEL PEZZO, il FANO ed altri. Al SEGRE poi nella seconda fase della sua carriera scientifica, in cui si riattaccò alla grande opera del NOETHER, si deve l'inizio di quel complesso di lavori con i quali il CASTELNUOVO, l'ENRIQUES, il SEVERI, il DE FRANCHIS ottennero i loro importanti resultati sulla teoria delle superficie, di cui i più recenti si collegano alle scoperte del PICARD sulle funzioni algebriche e rientrano per questa via nell'orbita della teoria delle funzioni.

Numerosi furono in Italia i cultori della teoria delle forme algebriche, a capo dei quali possono porsi il BATTAGLINI e il D'OVIDIO, che seguirono gl'indirizzi di CAYLEY, SYLVESTER, GORDAN, e interpretrarono geometricamente i risultati dell'algebra. I molteplici lavori di varia indole e in diverse direzioni di CAPELLI e PASCAL, del GERBALDI, del MAISANO e del BERZOLARI, di ARMENANTE e del PITTARELLI e di altri ancora provano la larga e feconda attività di questa scuola.

Infine non potrei dimenticare l'indirizzo (che dominò costantemente nella seconda metà del secolo scorso) di risalire verso i fondamenti della geometria sviscerandoli ed assoggettandoli ad una critica profonda, la cui influenza si ripercuote in vario modo anche nell'insegnamento elementare. Questa tendenza si manifesta in un gran numero di ricerche e di libri e sistematicamente si esplica in varie opere, fra cui mi restringo a citare quelle del DE PAOLIS, del VERONESE e dell'ENRIQUES.

Ma un'altra specie di ricerche geometriche di diversa natura fu pur coltivata e rigogliosamente prospera in Italia. Intendo parlare di quella geometria che fu detta infinitesimale, la quale si innalzò sulla base delle scoperte di MONGE e di GAUSS e, mercè una lunga serie di lavori fra i quali primeggia recentemente l'opera del DARBOUX, ha fornito aiuti potenti e metodi fecondi alla dottrina delle equazioni differenziali ed ha arricchito di belle e fondamentali interpretazioni la teoria delle funzioni, mentre è stata di valido aiuto nelle ricerche di fisica-matematica e di meccanica.

Già parlando del BELTRAMI accennai ai suoi primi lavori in questo campo di studi, nel quale il DINI iniziò pure la sua carriera scientifica, ma prima di tutti era stato il BRIOSCHI a diffondere fra noi le feconde idee di GAUSS afferrandone tutta l'importanza, merito questo grandissimo che non deve andare dimenticato.

Le ricerche più moderne del BIANCHI che tanti importanti e geniali contributi portò alla teoria delle superficie applicabili ed a quasi tutti i rami della geometria differenziale, quelle del RICCI che ha introdotto procedimenti nuovi ed infine le belle memorie del CESÀRO sulla geometria intrinseca, nonchè i lavori degli allievi loro, costituiscono un insieme ricco ed armonico di studi che fanno nobile riscontro alle opere di pura geometria e di geometria algebrica di cui ho innanzi parlato.

***

La corsa veloce attraverso il campo di idee e di studi che io volevo percorrere è giunta al suo termine. Come in ogni rapido viaggio, fu possibile cogliere solo l'aspetto di quelle cose che passarono a volo dinanzi. Insieme colla immagine di esse rimane quindi il rammarico di averne tralasciate molte e di avere osservato in modo fuggitivo quanto sarebbe stato degno di esame accurato e profondo. Ma io spero che la regione percorsa possa avere lasciato nel suo insieme l'impressione di essere rigogliosa e fertile e di promettere un fecondo avvenire.

L'Italia nel giovanile ed ardito suo slancio verso i nuovi ideali non scordò le glorie del passato: gli studi di storia delle matematiche si svolsero accanto alla produzione originale. La pubblicazione del Bollettino del BUONCOMPAGNI e del LORIA che raccolse le ricerche storiche, mentre i periodici del TORTOLINI, del BRIOSCHI, del BATTAGLINI e del GUCCIA riunivano le ricerche originali, provano l'interesse che suscitarono presso di noi le antiche opere.

Ma vi fu una grandiosa impresa di ricostruzione storica che deve essere ricordata con onore speciale. Per un sentimento di alto dovere e come un pegno di gratitudine di tutta la nazione risorta verso colui che insegnò a leggere in caratteri matematici entro il libro della natura, la nuova Italia volle la pubblicazione critica e completa delle opere di GALILEO, impresa nobile e vasta, per la quale si rese necessaria la rievocazione di tutta un'epoca e di tutto un mondo, e che si compì sotto gli alti auspicî di S. M. il RE, grande e munifico sempre nel promuovere e nell'incoraggiare quanto torna a vantaggio e a decoro della Patria. Il nome del FAVARO, che diresse il lavoro e gli consacrò le amorose cure di lunghi anni, resta legato a questa insigne pubblicazione.

Ho in principio indicato le influenze didattiche che presiedettero il nascere e lo svilupparsi del brillante periodo di ricerche degli ultimi anni. Oggi, col sorgere del nuovo secolo, nuovi bisogni si fanno sentire che determinano più moderni orientamenti dei nostri istituti scolastici ed in special modo delle scuole degli ingegneri; scuole per lunga e costante tradizione collegate presso di noi colle facoltà di scienze. I problemi, i quali interessano tutta la compagine delle discipline matematiche e che oggi si impongono ed urge risolvere, rendono il momento attuale paragonabile a quello trascorso or sono cinquant'anni, allorchè i nostri studi si costituirono nell'assetto attuale.

Ma è con sicura fede che guardiamo in faccia all'avvenire, sperando nel costante ed armonico sviluppo del pensiero matematico italiano unito con quello delle altre nazioni, giacchè non dubitiamo che gli stessi elevati propositi, congiunti alla esatta intuizione dei bisogni più vivi della nazione, guideranno oggi, come inspirarono mezzo secolo fa, gli uomini al cui senno sono affidate le sorti e l'avvenire della Patria.

G. MITTAG-LEFFLER

SUR LA REPRÉSENTATION ARITHMÉTIQUE

DES FONCTIONS ANALYTIQUES GÉNÉRALES D'UNE VARIABLE COMPLEXE

§ 1.

Bien que la théorie des fonctions de WEIERSTRASS n'ait guère encore été publiée dans sa totalité et de manière homogène, il n'y a certes aucun mathématicien à qui l'idée fondamentale de cette théorie ainsi que ses propositions principales ne soient parfaitement familières.

Le point central de la théorie des fonctions analytiques est chez WEIERSTRASS la série des puissances; la série des puissances est la source d'où jaillit successivement et en entier par transformation et continuation la fonction analytique. La série des puissances étant donnée, la fonction analytique est déterminée dans toute son étendue et de manière univoque. Toutes les propriétés de la fonction se retrouvent « in nuce » dans la série des puissances. Et puis le pivot autour duquel tournaient toujours les cours de WEIERSTRASS, c'était la démonstration du théorème suivant: Si un lien analytique quelque général ou quelque spécial qu'il soit, existe entre plusieurs différentes séries de puissances ou leurs dérivées, ce même lien subsiste encore pour les fonctions dans leur totalité. Or, comme la série des puissances est donnée par ses coefficients, on peut considérer ces coefficients comme l'élément déterminant de la fonction.

Écrivons avec WEIERSTRASS

$$\mathfrak{p}(x|a) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

ou

$$\mathfrak{p}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

Pour que les coefficients $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$ déterminent d'une manière univoque une fonction monogène soit $\mathrm{F}(x)$, il sera d'après CAUCHY nécessaire que

$$\mathrm{Lim\,sup} \sqrt[\nu]{|c_\nu|}$$

soit une quantité finie. Cette condition remplie, la série converge, en ayant comme rayon de convergence

$$r = \frac{1}{\mathrm{Lim\,sup} \sqrt[\nu]{|c_\nu|}}.$$

Je tâcherai dans cette conférence de vous exposer les solutions principales qu'on a obtenues pendant ces dernières dix années du problème, à savoir de former des expressions arithmétiques d'une variable x et d'une suite infinie de constantes $a\,b\,c\,d\ldots$ qui sont linéaires dans ces constantes et qui ont, simultanément, la propriété de représenter, si l'on introduit pour $a, b, c, d\ldots$ les $c_0, c_1, c_2\ldots$, la fonction $\mathrm{F}(x)$ dans un domaine lequel, les $c_0, c_1, c_2\ldots$ étant fixés, est défini d'une manière univoque.

Nous savons que la série de puissances converge d'une manière uniforme pour chaque domaine à l'intérieur de son cercle de convergence soit C, mais qu'elle diverge toujours en dehors de ce cercle. Si une expression arithmétique possède cette double propriété par rapport à un continuum D en deux dimensions, c'est-à-dire celle d'être uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de D et celle d'être divergente en dehors de D, nous dirons dans la suite par analogie que D est le domaine de convergence de notre expression. Nous désignerons encore par $\mathrm{FD}(x)$ la branche d'une fonction analytique $\mathrm{F}(x)$ qui est définie par notre expression. Par conséquent, la branche fonctionnelle qui correspond à $\mathfrak{p}(x)$ sera désignée par $\mathrm{FC}(x)$.

Les premiers analystes s'occupaient déjà du problème comment la série $\mathfrak{p}(x)$ se comporte sur la périphérie même du cercle C. Que la série géométrique diverge au point $x = 1$ paraissait tout naturel mais la circonstance particulière qu'elle n'a pas de valeur déterminée au point $x = -1$ donna naissance à des spéculations lesquelles, jugées à notre point de vue, semblent superficielles ou du moins peu conformes au vrai caractère du problème.

Encore aussi tard que 1851, soit 25 ans après la publication de l'ouvrage d'Abel sur la série de binome, on trouve dans le même Journal de Crelle qui par cet ouvrage et d'autres travaux d'Abel obtint une place dans la science, une dissertation quasi-savante par Amtmann Prehn zu Ratzeburg im Lauemburgischen: « Ueber die Bedeutung der divergenten unendlichen Reihen, die Bestimmung ihrer Werthe, und ueber die Zulässligkeit ihrer Anwendung bei analytischen Rechnungen ».

Abel avait démontré que la série $\mathfrak{p}(x)$ ayant une valeur déterminée en un point sur la périphérie du cercle C, la fonction tend, d'une manière uniforme, vers cette valeur, quand la variable tend vers le point le long d'une ligne qui ne touche pas la périphérie du cercle.

Mais la question vers quelle limite la fonction approche, quand la variable tend vers un point sur la périphérie, où la série est indéterminée, restait toujours ouverte. C'est en connaissance de ce fait qu'Abel énonçait dans le second tome du Journal de Crelle son fameux problème:

« Si l'on suppose la série $\mathfrak{p}(x)$ convergente pour toute valeur positive moindre que la quantité positive r; on propose de trouver la limite vers laquelle converge la valeur de la fonction $\mathfrak{p}(x)$ en faisant tendre x vers la limite r ».

Le premier pas sérieux vers une solution du problème d'Abel a été fait par M. Frobenius en 1880. En se faisant guider par une pensée de Leibnitz, il a montré que l'on a

$$\mathfrak{p}(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}, \qquad \text{où} \quad s_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu} c_\nu x^\nu,$$

à l'intérieur du cercle de convergence et qu'il peut encore arriver que le second membre de cette égalité ait une valeur déterminée en un point sur la périphérie du cercle C malgrè que $\mathfrak{p}(x)$ y reste indéterminé. C'est vers cette valeur que tend la fonction quand la variable de l'intérieur du cercle approche du point sur la périphérie. M. Hölder a poussé, deux ans plus tard, un peu plus loin que M. Frobenius, mais ni l'un ni l'autre n'ont trouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de leurs expressions. Ils n'arrivaient qu'à affirmer que si ces expressions convergent elles représentent la fonction.

C'est là que la question est restée pendant toute une période décennale, jusqu'à l'année 1892 quand elle fut reprise par M. Hadamard dans sa thèse remarquable parue cette année. M. Hadamard obtint une nouvelle expression qui renferme celles de M. M. Frobenius et Hölder et il réussit en même temps à fixer les conditions dans lesquelles cette expression converge sur la périphérie du cercle C.

Il faut d'abord que la fonction soit régulière dans de tels points de la périphérie et puis encore que la fonction appartienne à une certaine catégorie spéciale de fonctions caracterisée par les conditions des points singuliers de la périphérie de C.

Ce résultat de M. Hadamard montre à l'evidence combien était limitée la généralisation de la série de Taylor qu'impliquaient sa propre expression et celles de M. M. Frobenius et Hölder.

C'est trois ans après soit le 30 Décembre 1895 que M. Borel commence la série de publications par lesquelles la question qui nous préoccupe est entrée dans une phase essentiellement nouvelle. Se basant sur un travail de Cesàro de l'année 1890 M. Borel obtint la formule

$$\mathfrak{p}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_0 + c_1 x + \cdots + c_\nu x^\nu)\, e^{-\omega} \cdot \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}$$

et démontra que le second membre converge non seulement à l'intérieur du cercle C ainsi que dans tous les points réguliers de la fonction $F(x)$ sur la périphérie de ce cercle mais de plus, ce qui est plus remarquable encore, pour un domaine au dehors du cercle.

M. Borel croit moyennant sa formule avoir sommé la série des puissances même dans le cas où elle diverge, ce qui, d'autre part, arrive toujours en dehors du cercle de convergence et peut arriver dans un point régulier de la périphérie du cercle. Il me semble que cette façon de voir n'est qu'un jeu de mots, lequel est d'autant moins justifié qu'elle trouble l'intelligence du résultat qu'a réellement obtenu M. Borel et qu'elle fait naître l'illusion que les limites de la théorie des fonctions analytiques ont été portées au-delà de celles fixées par la théorie classique, ce qui n'est aucunement le cas. Si la série des puissances peut être continuée au-delà du cercle de convergence, sa valeur s'obtient à chaque point renfermé dans une telle continuation par des opérations arithmétiques exécutées sur les constantes $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$, et cette operation constitue alors, aussi bien que celle de M. Borel, une sommation de la série $\mathfrak{p}(x)$ en dehors de son domaine de convergence.

Mais à M. BOREL revient le mérite d'avoir réussi à substituer à cette opération compliquée un procédé essentiellement plus simple. À la place de la série de TAYLOR il met une autre expression, laquelle, à l'instar de celle de TAYLOR, est linéaire dans les constantes $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$, mais qui, par surcroît, possède l'avantage de toujours exprimer la fonction aussi bien pour chaque point régulier de la périphérie du cercle que pour un continuum renfermant ce point.

Que l'on peut, tant que l'expression BOREL est convergente, exécuter la même opération sur la série divergente que sur la série convergente $\mathfrak{p}(x)$ n'implique que la traduction pour ce cas spécial du théorème de WEIERSTRASS, que je viens d'alléguer à savoir: si un lien arithmétique existe entre plusieurs séries de puissances et leurs dérivées, ce lien subsiste encore entre les fonctions analytiques correspondantes dans leur totalité. Le résultat qu'a réellement obtenu M. BOREL, tombe donc entièrement dans le cadre de la théorie classique des fonctions. Il en est de même des expressions représentant la fonction dans la proximité d'un point singulier, lesquelles ont été données par STIELTJES et M. POINCARÉ et après eux par M. M. LE ROY, BOREL, MAILLET et autres.

Il n'y a rien dans ces expressions qui nous engage à sortir de la théorie classique.

L'expression BOREL contient la solution générale du problème d'ABEL dans tous les cas où le point de la périphérie du cercle C, vers lequel tend la variable de l'intérieur du cercle, est un point régulier de la fonction. On n'a qu'à introduire dans cette expression l'affixe du point pour obtenir la valeur de la fonction.

M. BOREL est parvenu encore, et ce n'est pas la partie la moins importante de son travail, à déterminer, d'une manière générale, un domaine pour lequel son expression converge et qu'il appelle, selon sa façon de voir « polygone de sommabilité ».

Nous désignerons ce domaine par B et par FB(x) la branche fonctionnelle correspondante, et nous définirons B de la manière suivante, ce qui a l'avantage de nous initier aux méthodes employées plus tard.

Supposons L une demi-droite partie de l'origine et x_0 un point sur cette droite tel que la fonction F(x) soit régulière à l'intérieur d'un cercle ayant la droite entre l'origine et x_0 pour diamètre. C'est ce qui a lieu quand x_0 se trouve à l'intérieur ou sur la périphérie du cercle C, mais ce qui peut arriver encore, quand x_0 tombe en dehors de ce cercle.

Limitons la demi-droite L au point x_0 le plus éloigné de l'origine pour lequel se présente cette condition.

Faisons la même opération sur toutes les demi-droites issues de l'origine. L'ensemble de ces droites limitées constitue le domaine BOREL. Ce domaine qui embrasse le cercle de convergence adhère à la péripherie de ce cercle dans tous le points singuliers mais sort en dehors de la périphérie aux points réguliers. Si la convergence cesse en dehors de B et si B constitue par cette raison dans le même sens que C, un domaine de convergence, reste encore chez M. BOREL une question ouverte.

Dans une communication faite à l'Académie des sciences de Suède le 9 Mars 1898 (¹) le problème suivant qui est d'un ordre plus général que celui de M. BOREL,

(¹) G. MITTAG-LEFFLER, *Om en generalisering af potensserien.* Öfversigt af Kngl. Vetenskapsakademiens Förhandlingar, 1898, n. 3, Meddelande från Stockholms Högskola, n. 176.

était posé et résolu. N'y aurait-il pas moyen d'élargir plus encore que dans le cas Borel et autant que la nature du problème le permettrait le domaine C sans lui faire perdre son caractère essentiel d'être le domaine total de convergence. Il s'agissait d'abord de définir, d'une manière naturelle, le domaine le plus étendu dont il pouvait être question. La nouvelle conception d'une *étoile* servait à ce sujet.

Supposons une aire créée dans le plan de la variable x de la manière suivante: autour d'un point fixe a, on fera tourner une fois une demi-droite; sur chaque demi-droite on déterminera d'une manière univoque un point, soit a_L, dont la distance au point fixe a sera plus grande qu'une quantité positive donnée, la même pour toutes les demi-droites.

Ce point a_L pourra être situé à une distance du point a finie ou infinie. Dans le cas où la distance de a à a_L est finie, on exclura du plan des x la partie de la demi-droite qui s'étend de a_L à l'infini. L'étoile sera le domaine qui restera après que toutes ces coupures ont été faites dans le plan des x.

Les constantes $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$ étant fixées, on obtient une étoile correspondante en s'imaginant $\mathfrak{p}(x)$ continué le long de chaque demi-droite L jusqu'à ce qu'on arrive au premier point en dehors duquel aucune continuation n'est plus possible. Cette étoile sera désignée par A et sera appelé l'*étoile principale* des constantes $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$ Il est manifeste qu'on pourrait introduire tout aussi bien que l'étoile A une autre étoile engendrée par un système quelconque de lignes qui ne se coupent pas en dehors du cercle C et qui ensemble couvrent le plan entier. Il est surtout intéressant d'employer comme ligne génératrice la spirale logarithmique.

On voit que le cercle C ainsi que le domaine B sont des étoiles renfermées dans A et adhérentes à A dans tous les points singuliers qui se trouvent sur leur limite.

Dans mon travail de 1898 le théorème suivant est exposé:

« Désignons par A l'étoile principale et par FA(x) la branche fonctionnelle définie par les constantes $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$ Designons encore par $A^{(\alpha)}$ (α positif) une étoile conjointe, concentrique à A et entourée par A ayant sur sa limite des points singuliers et de plus adhérente à A dans tous ces points. Cette étoile doit encore renfermer dans son intérieur tout domaine situé à l'intérieur de A, dès que la quantité α est choisie suffisamment petite.

« On peut fixer $A^{(\alpha)}$ d'une infinité de manières différentes en sorte que la branche fonctionnelle correspondante $FA^{(\alpha)}(x)$ soit représentée par une série:

$$c_0 + \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu (x|\alpha)$$

$$G_\mu (x|\alpha) = k_1^{(\mu)}(\alpha)\, c_1\, x + k_2^{(\mu)}(\alpha)\, c_2\, x^2 + \cdots + k_\mu^{(\mu)}(\alpha)\, c_\mu\, x^\mu$$

où les coefficients $k_1^{(\mu)}(\alpha)\, k_2^{(\mu)}(\alpha) \ldots$ sont fixés *a priori* indépendamment des constantes $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$ et de x et que l'étoile $A^{(\alpha)}$ devient le domaine de convergence de la série ».

L'étoile $A^{(\alpha)}$ avec ses constantes $k_\nu^{(\mu)}(\alpha)$ fut obtenue de la manière suivante. Désignons par $v = f(u|\alpha)$ une relation entre les deux variables u et v qui sera bi-uniforme tant que $|u|$ reste en dessous d'une quantité positive plus grande que l'unité. Faisons décrire a u un cercle U ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité.

Nous supposerons $f(u|\alpha)$ être choisi d'une telle manière que la figure $V^{(\alpha)}$ qui correspond à ce cercle U n' ait que deux points communs avec l'axe réel et que $v = 1$ soit le point le plus éloigné de l'origine de ces deux points. Les points $u = 0$, $v = 0$; $u = 1$, $v = 1$ doivent se correspondre.

La fonction $f(u|\alpha)$ sera encore soumise à la condition essentielle que le contour $V^{(\alpha)}$ tende indéfiniment vers la ligne droite entre $v = 0$ et $v = 1$, si l'on fait décroître suffisamment vers zéro le paramètre α.

Considérons une demi-droite L partie de l'origine dans le plan des x. Faisons avancer x le long de cette droite jusqu'au premier point x_0 qui soit tel que la fonction $F(xf(u|\alpha))$ où u parcourt le cercle U cesse d'être régulière. La partie de L entre l'origine et le point x_0 appartient à l'étoile $A^{(\alpha)}$, et on obtient cette étoile dans sa totalité en faisant la même opération sur toutes les demi-droites issues de l'origine. L'égalité:

$$FA^{(\alpha)}(x) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} G_\mu(x|\alpha)$$

$$= c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (k_1^{(\mu)}(\alpha)\, c_1 x + k_2^{(\mu)}(\alpha)\, c_2 x^2 + \cdots + k_\mu^{(\mu)}(\alpha)\, c_\mu x^\mu)$$

peut aussi bien être exprimée sous la forme:

$$FA^{(\alpha)}(x) = c_0 + \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} G_\mu(x|\alpha)$$

$$= c_0 + \operatorname*{Lim}_{n=\infty} (h_1^{(n)}(\alpha)\, c_1 x + h_2^{(n)}(\alpha)\, c_2 x^2 + \cdots + h_n^{(n)}(\alpha)\, c_n x^n)$$

où

$$h_\mu^{(n)}(\alpha) = k_\mu^{(\mu)}(\alpha) + k_\mu^{(\mu+1)}(\alpha) + \cdots + k_\mu^{(n)}(\alpha) .$$

Les $h_\mu^{(n)}(\alpha)$ tendent indéfiniment vers l'unité quand n croît au-dessus de chaque limite et on obtient par conséquent le théorème intéressant que le second membre de la dernière égalité relative à $FA^{(\alpha)}(x)$ tout en représentant $F(x)$ dans l'étoile $A^{(\alpha)}$ approche indéfiniment de la série de Taylor quand n croît au-dessus de chaque limite.

Je choisissais d'abord pour la figure $V^{(\alpha)}$ une figure de forme rectangulaire, mais comme il paraissait désirable de pouvoir ramener l'étoile $A^{(\alpha)}$ par une transition continue au cercle C en variant le paramètre α, j'ai choisi plus tard une figure cordiforme constituée par deux arcs de spirale.

En choisissant pour $V^{(\alpha)}$ une figure obtenue par une construction géométrique simple, on a pourtant l'inconvénient d'arriver à des expressions compliquées des constantes $k_\nu^{(\mu)}(\alpha)$.

C'est pourquoi M. FREDHOLM a laché le point de vue géométrique en cherchant seulement d'obtenir des expressions simples pour les $k_\nu^{(\mu)}(\alpha)$. Il met:

$$v = f(u|\alpha) = \frac{\operatorname{Log}(1-(1-\alpha)u)}{\operatorname{Log}\alpha}\ ; \qquad 0 < \alpha \leqq 1$$

et il obtient

$$k_\nu^{(\mu)}(\alpha) = C_{\mu-\nu}^{(\mu)}\left(\operatorname{Log}\frac{1}{\alpha}\right)^{-\nu}\frac{(1-\alpha)^\mu}{\underline{|\mu}}$$

les $C_{\mu-\nu}^{(\mu)}$ étant les coefficients factoriels définis par l'égalité

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+\mu-1) = \lambda^\mu + C_1^{(\mu)}\lambda^{\mu-1} + \cdots + C_{\mu-1}^{(\mu)}\lambda\,.$$

L'expression explicite des coefficients factoriels est pourtant d'une très grande complication. Pour cette raison j'ai introduit

$$v = f(u|\alpha) = \frac{\alpha u}{\left(1-\left(1-\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right)u\right)^\alpha}$$

d'où l'on obtient pour les $k_\nu^{(\mu)}(\alpha)$ des expressions dans les coefficients binomes au lieu des coefficients factoriels comme chez M. FREDHOLM, à savoir:

$$k_\nu^{(\mu)}(\alpha) = (\mu+1-\nu(1-\alpha))_{\mu-\nu}\,\alpha^\nu\beta^{\mu-\nu}\ ; \qquad \beta = 1-\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\ ;$$

$$(n)_\nu = \frac{n(n-1)\dots(n-(\nu-1))}{\underline{|\nu}}\,.$$

L'étoile $A^{(\alpha)}$ est dans ce cas aussi bien que dans le cas cordiforme ou le cas FREDHOLM une étoile qui pour $\alpha = 1$ est identique au cercle C, et quand α diminue vers zéro s'approche indéfiniment de l'étoile A. Elle reste toujours aussi bien que C une étoile de convergence.

Considérons maintenant dans quels cas il y a de la convergence sur la limite de $A^{(\alpha)}$ ou de A. Nous appellerons *sommet* d'une étoile le point extrême de chacune des demi-droites génératrices. Si la branche fonctionnelle $FA^{(\alpha)}(x)$ s'approche indéfiniment d'une valeur déterminée, quand x, de l'intérieur de la figure $V^{(\alpha)}$ décrite autour de la demi-droite entre l'origine et le sommet, tend vers un sommet; l'expression $c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} G_\mu(x|\alpha)$ reste convergente si l'on y introduit l'affixe du sommet, et elle exprime par conséquent la valeur de la branche fonctionnelle dans ce point. Si le sommet est un point régulier de la fonction on obtient donc sa valeur de l'expression $c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} G_\mu(x|\alpha)$. Mais le même cas se présente si le sommet est un point singulier pourvu que les conditions indiquées soient remplies. Par là nous avons obtenu une solution du problème d'Abel qui est plus générale que celle qui dérive de la formule Borel.

Celle-là ne nous donne que la valeur de la fontion dans un point de la périphérie de C qui est un point régulier de la fonction. Nous avons obtenu cette valeur même pour le cas où ce point, soit x_0, est singulier mais qu'à x_0 corresponde un nombre α tel que la fonction obtienne une valeur déterminée quand x tend vers x_0 de l'intérieur d'une figure $V^{(\alpha)}$ autour du rayon du cercle qui passe par x_0. C'est la solution la plus générale du problème d'Abel que l'on a gagnée jusqu'à présent.

Faisons encore concernant la formule:

$$c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} G_\mu(x|\alpha) = c_0 + \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} G_\mu(x|\alpha)$$

l'observation qu'elle est plus simple que celle de M. Borel:

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_0 + c_1 x + \cdots + c_\nu x^\nu)\, e^{-\omega} \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (c_0 + c_1 x + \cdots + c_\nu x^\nu)\, e^{-\omega} \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}$$

sous le rapport qu'elle n'est qu'une expression limite simple, tandis que celle de M. Borel est une expression limite double.

Si l'on introduit dans l'expression $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} G_\mu(x|\alpha)$ une relation convenable entre les quantités n et α, on obtient une expression valable pour toute la branche fonctionnelle $FA(x)$. Une telle expression est par exemple:

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x)$$

où

$$G_n(x) = \sum_{\mu=0}^{n} G_\mu\left(x \,\middle|\, \frac{1}{n^\gamma}\right); \qquad 0 < \gamma < 1.$$

Cette expression converge uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de A, mais ne peut jamais converger uniformément pour un domaine en deux dimensions embrasse un sommet de A. Nous reviendrons à la question de la possibilité ne convergence d'une autre nature en dehors de A.

La solution du problème qui est l'objet de ma conférence, et dont je viens de dre compte, doit être considérée comme tout élémentaire. En laissant de côté tude des relations aux sommets de $A^{(\alpha)}$ ou de A, elle ne demande nulle connaissce du calcul intégral et ne suppose comme connues que les propositions fondantales de la théorie des fonctions de WEIERSTRASS ainsi que les rudiments de théorie de la représentation conforme.

Cependant on peut aussi arriver au but directement en procédant des premiers iments de la théorie des fonctions de WEIERSTRASS sans se servir de la théorie la représentation conforme.

Je sais bien que beaucoup de mathématiciens regardent comme chose indifférente voie par où on parvient à un théorème, pourvu qu'on y parvienne. Ce n'est pas mon opinion, et je suis d'avis qu'on doit s'efforcer de ne pas se servir de plus moyens auxiliaires et de théories d'un ordre supérieur que ce qui est exigé par nature même de la thèse. Faire le détour de passer par une théorie d'ordre supéeur, p. ex. la théorie des intégrales, quand le but peut être atteint directement s premiers éléments de l'analyse, ne me semble justifié que quand quelque chose plus et de nouveau peut être gagné par là.

Dans tout autre cas la prétendue simplification n'est souvent qu'un mirage. Il t vrai que le développement de la thèse sera peut-être placé dans un milieu qui us est plus familier, mais d'autre part l'argumentation sera chargée d'hypothèses d'excroissances inutiles.

Comme appui de mon opinion je puis m'en referer à WEIERSTRASS chez lequel principe était toujours prédominant. Si l'on ne retient pas ce point, on ne sera mais à même de comprendre ni WEIERSTRASS ni son oeuvre scientifique. Ce même rincipe paraît aussi avoir guidé GAUSS et il paraît aussi, quoique dans un autre omaine, avoir été le point déterminant pour STEINER, ce qui explique son antipaie pour les construction auxiliaires dans la géométrie synthétique.

Quand WEIERSTRASS introduit la série de puissances de plusieurs variables, il regarde comme étant absolument convergente, c'est-à-dire qu'elle converge, quand haque élément est remplacé par son module. Aux premiers pas faits dans la théorie es fonctions, on rencontre pourtant une autre espèce de convergence. Soit comme uparavant r le rayon de convergence de la série:

$$\mathfrak{p}(x|a) = F(x) + \frac{F^{(1)}(x)}{\underline{|1}}(x-a) + \frac{F^{(2)}(x)}{\underline{|2}}(x-a)^2 + \cdots$$

Continuons la série par une transformation autour du point ξ qui remplit la conlition $|\xi - a| < r$. Il résulte alors:

$$\mathfrak{p}(x|a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{p}^{(\nu)}(\xi|a)}{\underline{|\nu}}(x-\xi)^\nu$$

ù le premier membre possède le domaine de convergence $|x - a| < r$ et où le second membre possède le domaine de convergence

$$|x-\xi|<\varrho \quad \text{où} \quad r-|\xi-a|\leqq\varrho\leqq r+|\xi-a|.$$

Cependant le second membre est en réalité une serie double:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{F^{(\nu+\mu)}(a)}{\lfloor\nu\,\lfloor\mu}(x-\xi)^{\nu}(\xi-a)^{\mu}$$

laquelle, chaque terme étant remplacé par son module, converge pour le domaine

$$|\xi-a|<r\ ;\ |x-\xi|<r-|\xi-a|$$

mais jamais en dehors de ce domaine. Cette série possède pourtant si l'on la regarde comme une série deux fois infinie, encore une autre espèce de convergence. Les séries intérieures convergent et convergent d'une manière absolue pour le domaine $|\xi-a|<r$, tandis que la série extérieure, si l'on regarde comme les termes de cette série les sommes des séries intérieures, converge et converge elle aussi d'une manière absolue pour le domaine $|x-\xi|<\varrho$. C'est cette circonstance qui constitue la base de la théorie des fonctions analytiques de Weierstrass. Car le rayon ϱ pouvant pour certaines valeurs de ξ croître au-dessus de $r-|\xi-a|$, peut-être même jusqu'à $r+|\xi-a|$, le domaine de convergence de notre série double envisagée au point de vue ci-dessus sera plus grand que celui qu'on obtient en remplaçant chaque terme par son module lequel domaine n'est autre que celui de la série originaire.

De cette simple observation dérive immédiatement une solution de notre problème. On n'a qu'à poser $\xi-a=\frac{x-a}{2}$ et par conséquent $x-\xi=\frac{x-a}{2}$ pour obtenir la série deux fois infinie:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{F^{(\nu+\mu)}(a)}{\lfloor\nu\,\lfloor\mu}\left(\frac{x-a}{2}\right)^{\nu+\mu}$$

où la série extérieure est la somme des sommes des séries intérieures. Cette série converge pour une étoile qui embrasse le cercle de convergence de $\mathfrak{p}(x\,|\,a)$ et fait partie de l'étoile B de M. Borel, et cette étoile est en même temps une étoile de convergence.

Il est tout évident que la série n fois infinie

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_n=0}^{\infty}\frac{F^{(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n)}(a)}{\lfloor\nu_1\,\lfloor\nu_2\ldots\lfloor\nu_n}\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n}$$

envisagée de la même manière que la série double, converge en dedans d'une étoile qui tend indéfiniment vers l'étoile A en même temps que n croît au-dessus de chaque limite.

Cette étoile reste encore une étoile de convergence, quand $n=3$, mais si $n>3$ la série pourra converger en dehors de l'étoile. Il est pourtant facile de modifier la série de manière à ne jamais converger en dehors de l'étoile, dans lequel cas l'étoile deviendra une étoile de convergence.

La série n fois infinie se transforme encore sans difficulté en une série simple qui converge partout à l'intérieur de A. On obtient en réalité

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\nu_1=0}^{n^2} \sum_{\nu_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\nu_n=0}^{n^{2n}} \frac{F^{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n)}(a)}{\lfloor \nu_1 \lfloor \nu_2 \cdots \lfloor \nu_n} \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n}$$

où le second membre est uniformément convergent pour chaque domaine à l'intérieur de A mais ne peut jamais converger de manière uniforme pour un domaine en deux dimensions qui embrasse un sommet de A.

Ce second membre aussi bien que l'expression pour $FA(x)$ que nous avons obtenue auparavant a la forme

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\nu} (\nu, n) c_\nu x^\nu$$

où les (ν, n) sont des constantes numériques fixées a priori lesquelles ne dépendent que de ν et de n mais sont indépendantes aussi bien des c_ν qu'elles le sont de x. On peut se demander s'il ne serait pas possible de fixer les nombres (ν, n) de sorte que l'expression ne converge jamais en dehors de l'étoile principale lors d'aucun choix des constantes $c_0\, c_1\, c_2 \dots$ M. Borel a prouvé dans un travail aussi profond qu'important que cela n'est pas possible. M. Phragmén a fait observer que la démonstration de M. Borel peut être modifiée de manière à embrasser non seulement comme chez M. Borel le cas où la série dans le second membre est un polynome en x, mais encore le cas où elle est une série toujours convergente par rapport à x.

§ 2.

Les théorèmes concernant la représentation de $F(x)$ par une expression valable au dedans de l'étoile A ou bien dans une étoile s'approchant à volonté de A et dont nous venons de rendre compte, sont, nous l'avons déjà dit, une conséquence directe des premiers principes de la théorie des fonctions de Weierstrass et ne supposent aucune connaissance de la théorie de l'intégration complexe.

Je tâcherai maintenant d'exposer les principaux résultats qu'on obtient en se servant de l'intégrale de Cauchy, cet incomparable instrument de l'analyse supérieure qui après l'apparition du calcul infinitésimal n'a été dépassé par aucun autre.

On connaît le terme complémentaire de Cauchy à la série de Taylor.

Ce terme peut être généralisé jusqu'à devenir le terme complémentaire de l'expression que nous avons obtenue pour $FA^{(\alpha)}(x)$ que voici

$$R_{n+1}^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \int^{C_1} \frac{F(xf(u|\alpha))}{u-1} \left(\frac{1}{u}\right)^{n+1} du$$

où l'intégration se fait le long de la périphérie d'un cercle C_1, ayant l'origine pour centre et pour rayon une quantité r_1, plus grande que l'unité mais suffisamment rapprochée de l'unité. Quand $f(u|\alpha) = u$ on revient au terme complémentaire de Cauchy.

L'expression Borel est pour le cas que $F(x) = \frac{1}{1-x}$ une conséquence immédiate de l'égalité

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1 - e^{-\omega(1-x)}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

valable autant que la partie réelle de x est inférieure à l'unité.

Mais si l'on veut passer à la fonction générale $F(x)$, il faut se servir d'un théorème que j'avais démontré par l'intermédiaire de l'intégrale de Cauchy en 1882 ([1]) et qui a été retrouvé ensuite par M. M. Borel et Phragmén, savoir si l'on a trouvé une expression de la fonction $\frac{1}{1-x}$ linéaire dans les puissances x^ν ; $\nu = 0, 1, 2, 3 \ldots$ on n'a que d'introduire dans cette expression $c_\nu x^\nu$ au lieu de x^ν pour obtenir une expression correspondante de la fonction $F(x)$.

On obtient dans une voie analogue comme terme complémentaire à l'expression Borel

$$R_\omega = \frac{1}{2\pi i} \int^{C_2} \frac{F(xu)}{u-1} e^{\omega\left(\frac{1}{u}-1\right)} du$$

où l'intégration se fait le long de la périphérie d'un cercle ayant pour centre $1/2$ et pour rayon une quantité positive plus grande que $1/2$ mais pouvant être choisie aussi rapprochée de $1/2$ qu'on le voudra.

L'étude de cette intégrale conduit à deux autres formes de l'expression Borel, dont la plus importante est celle-là:

$$FB(x) = \int_0^\infty e^{-\omega} \Phi(\omega x)\, d\omega$$

où

$$\Phi(x) = c_0 + \frac{c_1}{\underline{|1}} x + \frac{c_2}{\underline{|2}} x^2 + \frac{c_3}{\underline{|3}} x^3 + \cdots$$

Cette égalité est très remarquable. Si l'on pose ω au lieu de ωx et z au lieu de $\frac{1}{x}$ on obtient l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega z} \Phi(\omega)\, d\omega$$

qui a joué un si grand rôle dans l'analyse depuis que Laplace en faisait l'étude et

([1]) *Fullständig analytisk framställning af hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdemängd af första slaget* (Öfversigt af K. Vet. Ak. Förh. 8 febr. 1882, pp. 25, 26).

l'emploi dans la « Théorie analytique de la probabilité ». Nous rappelons seulement les travaux d'ABEL, de SCHLÖEMILCH et de POINCARÉ là-dessus.

Qu'avec de tels prédécesseurs M. BOREL ait réussi à en tirer de nouvelles propriétés est digne de toute estime. M. BOREL a montré que l'intégrale aussi bien que l'expression BOREL dont nous avons parlé auparavant converge à l'intérieur de l'étoile B. Mais il restait encore un point très important à éclaircir. Est-ce que l'étoile B est le domaine de convergence de l'expression BOREL, ou est-ce qu'une convergence peut avoir lieu encore en dehors de B ? La réponse a été donnée par M. PHRAGMÉN en 1900. Il démontrait que l'étoile B est en réalité le domaine de convergence de l'intégrale en question, d'où il s'ensuit immédiatement qu'elle est en même temps une étoile de convergence à toutes les trois expressions de $FB(x)$.

Cette propriété établie donna un champ libre à toute une série de nouvelles recherches. Dans son mémoire posthume: *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes*, ABEL avec ce regard pénétrant qui lui appartenait désignait dans l'égalité

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-\omega}\, \Phi(\omega x)\, d\omega$$

la fonction $F(x)$ comme la fonction génératrice à $\Phi(x)$ et $\Phi(x)$ comme la fonction déterminante de $F(x)$. La fonction

$$\Phi(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots ; \qquad h_\nu = \frac{c_\nu}{\underline{|\nu}}$$

est générée par les mêmes constantes $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$ qui définissent la fonction $F(x)$.

D'autre part si l'on prend pour point de départ les constantes $h_0\, h_1\, h_2 \ldots$ et si la fonction correspondante $\Phi(x)$ est une fonction entière pour laquelle l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\omega}\, \Phi(\omega x)\, d\omega$ considérée comme fonction de x converge dans un certain domaine, cette fonction détermine d'une manière univoque la fonction $F(x)$.

On peut, la fonction $F(x)$ restant toujours la fonction génératrice, de beaucoup de manières différentes modifier la fonction déterminante de manière que l'intégrale au lieu de représenter tout simplement la branche fonctionnelle $FB(x)$ représente non seulement des branches fonctionnelles qui approchent à volonté de la branche $FA(x)$, mais encore représente cette branche même et d'autres plus étendues qui embrassent tout une classe de singularités de $F(x)$. Considérons la plus importante de ces modifications.

Introduisons dans la fonction $\Phi(x)$ au lieu de:

$$h_\nu = \frac{c_\nu}{\underline{|\nu}} ; \qquad \underline{|\nu} = \Gamma(\nu + 1)$$

les coefficients plus généraux:

$$h_\nu = \frac{c_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} ; \qquad \underline{|\alpha\nu} = \Gamma(\alpha\nu + 1) ; \qquad 0 < \alpha ; \qquad \nu = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

de manière que:

$$\Phi(x) = c_0 + \frac{c_1}{\underline{|\alpha . 1}} x + \frac{c_2}{\underline{|\alpha . 2}} x^2 + \cdots$$

On obtient alors:

$$\mathrm{FB}^{(\alpha)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \Phi(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\infty e^{-\omega}\, \Phi(\omega^\alpha x)\, d\omega$$

où l'intégrale du second membre possède une étoile de convergence soit $B^{(\alpha)}$, qui approche indéfiniment de l'étoile A, quand α tend vers zéro, et approche indéfiniment du cercle C, quand α croît au dessus de chaque limite. L'étoile $B^{(1)}$ devient, nous le voyons, l'étoile Borel. En se servant de l'expression

$$\frac{1}{\underline{|z}} = \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{e^t}{t^z} \frac{dt}{t}$$

qui a été donnée par Hankel par suite de l'expression de Riemann pour la fonction $\zeta(s)$, on trouve pour $\Phi(x)$ une expression inverse à l'expression de $F(x)$ en $\Phi(x)$, savoir

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int^{S} e^t F\left(\frac{x}{t^\alpha}\right) \frac{dt}{t} .$$

L'intégration est prise dans le sens positif le long d'un contour ouvert S laissant l'origine à gauche et qui peut être composé d'un arc de cercle ayant l'origine pour centre et deux demi-droites qui partent de l'origine avec les angles $(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ et $-(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ $(0 < \varepsilon < 2)$ et qui seront parcourues entre l'infini et les points où elles coupent la périphérie du cercle. Le point x doit se trouver du même côté de S que l'origine. Le rayon de l'arc de cercle doit être choisi assez grand pour que $\frac{x}{t^\alpha}$ tombe à l'intérieur du cercle C se rapportant à $F(x)$.

J'ai indiqué ici (voir la planche) la forme de l'étoile $B^{(\alpha)}$, soit $b^{(\alpha)}$, dans le cas de la fonction $\frac{1}{1-x}$. Étudions le cas $\alpha \leqq 2$ qui est le plus intéressant. On obtiendra $B^{(\alpha)}$ en construisant d'une manière symmétrique autour de chaque demi-droite génératrice de A une étoile $b^{(\alpha)}$ aboutissant au sommet de A et en excluant du plan la partie qui se trouve au côté opposé de l'origine. C'est la même procédure que M. Borel a employée pour le cas $\alpha = 1$. On voit immédiatement que $F(x)$ n'étant pas une fonction entière, cas auquel $B^{(\alpha)}$ embrasse le plan entier, il existe toujours au moins un angle à ouverture pas plus petite que $\alpha\pi$ et lequel est tel que $B^{(\alpha)}$ dans chaque angle qui tombe là-dedans est limité.

Je ne m'arrêterai pas devant deux autres expressions de $\mathrm{FB}^{(\alpha)}(x)$ qui sont parfaitement analogues à celles obtenues pour l'expression Borel.

Je ne m'arrête pas non plus au terme complémentaire entièrement analogue à celui obtenu pour l'expression Borel. J'indiquerai seulement que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \Phi(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} ,$$

à part d'avoir une étoile de convergence, possède d'autres propriétés qu'on retrouve *mutatis mutandis* chez la série de Taylor.

Si

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \Phi(\omega r e^{i\varphi}) = 0$$

quand $r = r_0$, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \Phi(\omega r e^{i\varphi})\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

converge absolument, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} |\Phi(\omega r e^{i\varphi})|\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

converge, l'angle φ restant fixe, sitôt que $r < r_0$.

Si d'autre part cette même intégrale est absolument convergente pour $r = r_0$, on a

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \Phi(\omega r e^{i\varphi}) = 0$$

tant que $r < r_0$.

En désignant par ϱ_φ la limite supérieure des valeurs de r pour lesquelles φ étant donné

$$\lim_{\varphi=\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \Phi(\omega r e^{i\varphi}) = 0$$

on trouve que l'intégrale converge absolument tant que $r < \varrho_\varphi$ mais diverge tant que $r > \varrho_\varphi$.

L'étoile $B^{(\alpha)}$ peut être rapprochée indéfiniment de l'étoile A, nous l'avons vu, en diminuant suffisamment α. J'ai montré que les expressions qu'on obtenait par les considérations tout élémentaires et qui représentaient $FA(x)$ dans des étoiles aussi rapprochées de A qu'on le voulait, pouvaient être facilement transformées en des expressions qui représentaient $FA(x)$ partout à l'intérieur de l'étoile A même.

On obtient maintenant sans difficulté d'autres expressions valables à l'intérieur de A.

La plus élégante me paraît celle-ci

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} \left(c_0 + \frac{c_1}{\lfloor \alpha.1} x + \frac{c_2}{\lfloor \alpha.2} x^2 + \cdots \right)$$

où la série entière du second membre n'est autre que la fonction déterminante $\Phi(x)$ généralisée. Une autre est la suivant:

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} \left(c_0 + \frac{c_1}{1^{\alpha.1}} x + \frac{c_2}{2^{\alpha.2}} x^2 + \frac{c_3}{3^{\alpha.3}} x^3 + \cdots \right)$$

donnée par M. Lindelöf. Une troisième :

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} \left(c_0 + \frac{\lfloor (1-\alpha).1}{\lfloor 1} c_1 x + \frac{\lfloor (1-\alpha).2}{\lfloor 2} c_2 x^2 + \cdots \right)$$

a été obtenue par M. Le Roy.

On sait à cause du théorème Borel dont j'ai déjà parlé que l'étoile A n'est pas nécessairement le domaine total de convergence de ces expressions.

La question s'il est possible de former une expression d'autre nature que celle pour laquelle le théorème Borel est valable et qui est telle que l'étoile A devient pour des $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$ quelconques une étoile de convergence reste encore indécise.

Si l'on suppose $F(x)$ être $\dfrac{1}{1-x}$ j'ai désigné la fonction $\Phi(x)$ correspondante par $E_\alpha(x)$ et on obtient alors pour cette fonction les deux expressions :

$$E_\alpha(x) = 1 + \frac{x}{\lfloor \alpha.1} + \frac{x^3}{\lfloor \alpha.2} + \cdots$$

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{1}{\alpha} e^t \frac{dt^\alpha}{t^\alpha - x}$$

ayant en même temps :

$$\frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

où le second membre possède l'étoile de convergence que j'ai désignée par $b^{(\alpha)}$.

Pour $\alpha = 1$ on obtient $E_1(x) = e^x$. Or, on sait que la fonction exponentielle possède le caractère suivant. Elle croît au-dessus de chaque limite, quand la variable x tend vers l'infini du côté droit de l'axe imaginaire, tandis qu'elle décroît vers zéro quand x tend vers l'infini en se tenant du côté gauche de cet axe. Quand d'autre part la variable x tend vers l'infini le long de l'axe imaginaire positif ou négatif la fonction e^x dont le module reste toujours l'unité n'a pas de limite determinée.

Dans les recherches qui depuis une trentaine d'années ont été effectuées relativement aux fonctions entières, sujet qui fondé par l'ouvrage de WEIERSTRASS en 1878 et développé ensuite par les mémoires de PICARD en 1880, de POINCARÉ en 1883, de HADAMARD en 1893 et de BOREL en 1897, est devenu un des chapitres les plus importants de l'analyse supérieure, dans ces recherches, dis-je, on avait totalement négligé l'étude des fonctions entières au point de vue que je viens d'alléguer pour la fonction exponentielle, savoir la croissance de ces fonctions dans différents angles ou le long de différents vecteurs rectilignes ou courbilignes entre l'origine et l'infini.

M. BOREL est le premier qui a effleuré cette question. Il propose dans l'Intermédiaire des mathématiciens, Avril 1899, la question suivante:

« Peut-on trouver une fonction dont le module ne dépasse l'unité qu'à l'intérieur d'un angle aussi petit que l'on veut (donné d'avance), ou même seulement à l'intérieur d'une parabole?

La connaissance effective de telles fonctions entières, *s'il en existe*, me paraît pouvoir rendre de grands services; mais il ne serait pas non plus sans intérêt de démontrer rigoureusement que la question posée doit être résolue par la négative ».

La réponse est positive et non négative. Ce sont les fonctions $E_\alpha(x)$ les plus simples de leur espèce qui ont ouvert la nouvelle théorie. Posons $x = re^{i\varphi}$ et regardons comment la fonction $E_\alpha(x)$ se comporte dans des angles différents, quand la variable tend vers l'infini.

Supposons $2 > \alpha > 0$. Si dans ce cas la variable x tend vers l'infini de l'intérieur de l'angle $\alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > -\alpha \frac{\pi}{2}$ le module $|E_\alpha(x)|$ croîtra au-dessus de chaque limite et le module $\left| E_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{i\varphi}{\alpha}}} \right|$ décroîtra indéfiniment en même temps. Si x tend vers l'infini le long d'un des demi-droites $\varphi = \pm \alpha \frac{\pi}{2}$ le module $|E_\alpha(x)|$ s'approchera indéfiniment du $\frac{1}{\alpha}$ tandis que $\left| E_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} e^{\pm i r^{\frac{1}{\alpha}}} \right|$ décroîtra indéfiniment. Si d'autre part la variable x tend vers l'infini dans l'angle $2\pi - \alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha \frac{\pi}{2}$ le module $|E_\alpha(x)|$ décroîtra indéfiniment.

Dans le cas $\alpha \geqq 2$ la fonction $E_\alpha(x)$ se comporte d'une manière différent. Le module $|E_\alpha(x)|$ croît au-dessus de chaque limite quand la variable x tend vers l'infini de l'intérieur d'un domaine qui est limité par l'axe réel négatif. On a du reste

$$\lim_{r=\infty} e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(r) = \frac{1}{r}$$

$$\lim_{r=\infty} e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}} |E_\alpha(x)| = 0 ; \quad 0 < \varphi < 2\pi .$$

La fonction $E_\alpha(x)$ possède pour α complexe des propriétés non moins intéressantes dont j'ai énoncé une partie dans une communication faite à l'Accademia dei Lincei, 1904. M. WIMAN a fait une étude très intéressante sur les zéros de $E_\alpha(x)$, α étant réel ou complexe. On sait quelle est la complication si l'on veut étudier la position des zéros d'une fonction entière qui n'est définie que comme série de puissances.

Grâce à la représentation de $E_\alpha(x)$ par une intégrale complexe, cette étude devient, au contraire, dans le cas de $E_\alpha(x)$ d'une grande simplicité.

Nous avons vu que $E_\alpha(x)$ ne tend vers l'infini que dans l'intérieur d'un angle, susceptible d'être diminué autant que l'on veut en prenant α suffisamment petit. Je me suis donc demandé: Existe-t-il des fonctions qui croissent indéfiniment le long d'une seule demi-droite, mais qui tendent vers zéro quand le module de x croît indéfiniment à l'intérieur du domaine limité des deux côtés de cette demi-droite. La réponse à cette question a été donnée par M. MALMQUIST qui a trouvé que la fonction

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{(\operatorname{Log}\nu)^\alpha}\right)}; \quad 0<\alpha<1$$

possède cette propriété. M. LINDELÖF de son côté et par des considérations propres à lui a montré que la fonction

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\operatorname{Log}\left(\nu+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)^\nu$$

est de la même catégorie. Une fonction ayant la même propriété est

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu(\operatorname{Log}\nu)^\alpha} x^\nu; \quad 0<\alpha<1.$$

Toutes les trois fonctions croissent indéfiniment le long de l'axe réel positif.

La fonction la plus intéressante possédant ces propriétés me paraît être

$$E(x)=\frac{1}{2\pi i}\int^{S} e^{e^z}\frac{dz}{z-x}.$$

L'intégration doit se faire dans le sens direct le long d'un contour ouvert laissant x du même côté que l'origine et constitué aussi bien par deux lignes symétriques par rapport à l'axe réel situées à une distance de l'axe entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ et parallèles à cette axe, que d'un vertical de l'axe qui réunit les deux lignes.

Cette fonction croît vers l'infini de la même manière que e^{e^x} quand x tend vers l'infini le long de l'axe réel positif. Elle tend au contraire vers zéro quand le module de x croît indéfiniment à l'intérieur d'un domaine entourant un angle si petit qu'il soit qui embrasse la partie infinie de l'axe réel positif.

La propriété alléguée chez ces fonctions différentes ne peut appartenir qu'à des fonctions d'un ordre infini, ce qui résulte d'un théorème de M. PHRAGMÉN. À une fonction entière de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$ correspond toujours un angle d'une ouverture qui n'est pas plus petite que $\alpha\pi$ et qui est telle que le module de la fonction augmente au-dessus de chaque limite quand la variable tend vers l'infini dans l'intérieur de cet angle.

Ce théorème n'est du reste qu'un cas spécial d'autres théorèmes très-remarquables relatifs aux propriétés des fonctions entières vis-à-vis de leurs croissances dans des angles différents, théorèmes exposés d'abord par M. PHRAGMÉN et puis par M. M. PHRAGMÉN et LINDELÖF en collaboration (¹).

Une légère modification de ma fonction $E(x)$ conduit à la fonction

$$E(x)=\frac{1}{2\pi i}\int^{S} e^{e^{z}}\, e^{-e^{e^{z}}}\, \frac{dz}{z-x}$$

qui conserve la propriété de tendre indéfiniment et uniformément vers zéro, quand la variable x augmente au-dessus de chaque limite à l'intérieur d'un domaine entourant un angle si petit qu'il soit et qui embrasse la partie infinie de l'axe réel positif, mais qui possède encore la propriété extrêmement remarquable de tendre indéfiniment vers zéro quand la variable croît vers l'infini le long de l'axe réel positif.

On voit que la fonction:

$$E(x)\, e^{-E(x)}$$

possède elle aussi cette même propriété de la fonction $E(x)$.

Si l'on se rappelle ce théorème de WEIERSTRASS concernant les fonctions entières transcendantes, lequel a été le point de départ des découvertes de PICARD et d'autres dans la théorie des fonctions entières, savoir que si R désigne une quantité positive si grand qu'elle soit, il est toujours possible de trouver dans le domaine $|x|>R$ des points pour lesquels la fonction obtient des valeurs rapprochées à volonté de valeurs, l'infini inclus, fixées d'avance d'une manière quelconque, si l'on se rappelle, dis-je, ce théorème, on comprend combien ces propriétés chez la fonction $E(x)$ sont inattendues.

(¹) *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier,* par E. PHRAGMÉN et ERNST LINDELÖF (Acta Math., Tome 31).

A. R. FORSYTH

ON THE PRESENT CONDITION F PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER AS REGARDS FORMAL INTEGRATION

When the organising Committee invited me to deliver a lecture before the Inter-ıtional Congress of Mathematicians at their meeting to be held in Rome, I did not ıre to decline: such an invitation is endowed by the circumstances with the signi-:ance of a command. Availing myself of the freedom allowed to me in the choice ' topic, I propose to speak about the present condition of the theory of partial diffe-ıntial equations of the second order. In consequence of the extensive range of the ıbject, and also because of the want of cohesion between the methods used in its arious branches, necessity has compelled me to make a selection of some particular ortion as the material for my remarks; and accordingly I have selected for discussion ıe present state of the processes of formal integration of the equations. The choice ıus made involves a study of processes which belong to the earlier developments f the theory and leads me, for the present purpose, to omit references to many of ıe quite modern contributions. It is from no lack of appreciation of the work of Ir. DINI, Mr. HILBERT, Mr. PICARD, Mr. POINCARÉ, and Mr. VOLTERRA, to mention nly a few of the illustrious living pioneers in the search for new mathematical :nowledge, that my choice has been made. Nor is it due to any deficient estimate of he constructive importance of matters so diverse as the applications to mathematical ›hysics, boundary problems, the theory of the transformation of the equations, and he methods of approximating to solutions. Still less does the choice imply ignoration ›f the present orthodox methods of progress: nor does it suggest, consciously, any :teady reversion to ancient and superseded methods of analysis. No apology would ›e needed even if current orthodoxy were challenged in the least dogmatic domain of nodern science. But there is no challenge in the choice. My aim is, rather, to recall ıttention to some of what may be called the classical methods of the past, whether ıearer or more remote. I do not think that their usefulness has been quite exhausted; ınd I do think that progress may be achieved by an ampler and a repeated use of :hese methods, if they are subjected to a systematic review.

Moreover, it is the more desirable to secure the fullest utilisation of all the methods of a constructive type because, in the present state of analysis, the inversion of an irresoluble differential operation of the second order seems impossible: and, though the statement may be deemed presumptuous, nothing short of the achievement of that inversion can provide the complete solution of partial equations of the second order. It must be recognised that the aggregate of success, made in attaining definite results while the inverse operation has been actually avoided, is not an impressive total. The important individual successes, which now have spread over more than a century, have been (almost in every case) independent of their predecessors; seldom has a new method been helped by an older one. Hence this branch of the theory (and, after all, the solution of a differential equation is the main problem it offers to the mathematician) is curiously devoid of really consecutive development; it remains strangely fragmentary in form.

Nor can either a critic, or a would-be contributor, easily see how to evolve comparative order out of chaos, unless a new comprehensive method is to be devised. But this last aspiration is too extravagant a demand in the ordinary course of research: short of it, some problems may be propounded which, if solved, will fill notable gaps: and, in these remarks, I intend to sketch a few such problems.

Again, for the purposes of statement, there is an advantage in limiting the problem of the integration of partial equations, even of the second order: so I propose to deal only with those equations, which involve one dependent variable and a couple of independent variables. An artificial generality can sometimes be secured by stating (or by proving) a theorem for a larger number of variables, when there is no essential extension of generality in the transition from the case of two independent variables: such formalities do not constitute any real improvement in the attack made upon unsolved problems. On the other hand, the theory of simultaneous equations involving more than one dependent variable is so attenuated, even when all the equations are of the first order, that it can be neglected for the purpose of this review. Knowledge as to sets of equations, which are of this type and are not extraordinarily special in form, may be forthcoming in the future: substantially, it is almost non-existent at present: and its fragments need not encumber the present discussion. Consequently, my remarks will be limited almost entirely to partial equations, which are of the second order, involving a single dependent variable and two independent variables. Generalisations of form are, to me, mere amplifications of known results, worth having when nothing else can be obtained, yet possessing no more than a minor importance. Generalisations of essence are the addition to learning which, of fundamental importance in themselves, prepare the way for new developments; the search for them is the goal of the mathematician whose aim is the increase of his science.

I.

Manifestly, one early necessity in any review of the present state of knowledge about partial equations of the second order and their integrals is some clear understanding of what is comprised under the phrase « formal integration ». The meaning of that phrase is sufficiently definite when we are dealing with ordinary equations; it implies that relations between the dependent variable and the independent variable have been constructed, which are free from the inverse processes characteristic of the differential equation itself. Thus we may have a primitive of an ordinary equation, in the form of a single relation (transcendental or algebraic, but explicit) between the variables: or it may have been obtained in the form of a couple of relations, expressing the two variables in terms of one parameter: or it may arise in a shape that defies explicit expression of either variable in terms of the other or of a parameter. In all these possibilities, and in others that need not be set out for the purposes of illustration, the integration of an ordinary equation is deemed to be removed from the sphere of its natural difficulty, as soon as the construction of the primitive is made to depend upon operations the performance of which belongs to a less advanced stage of mathematical discipline. For instance, an irresoluble algebraic equation may provide the primitive of an ordinary differential equation.

The same kind of declaration can be made concerning partial equations of the first order, whether they are single, or they constitute a simultaneous system provided that then they involve only one dependent variable. The method for the formal integration of such an equation, or of such a system of equations, can be regarded as complete; that is to say, a process such as JACOBI's, first expounded in his memoir (1) which was published posthumously in 1862, is to be deemed effective because any incident difficulties intrinsically belong to less advanced problems in ordinary equations. These difficulties may not have been solved — some, indeed, have not been solved, even for simple cases — in actual practice: but, in their essence, they do not belong to the problem of partial equations of the first order, however much they may hamper the complete formal resolution of the more advanced problem.

But when we come to the consideration of the formal primitive, and of the formal integration, of an equation that is of the second order, we encounter difficulties of an entirely new kind. It is only in comparatively rare instances that the inverse process of direct integration can be effected: when this operation is possible, the problem is completely resolved. For all other equations, which constitute the innumerable majority and which defy such treatment, we have even to define the integral: and the definitions are mainly based upon the knowledge, which has been provided by the primitives of the equations that are less reluctant in their submission to the processes of solution. Thus the known normal types of integral are few in number. The simplest of them all occurs when the primitive is given by means of a single relation between the variables: the instance is so direct that examples need not be adduced. Another type occurs when the primitive is given by means of a number of equations, which involve eliminable parameters and intrinsically are equivalent to a single equation: as an example, we may take one of the more customary

(1) C. G. JACOBI, *Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. LX, 1862, pp. 1-181); *Gesammelte Werke*, vol. V, pp. 1-189.

forms (due to LEGENDRE, MONGE, and WEIERSTRASS, respectively) of the primitive of the partial equation of minimal surfaces. A third type frequently occurs in the mathematical developments of problems in physics, when the primitive is given by a relation involving definite integrals: instances will crowd upon the memory of those for whom this branch of mathematics has its fascination: and, more generally, the type occurs when the expression of the primitive contains partial (but unattainable) quadratures of any character. We can imagine equations, the primitive of which will require, for its complete explicit expression, the performance of operations that are simpler in their nature than the resolution of the equation in question: for instance, there may be an intermediate integral, in the form of an equation of the first order to be resolved: or there may be compatible equations of the second order, even of order higher than the second, the due association of which with the given equation will supply the necessary means of performing (at some stage or other) the ultimately necessary quadratures.

With all these types of primitives, and with others the formulation of which requires no great effort of mathematical imagination, — it being assumed that immediate and direct integration is impossible —, a primitive is obtained by the use of processes, that sometimes are fragmentary in theory, usually are tentative in practice, and nearly always are indirect in the sense that they are compounded of a number of formal operations having no organic relation with the primitive. In such circumstances, doubts inevitably arise concerning the character of a primitive so obtained. Is the primitive completely comprehensive of all the integrals belonging to the equation? In other words, can the arbitrary elements, which it contains, be specialised so as to turn it into any assigned integral? Further, one process may provide one kind of primitive, and another may (and, for particular equations, it does) provide a different kind of primitive: are these equivalent to one another, due regard being had to their arbitrary elements? or does either include the other? or are they complementary members of a more extensive primitive?

Though attempts have been made to answer some of such questions, my catechism is not a finished production: but two answers are of weight. Thus AMPÈRE propounded [1] a broad definition of a general integral. According to his view, an integral is to be declared general when the only relations, which subsist among the variables and the derivatives of the dependent variable and which are free from the arbitrary elements in the integral, are constituted by the differential equation itself and by equations deduced from it by differentiation. As an initial estimate of an integral aspiring to be called general, AMPÈRE's definition is illuminating and useful: but it proves to be incomplete, on various grounds. A sufficient indication that it has limitations may be given through testing it by means of the equation

$$s = yq ,$$

[1] A. M. AMPÈRE. *Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles* (Journal de l'École Polytechnique, Paris, XVII^{e} Cahier, 1815, pp. 549-611), p. 550.

instanced [1] by Mr. GOURSAT: the equation possesses the integral

$$z = \int_a^y e^{xu} \varphi(u)\, du,$$

which satisfies all the requirements in the formulated definition and yet manifestly does not include the wider integral

$$z = \psi(x) + \int_a^y e^{xu} \varphi(u)\, du.$$

Another definition of the general integral has been propounded [2] by Mr. DARBOUX: it is based upon CAUCHY's existence-theorem. According to this alternative definition, an integral is to be regarded as general, when the arbitrary elements which it contains can be specialised in such a way as to provide the integral established in that theorem. Now the CAUCHY integral is a regular function of the variables, and it is entirely bound up with the imposition of conditions which themselves are limited by the regularity of all the functions concerned: and thus, under this definition, the generality of an integral is made to depend upon the character of another integral which undoubtedly is important but is subject to special limitations. It is not sufficient to represent an integral by a completely regular branch, unless and until we know that such action is canonically permissible; and this stage of knowledge cannot be attained, until the influence and the effect of the singularities have been discussed. Moreover, it is necessary not merely to consider those singularities which are obvious upon inspection but also, by some means or other, to investigate the possibilities of latent singularities. We know that the latter do not occur with an ordinary equation of the first order; yet a parametric value of the independent variable is an essential singularity of an ordinary equation of the second order so simple in form as $y'' = y'^2$. We must not be surprised to find some influence exercised upon partial equations of the second order by unseen singularities: and it may be hinted that a preliminary to a full investigation of the matter for these equations will be a development, more ample than we at present possess, of the theory of functions of more than one complex variable.

Speaking broadly, this summary represents the extent of our present knowledge of the most general primitive of partial equations of the second order. I submit that the knowledge not only is far from complete but also is quite fragmentary: and I contend that, until either the present theory is greatly developed or some new and wider theory has been constructed, we are not in a position to declare what is a comprehensive integral. We are not even justified in declaring that such an integral exists. The investigation may prove difficult, but there can be no doubts as to the

(1) E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes* (Paris, Hermann, t. II, 1898, p. 212).

(2) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal* (t. II, 1889, pp. 97, 98).

need for it: and though it should command no more than a halting success, even that measure of success would mean an addition to knowledge. Shall I be deemed too little respectful, in dealing with the capabilities and the qualities of the general primitive of a partial equation of the second order, as at present known, if I bid them farewell in the words of the great poet of this land?

« Non ragioniam di lor, ma guarda e passa ».

II.

After these remarks, critical of the significance and the range of the general primitive of the partial equation, let me turn to a brief recital of the methods by which an integral is constructed, in one or other of the few sporadic forms that can be obtained. For my immediate purpose, it is not necessary to outline the growth of the methods, in any strict historical sequence: my concern is mainly with their efficiency. Consequently, I merge the rule of MONGE, and the modified but equivalent rule of BOOLE (is it initially due to BOUR or to DE MORGAN?), in an amplification of the method of Mr. DARBOUX: and I therefore restrict this account to what, in my opinion, are the three principal methods of proceeding to the construction of an integral of a partial equation of the second order, whenever (with present knowledge) an integral can be constructed. It must be premised that the practical processes may impose demands upon a combination of intuition and of analytical skill that cannot always be met in actual execution: when there is failure in these respects, the blame does not attach to the method. It must further be premised that added helps and detailed extensions have been supplied to each method, subsequent to ist invention, and that these supplements sometimes are real generalisations; the names of the mathematicians who thus, silently perhaps, perhaps unnoticed in their day, have contributed diffusively to the progress of this branch of our science will find their place in its history though they are omitted from any summary account. With these explanations, I would mention three methods as possibly effective for the formal integration of a partial equation of the second order in a couple of independent variables: in my mind, they are primarily associated with the names of LAPLACE (1), AMPÉRE (2), and Mr. DARBOUX (3). It may seem strange that the name of MONGE is omitted, strange also that other names are omitted: but, as has already been

(1) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris, année 1777; *Œuvres complètes de* LAPLACE, t. IX, pp. 5-68. — The Memoir bears the date 1773.

(2) AMPÈRE, loc. cit. (2); *Mémoire contenant l'applioation de la théorie exposée dans le XVII^e^ Cahier du Journal de l'École Polytechnique, à l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier et du second ordre* (Journal de l'École Polytechnique, Paris, XVIII^e^ Cahier, 1820, pp. 1-188).

(3) G. DARBOUX, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Paris, I^ère^ série, t. VII, 1870, pp. 163-173); loc. cit. (2) (p. 93), t. IV, 1896, pp. 497-504.

pointed out, this lecture does not pretend to deal with the history of its subject: and I consider that MONGE's method (1), for example, even in the more aggressive form given to it by BOOLE (2), is included in the third of the methods which have been indicated.

(I) The method devised by LAPLACE is applicable to strictly linear equations and is effective for them solely when there are two independent variables; it can be used for equations of order higher than the second, though (save for a very few instances) the extension of use beyond equations of the second order still remains to be made. When a linear equation of the second order is propounded for solution, it can be transformed to one or other of the forms

$$s + ap + bq + cz = 0,$$
$$r + ap + bq + cz = 0,$$

where a, b, c are functions of x and y alone: the present aim is not concerned with real or complex character of the necessary transformations, though these are of dominant importance in many investigations.

The second of the reduced forms does not possess a primitive which, if free from partial quadratures, is expressible in finite terms unless the coefficient b vanishes: consequently, because this reduced form is more special than the other, and partly because of my main wish to discuss equations which are susceptible of integration in finite terms without partial quadratures, no further reference to this typical equation will be made.

As regards the first of the forms to which a linear equation can be reduced, there are definite tests — through the evanescence of some invariant in either or in both of a couple of sets of functions, progressively constructed from the three coefficients a, b, c, — by which the equation can be recognised as of finite rank in either or in both of the variables. When the assigned test is actually satisfied, the primitive of the equation is derivable by quadrature and by subsequent direct operations.

Much of the development of the analysis is due to Mr. DARBOUX (3); and IMSCHENETSKY's (4) name demands a place upon the record of progress. The amplified results enable us to frame the primitive of the equation

$$s + ap + bq + cz = 0,$$

when that primitive is of finite « rank » and can therefore be expressed explicitly in finite terms.

(1) *Histoire de l'Académie des Sciences* (Paris, 1784, pp. 118-192).

(2) *Ueber die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung* $\mathrm{R}r + \mathrm{S}s + \mathrm{T}t + \mathrm{U}(s^2 - rt) = \mathrm{V}$ (Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. LXI, 1863, pp. 309-333); and in the Supplementary Volume of his *Treatise on Differential Equations.*

(3) Loc. cit. (2) (p. 93), t. II, 1889, pp. 23 sqq.

(4) V. G. IMSCHENETSKY, *Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes* (Archiv der Mathematik und Physik, vol. LIV, 1872, pp. 209-360).

(II) The results achieved by AMPÈRE, particularly when regard is paid to the date at which they were obtained, are on the grand scale. He devised a method which, for the appropriate equations, is of unlimited generality in scope: he expounded ideas which, even yet, have not received their full development; and his discriminating classification of equations remains unamplified to this day. Unfortunately his method, while general in spirit and in form, has no compelling force: for success in actual working, it depends upon individual skill unassisted by critical tests. In fact, this analytical skill is as much needed in the prosecution of AMPÈRE's method as it is in the work of MONGE, to quote an earlier instance: as much needed as it is in all those processes where intuition, insight, and practice have not been combined and regularised into a system. His « first class » of equations, constituted by those whose integrals are expressible in finite terms without partial quadratures, remains as he selected it. Some attempts at the discussion of the equations, deliberately excluded by AMPÈRE from his first class, have been made. We know the results obtained by Mr. BOREL (1) in expressing the primitives of linear equations by means of definite integrals: we also know Mr. WHITTAKER's primitive (2) of the three-dimensional potential equation in the form

$$\int_0^{2\pi} f(z + ix \cos u + iy \sin u\,,\, u)\, du\,;$$

and similar results have been given for a few other equations of quite special forms. Results also are known and (thanks to the combined labours of many investigators) are adequate for their immediate purpose, in the case of many of the partial equations which arise in mathematical physics. But these equations also are very special in form, and are certainly useful from our point of view as examples and illustrations: they leave, rather they create, a longing for some development of the general theory of equations the primitives of which are best expressed by means of partial quadratures. It is not too much to say that this branch of the subject provides an almost virgin region of exploration to any mathematician who can undertake the labour systematically.

One passing remark may be added. Whenever the method of MONGE (or the equivalent method of BOOLE) can be effectively applied to an equation

$$\mathrm{U}\,(rt - s^2) + \mathrm{R}r + 2\mathrm{S}s + \mathrm{T}t = \mathrm{V},$$

(and both methods are limited to equations of this type), AMPÈRE's method can also be effectively applied; but its efficiency is not limited, either to equations of this type or to equations involving only two independent variables.

(III) The remaining method, to be mentioned as useful in the practical integration of equations of the second order, is due to Mr. DARBOUX; in outline, it was published in 1870. As first given, it related only to equations in two independent

(1) ÉMILE BOREL, *Remarques sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, t. XIX, 1895, Ière partie, pp. 122-126).

(2) E. T. WHITTAKER, *On the Partial Differential Equations of Mathematical Physics* (Mathematische Annalen, vol. LVII, 1903, pp. 333-355), p. 337.

variables: it has been extended to equations in more than two independent variables and to equations of order higher than the second. It is not universally effective: but, if an equation is known to possess a primitive that can be expressed in finite terms without partial quadratures, the primitive can definitely be constructed by the use of the method.

When stated in full, it can be effectively applied to equations which possess an intermediate integral: but this added range of application is merely a lower extension.

The general idea, which is the foundation of the method, is analogous to the idea upon which Jacobi's method for equations of the first order is based; it is the construction of another equation (still better, of two other equations) of the same order as the equation to be integrated and compatible with it. Thus the equation

$$x(r-t)-2p=0$$

does not posses an intermediate integral, in the form of an equation of the first order: but it admits two compatible equations of its own order, viz.,

$$\begin{aligned} r+2s+t &= x\mathrm{F}(x+y), \\ r-2s+t &= x\mathrm{G}(x-y), \end{aligned}$$

where F and G are arbitrary functions; the construction of the primitive, when once the two equations have been obtained, is only a matter of quadratures.

Moreover, the method is progressive: that is to say, when the analysis shews that no compatible equation of the second order can be constructed (and this inference, when valid, can be definitely drawn from the analysis because the subsidiary equations are always a Jacobian system of partial equations of the first order), similar analysis may lead to the construction of compatible equations of higher order. Thus the equation

$$x(r-t)-4p=0$$

does not possess an intermediate integral in the form of an equation of the first order, and it does not admit any compatible equation of its own order; but its does admit two compatible equations of the third order, viz.,

$$\begin{aligned} \alpha+3\beta+3\gamma+\delta &= x^2\,\mathrm{F}(x+y), \\ \alpha-3\beta+3\gamma-\delta &= x^2\,\mathrm{G}(x-y), \end{aligned}$$

where F and G are arbitrary functions, and α, β, γ, δ denote the derivatives of the third order; and again the construction of the primitive, when once the two equations have been obtained, is only a matter of quadratures (1).

(1) It should be remarked that the two examples are adduced only as illustrations of the method: both the equations of the second order, after a simple transformation, can be solved by Laplace's method.

And so on, for higher orders of compatible equations: the method is effective for any equation of the second order which possesses a primitive expressible in finite form free from partial quadratures.

One important gap still remains to be filled. It is true that, when an equation is given and is of the requisite character, the primitive can be constructed by the method: but, so far as I am aware, no test have yet been devised (short of actually submitting the equation to the method) for settling whether a given equation is of the requisite character. What is needed to fill the gap is one of two things: either some test which will shew *a priori* the lowest order of compatible equations (if any) that can be associated with a given equation: or else — and this would be the ampler contribution of new knowledge — the construction of all the partial equations amenable to the method. In fact, what is wanted to complete the success of Mr. DARBOUX's process is the kind of addition which he himself made to LAPLACE's method when he gave the explicit forms of linear equations of finite rank.

III.

Such then are the principal methods hitherto devised for the formal integration of partial equations of the second order. They have been discussed by many mathematicians and they have been subjected to frequent modifications in details: but the substance of the processes remains unaltered. The method which I find most effective, in the sense that it can compel a primitive when one of the requisite type exists, is Mr. DARBOUX's: but as already stated, it applies only to those equations which possess a primitive expressible in finite terms without partial quadratures. It thus appears that, for partial equations of the second order, the practical processes of formal integration are not nearly so completely framed as they are for partial equations of the first order: indeed, the general theory of equations whose primitives necessarily involve partial quadratures has hardly been developed at all.

Now it may happen (or, rather, it happens only too often) that an equation is proposed for integration and declines to be amenable to any one of the practical processes which have been mentioned. In that event, the only available plan for deriving information concerning the primitive is to have recourse to CAUCHY's existence-theorem and to use the primitive which that theorem supplies. Usually it presents itself in an inconvenient form, for it is expressed as a converging series which cannot commodiously be summed: moreover, it is a regular function of the variables and there is no knowledge of the position or the influence of its singularities: still, it is (by hypothesis) the only primitive which can be obtained by the analytical processes under our control.

At present, we can do no more. Our practical resources are exhausted, and we cannot boast that they have been widely effective. But, for that very reason, we come to the boundary of attained knowledge more quickly here than in other fields of mathematics: and so it is more easily possible, here than elsewhere, to indicate unsolved problems which do not appear insoluble and also, perhaps rashly, to hazard opinions as to lines of future progress.

IV.

Something has already been said as to the need of further information concerning the constitution of the full primitive of a partial equation of the second order.

Sometimes we can obtain an immediate integral: it may be « general », as involving an arbitrary function, after the idea of MONGE: it may be « complete », as involving two arbitrary constants: it may be « particular », or « singular », or « special ». Whether general or complete, Mr. DARBOUX's method suffices for its construction, and the result easily allows its character to be discerned. When it is singular, it can be constructed by direct operations upon the given equation itself. When it is particular or special, we have at present to depend almost upon fortuitous chance for its discovery. The investigation as to the relation of the various integrals to one another has not been completely effected for equations of the first order: it is more gravely lacking for the intermediate integrals of an equation of the second order.

Again, we possess the CAUCHY primitive: but its range suffers from the want of completeness imposed by all the limitations which govern its establishment in the existence-theorem. We sometimes can obtain a general primitive, the expression of which involves a couple of arbitrary functions or their equivalent. We sometimes can obtain a complete primitive, as defined by LAGRANGE: and, taking a limited form of that complete primitive, we sometimes can use IMSCHENETSKY's adaptation of the variation of parameters and thereby deduce a general primitive. This tale of integrals, each bearing its own significant name and all duly defined, would appear to suggest that we could obtain a number of solutions of a partial equation of the second order, which probably would be adequate for purposes of application. Yet the facts remain, that the organic relation of all such solutions to one another is only imperfectly known, and that their comprehensiveness is quite unknown. To my mind, there is more than ample reason for an entire review, as well as for a full reconsideration, of the composition, the constitution, and the range, of the primitive of equations of the second order. It may be found, as a result of further inquiry, that there is no single comprehensive primitive for an equation of general form: I am convinced that further inquiry is needed.

Another investigation would be constituted by an attempt to extend the existence-theorem. Those who are familiar with the history of ordinary linear equations will recall the great extension of knowledge initiated by the work of FUCHS and others whereby the character of integrals in the vicinity of singularities of an equation was examined and established. Similarly in the case of ordinary non-linear equations, particularly of those of the first order and for those of the second order, a departure from the restriction to conditions of regularity has led to the discovery of many new results. Hitherto, however, in the case of partial equations, the chief attempts at existence-theorems have restricted themselves to the establishment of regular integrals limited by conditions characteristic of regular functions: and for such equations as are of general form, whether of the first order or of order higher than the first, any discussion of the existence of integrals, even of quite the simplest non-regular types, has been severely neglected. It may be that, at first, progress will be limited to indications somewhat of a general character, inferred partly by intuition and sometimes destitute of the rigour that usually is attained in existence-theorems. Still, it is easily conceivable that some progress could be made; and I think that an attempt in this direction would be not unworthy of trial.

V.

It has already been pointed out that practically all partial equations of the second order, which do not possess primitives expressible in finite terms without partial quadratures, have hitherto received little attention unless they were one or other of the equations ancillary to problems in mathematical physics. Now it may be the fact that there are classes of such equations, having primitives that are most simply represented by means of partial quadratures and that also are expressible in customary non-finite forms free from quadratures. Instances, in the theory of ordinary linear equations are known when the primitives can be expressed, on the one hand by means of definite integrals, and on the other hand by means of asymptotic expansions, the theory of which owes so much to Mr. Poincaré. Instances also are known within the region of partial equations. Thus Mr. Borel has constructed a Cauchy primitive of a general linear equation of the second order, the form of that primitive involving partial quadratures: when his analysis is applied to Fourier's equation of the conduction of heat in one dimension taken in the simplified form

$$r = q\,,$$

the equation is proved to possess a Cauchy primitive given by

$$\pi z = \int_0^{2\pi} e^{x\cos\alpha + y\sin\alpha} \cos(\alpha + x\sin\alpha + y\sin 2\alpha)\, G(\alpha)\, d\alpha\,,$$

where $G(\alpha)$ is an arbitrary function constructed from the arbitrary initial conditions, by direct operations, and is such that

$$\pi f(y) = \int_0^{2\pi} e^{y\cos 2\alpha} \cos(\alpha + y\sin 2\alpha)\, G(\alpha)\, d\alpha\,,$$

$$\pi g(y) = \int_0^{2\pi} e^{y\cos 2\alpha} \cos(2\alpha + y\sin 2\alpha)\, G(\alpha)\, d\alpha\,;$$

the initial conditions, stated in their simplest form, being that $z = f(y)$ and $p = g(y)$ for a zero value of x.

Now these limitations take the form of relations, which define unknown functions in terms of given functions and which occur under a sign of integration; and such relations fall within the comparatively new calculus that bears the name of « integral equations ». My hope and my belief combine to make me think that, at least for linear equations of the second order (though not for that order alone), much knowledge of their primitives may be deduced from the developments of that theory. But whether springing from this source, or from other sources still to be discovered, the knowledge of primitives and of the properties of partial equations, not included in AMPÈRE's « first class » and not being very special equations, is nearly entirely a possession of the future. Little is known: as yet, suggestions are few.

VI.

When account is taken of the strictly moderate success of the practical methods for the formal integration of partial equations of the second order — indeed, of any order higher than the first —, it is certain that one line of advance will be made by the direct construction of classes of equations which possess integrals of generio types. Something has been achieved: more, infinitely more (if such a words is now permitted without precise definition), may remain for achievement: between the past and the future, plenty of problems await solution.

Among equations of the second order, which possess either primitives or intermediate integrals that may lead to primitives, the first place must be assigned to the equations

$$\lambda\,(rt - s^2) + \mathrm{R}r + 2\mathrm{S}s + \mathrm{T}t = \mathrm{V},$$

where λ is either zero or unity. Equations of this form were considered first by MONGE; afterwards by AMPÈRE though, with him, they really were an only incidental example: and, so far as I can make out, the necessary conditions for the possession of an intermediate integral, when the equation is propounded in the preceding form, were first definitely stated by BOOLE.

Further, the type of intermediate integral formulated by MONGE is not the only extensive type which, on the elimination of the arbitrary elements involved, leads to an equation of the second order. Thus the relation

$$\varphi\,(x\,,y\,,z\,,p\,,q\,,a\,,b) = 0,$$

containing two arbitrary constants a and b, yields the derived relations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} + r\,\frac{\partial\varphi}{\partial p} + s\,\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} + s\,\frac{\partial\varphi}{\partial p} + t\,\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0;$$

elimination of the arbitrary constants between the original relation and the two derived relations would formally lead to a partial equation of the second order. Whenever the final equation has been obtained or is obtainable in this manner, the intermediate integral can be reconstructed or is constructible by the use of Mr. DARBOUX's method. Two special, and very simple, examples are provided by the equations

$$(rt - s^2)(sp - rq) - (sq - tp)^2 = 0\,;$$
$$z(rt - s^2)^2 - (tp^2 - 2spq + rq^2)(rt - s^2) + (tp - sq)(sp - rq) = 0\,;$$

may I invite members of the congress to construct the intermediate integrals of these equations?

Whole classes of such equations can be isolated by assuming various forms of the intermediate integral that has been suggested: and, conversely, the application of Mr. DARBOUX's method will, in practice, indicate whether any given equation will belong to any class possessing such an intermediate integral.

More generally, it is right to mention the valuable investigations of Mr. GOURSAT (1) dealing with equations of the second order which possess an intermediate integral of any character. He has obtained a number of classes of such equations: others, of similar special form, can be constructed by a further use of his tests and his results.

VII.

Relative importance of unknown results is difficult to define in any convincing manner: yet I confess that, to me, there seems very great importance in the discrimination of those classes of equations which are amenable to Mr. DARBOUX's method in a finite number of operations. I have already pointed out that the determination of this finite number, by some mode or other, would add substantially to the efficiency of the method in general; but my present suggestion belongs to a different range of enquiry. The question has been attacked by Mr. DE BOER (2) for equations

$$f(r, s, t) = 0,$$

which involve only the derivatives of the second order: it has also been attacked by Mr. GOURSAT (3) for equations of the form

$$s = f(x, y, z, p, q);$$

when, in each case, the limitations upon the form of the function f have to be discussed.

(1) E. GOURSAT, *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, et sur la théorie des intégrales intermédiaires* (Acta Mathematica, t. XIX, 1895, pp. 285-340).

(2) F. DE BOER, *Application de la méthode de DARBOUX à l'intégration de l'équation différentielle* $s = f(r, t)$ (Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, t. XXVII, 1893, pp. 355-412).

(3) E. GOURSAT, *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* (Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 2e série, t. I, 1899, pp. 31-78, 439-463).

Some suggestive results have been obtained by proceeding from a different initial standpoint and by using, once more, the opulent (if, apparently, rather exhausted) processes of such classics as EULER and LAGRANGE. The principle in such methods is to regard the primitive as the origin, and the partial equation as the consequence, of the relation between the primitive and the equation. The assumption of such a principle as one to dominate investigations would be scouted, if too much value were assigned to it in the region of pure theory, and if more than a restricted value were assigned to it in the region of applications to physics; but, at present, the development of equations of the second order cannot dispense with any aid in its spread and its growth.

Among the results which have been obtained by this course of proceeding, prominent mention is due to the construction of all the partial equations which possess a primitive of the type

$$z = f(x, y, X, X_1, \dots, X_m, Y, Y_1, \dots, Y_n),$$

where X is an arbitrary function of x, and Y is an arbitrary function of y. The problem was first outlined by Mr. MOUTARD (1); many detailed results were obtained by Mr. LLOYD TANNER (2); and a complete solution has been given by Mr. COSSERAT (3).

The problem just indicated, general as it seems, is a particular case of a more general problem. The use of AMPÈRE's method of integration indicates that, for equations which it can solve, the most general form of primitive is made up of three equations of the type

$$\begin{aligned} x &= f(u, U, U_1, \dots, U_m, v, V, V_1, \dots, V_n), \\ y &= g(u, U, U_1, \dots, U_m, v, V, V_1, \dots, V_n), \\ z &= h(u, U, U_1, \dots, U_m, v, V, V_1, \dots, V_n), \end{aligned}$$

where f, g, h denote specific functions, u and v are parameters to be eliminated, U is an arbitrary function of u, and V is an arbitrary function of v. In a recent paper (4), I have obtained some of the classes of equations possessing a primitive of

(1) MOUTARD, *Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes* (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. LXX, 1er semestre 1870, pp. 834-738, *Introduction*; 1068-1070, *Rapport de* BERTRAND); *Sur la construction des équations de la forme* $\frac{1}{2}\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \lambda(x, y)$ *qui admettent une intégrale générale explicite* (Journal de l'École Polytechnique, XLVe Cahier, 1878, pp. 1-11).

(2) H. W. LLOYD TANNER, *On the Equation* $\frac{d^2 z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + Z = 0$ (Proceedings of the London Mathematical Society, 1st Ser., vol. VIII, 1877, pp. 159-174).

(3) Loc. cit. (2) (p. 93), t. IV, 1896, pp. 405-421.

(4) A. R. FORSYTH, *Partial Differential Equations for the Second Order having Integral Systems free from Partial Quadratures* (Proceedings of the London Mathematical Society, 2nd Ser, vol. V, 1907, pp. 117-176).

this type. In a subsequent Note [1], I obtained all the classes of equations when the primitive takes the more special form

$$x , y , z = \text{function of } u + \text{function of } v ,$$

characteristic of the well-known primitive of the partial equation of minimal surfaces: but, for these, it is to be noted that the form of the primitive will be conserved and the order of the equation will be unaltered when the variables are subjected to the linear transformations

$$\begin{array}{rl}(x , y , z) = & (a_1 , a_2 , a_3) \, (x^1 , y^1 , z^1) . \\ & (b_1 , b_2 , b_3) \\ & (c_1 , c_2 , c_3)\end{array}$$

I am confident that many other results could be obtained, characteristic of classes of these equations and not merely belonging to particular equations: and I would only add further that, when the indicated problem is completely solved for Mr. DARBOUX's method, it secures the solution of the same problem for AMPÈRE's « first class » of equations.

VIII.

Reference has already been made to the need for further development of those equations whose primitives are best expressed by means of partial quadratures. Before continuing to invite investigation in this range, a warning (which may be deemed sinister) should be given that apparently CAUCHY's existence-theorem ceases to be suggestive: the elements of generality in the primitive provided by that theorem are not recognisable in the quadrature integral. Still, in some instances at least, it happens that the partial quadrature can be effected: when this result is attainable, the primitive changes its superficial character and loses its finite form. Now the aim of the practical methods of integration, to which I have referred, is the construction of an integral in finite terms, if such an integral exists. For the realisation of this aim, conditions (sometimes known, sometimes unknown, according to the type of equation) must be satisfied. But, if these conditions should not be satisfied, the compact form of primitive no longer is to be sought in the explicit unquadratured finite terms. What, then, in these circumstances, is the form (or is any form) of the primitive? To make the question more definite, I submit the simplest instance that occurs to me: when LAPLACE's linear equation $s + ap + bq + cz = 0$ is known not to be of finite rank in either of the independent variables, what is its primitive? Similarly, other equations might be imagined as possessing unquadratured primitives expressible

[1] A. R. FORSYTH, *Note on a Set of Special Classes of Partial Differential Equation of the Second Order* (Proceedings of the London Mathematical Society, 2nd Ser., vol. VI, 1908, pp. 1-15).

only in non-finite terms. To take another hypothetical instance, if Mr. DARBOUX's method has a limiting form when the number of operations, which it requires in practical application, is imagined as being capable of unlimited increase, the equations amenable to the limiting form of the method would be of the kind indicated. The resolution of these problems (and of like problems, which almost suggest themselves) may be beyond the range of possibility in the near future. Their solution, once effected, will led the way into new paths of knowledge.

Is it not time that this lecture should come to an end? During its course I have mentioned some names of those who have contributed to our science. Doubtless I have omitted names which should find a place in any record that pretends to be historical in scope: in the matter of such omissions, which are unwitting and unwilling, I plead for your indulgence. As to the selection of my topics, I have drawn upon ideas which have occurred to me in a long study of this branch of the subject of partial differential equations; and I have abstained from proceeding to simple generalisations, either by way of increasing the number of independent variables or by hinting at the possibilities derivable from equations of higher order. The problems, which I have suggested, are not easy — at least, not all of them; and some, indeed, may be found impracticable. Such as they are, I commend them to your thought and to your consideration.

G. DARBOUX

LES ORIGINES, LES MÉTHODES ET LES PROBLÈMES DE LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

Depuis une trentaine d'années, un changement profond s'est accompli sous nos yeux dans l'orientation des études mathématiques. La théorie des fonctions, puisqu'il faut l'appeler par son nom, attire aujourd'hui, avec une force irrésistible, les recherches des plus jeunes, des plus actifs, des plus inventifs parmi nous. Un esprit nouveau les anime: il nous a déja valu, et nous promet plus encore pour l'avenir, de belles et profondément originales découvertes. Si l'on compare les débuts du XX^{e} siècle aux commencements de celui qui vient de finir, on est obligé de reconnaître qu'il s'est produit depuis 100 ans une transformation radicale dans les méthodes et dans les théories, dans les points de vue et dans les principes directeurs. Le XIX^{e} siècle nous a laissé des écrits mémorables et des travaux de haute portée; mais, dans sa première moitié tout au moins, il s'est contenté de parfaire la tâche qui lui avait été léguée par les grands génies scientifiques des deux siècles qui l'avaient précédé. Celui qui s'ouvre devant nous offre, au contraire, des perspectives vraiment nouvelles, nous présente des champs de recherche entièrement inexplorés. Rien n'arrête les esprits ardents et curieux; ils ne craignent nullement de s'attaquer aux bases mêmes de l'édifice que tant de travaux, si longuement poursuivis, avaient paru établir sur des fondements inébranlables. Et non contents de cultiver notre science, de lui imprimer les directions qu'ils estiment les meilleures, ils ont la prétention, à laquelle j'applaudis pour ma part, d'apporter les contributions les plus originales et les plus précises à cette branche essentielle de la Philosophie qui a pour objet propre l'origine, la nature et la portée de nos connaissances.

En confiant à un homme qui suit ce mouvement avec sympathie, mais qui n'y a point pris part directement par ses écrits, le soin de faire une des conférences inscrites au programme, les organisateurs de notre Congrès lui ont fait un grand honneur, dont il tient à les remercier vivement, car il en sent tout le prix. Mais ils ont voulu montrer aussi, j'imagine, qu'ils n'entendent négliger aucune des branches du savoir mathématique. En science comme ailleurs, plus qu'ailleurs peut-être, parce

14

que les chercheurs sont toujours passionnés, il y a des modes, des entrainements auxquels il convient de ne pas s'abandonner sans réserve. Malgré le nombre croissant des adeptes dé la science mathématique, les anciennes disciplines courent le risque d'être quelque peu délaissées. C'est le propre des réunions comme celle-ci d'opérer une œuvre de coordination, d'attirer en particulier l'attention sur les questions qui appellent des recherches, afin que notre science marche, d'un pas égal et ferme, sans interruptions ni à-coups, vers son but essentiel, qui est la recherche de la vérité.

Ceux qui sont appelés à retenir quelque temps votre attention ont sans doute pour premier devoir de ne choisir que des sujets dont ils puissent parler avec compétence et, si j'ose dire, de première main. En me conformant à cette règle si naturelle, je suis heureux de penser que les questions dont je vous entretiendrai sont au nombre de celles qui ont plus particulièrement attiré l'attention des géomètres de ce pays, et de rendre ainsi hommage au beau génie de l'Italie, où la Géométrie, sous toutes ses formes, a été cultivée, est cultivée aujourd'hui encore, par tant de maîtres éminents. Quelques-uns d'entre eux, Bellavitis, Brioschi, Cremona, Casorati ont été mes guides ou mes amis. Permettez-moi, avant d'entrer en matière, de donner un souvenir à l'un des plus grands et des plus aimables, à Eugenio Beltrami, avec qui j'ai entretenu les relations les plus affectueuses, et qui nous a laissé tant d'écrits où la science la plus profonde s'allie à l'élégance de la forme et à la limpidité de l'exposition.

I.

La théorie des cartes géographiques et les travaux de Gauss.

Comme bien d'autres branches du savoir humain, la Géométrie infinitésimale a pris naissance dans l'étude d'un problème posé par la pratique. Les anciens s'étaient déja préoccupés d'obtenir des représentations planes des différentes contrées de la Terre, et ils avaient adopté l'idée si naturelle de projeter sur un plan la surface de notre globe. Pendant très longtemps, on s'est attaché exclusivement à ces méthodes de projection, en se bornant simplement à étudier les meilleurs moyens de choisir, dans chaque cas, le point de vue et le plan de projection. C'est un géomètre des plus pénétrants, Lambert, le confrère très estimé de Lagrange à l'Académie de Berlin, qui, signalant pour la première fois une propriété commune aux cartes de Mercator, dites *cartes réduites*, et à celles que fournit la projection stéréographique, envisagea le premier la théorie des cartes géographiques sous un point de vue vraiment général, et proposa, avec toute son étendue, le problème de la représentation de la surface terrestre sur le plan avec similitude des éléments infiniment petits. Cette belle question, qui donna naissance à des recherches de Lambert lui-même, d'Euler et à deux très importants Mémoires de Lagrange, fut traitée pour la première fois par Gauss dans toute sa généralité. Le travail que le grand géomètre composa sur ce sujet, et qui fut couronné en 1822 par la Société royale des Sciences de Copenhague, fut suivi, en 1827, des célèbres *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, dans lesquelles se trouvent exposés magistralement les premiers éléments d'une théorie qui devait recevoir de grands développements. Parmi les notions essentielles introduites par Gauss, il faut noter l'emploi systématique des coordonnées curvilignes sur une surface, l'idée de considérer une surface comme un tissu flexible et inextensible, qui a conduit le grand géomètre à son célèbre théorème sur l'invariabilité de la courbure totale, les belles propriétés des lignes géodésiques et de leurs trajectoires orthogonales, la généralisation du théorème d'Albert Girard sur l'aire du triangle sphérique, toutes ces vérités concrètes et définitives qui, comme bien d'autres résultats dus au génie du grand géomètre, sont destinées a conserver, à travers les âges, le nom et la mémoire de celui qui les a, le premier, dévoilées.

Entraîné par tant d'autres travaux, Gauss n'a pas développé les conséquences des principes qu'il avait introduits. Par exemple, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qu'il a donnée pour les familles des trajectoires orthogonales des lignes géodésiques contenait en germe les découvertes fondamentales que Jacobi a développées plus tard sur la Mécanique analytique. J'ai aussi montré, dans mes *Leçons*, qu'en combinant très simplement trois équations linéaires du second ordre qui se trouvent dans les *Disquisitiones* et auxquelles satisfont les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, on pouvait former avec toute la généralité possible l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui admettent un élément linéaire donné, et obtenir ainsi la solution complète d'une question qui devait être proposée, 35 ans plus tard seulement, comme sujet de prix par l'Académie des Sciences de Paris. Mais Gauss avait en vue dès ses premiers travaux, et il le dit expressément dans la préface du Mémoire couronné par l'Académie de Copenhague, seulement la construction des cartes géographiques et les applications de la théorie générale à la Géodésie. Il est revenu sur ces sujets, dans deux Mémoires qui portent les dates de 1843 et 1846, et qui peuvent figurer sans désavantage à côté des *Disquisitiones*. Reprenant, avec plus de précision, une méthode que Prony avait publiée en 1808 pour remplacer notre globe elliptique par une sphère convenablement choisie, il fait connaître, pour la construction des cartes géographiques d'un grand pays, des méthodes simples et pratiques qui ont été fidèlement suivies en Allemagne et qui mériteraient à coup sûr d'être adoptées dans les autres pays. La belle publication des *Reliquia* de Gauss que nous devons à M. Félix Klein nous a appris d'ailleurs que le grand géomètre n'avait cessé de poursuivre ses études sur les surfaces en général, et qu'il avait obtenu notamment la notion si essentielle de ce que nous nommons aujourd'hui la *courbure géodésique*. On a aussi retrouvé un court fragment relatif à la détermination des surfaces applicables sur une surface donnée; il semble pourtant que Gauss n'ait jamais porté son attention, d'une manière bien suivie, sur le problème que paraissaient suggérer ses premiers travaux: la détermination des surfaces qui admettent un élément linéaire donné.

II.

Les premiers travaux des géomètres français Monge, Dupin, Lamé, Jacobi.

A l'époque où GAUSS publiait en Allemagne les recherches dont nous venons de parler, la France était, pour ainsi dire, en pleine floraison géométrique. Par ses conceptions si originales sur la génération des surfaces et sa création de la géométrie descriptive, par la rénovation qu'il avait su imprimer aussi à la géométrie analytique, MONGE avait exercé une influence que LAGRANGE constatait avec quelque regret. On connaît le mot célèbre échappé à l'illustre géomètre, au sortir d'une leçon de MONGE à l'École Polytechnique: « Avec sa géométrie descriptive et ses générations de surfaces, ce diable d'homme se rendra immortel ». MONGE ne se contentait pas de faire des découvertes; il faisait aussi des élèves, ce qui vaut quelquefois mieux. L'un d'eux, le mieux doué peut-être, CHARLES DUPIN, sut compléter l'œuvre de son maître en le suivant dans toutes les directions, en mariant comme lui la géométrie analytique à la méthode infinitésimale; en introduisant, à côté de la notion des lignes de courbure due à MONGE, celles de l'indicatrice, des tangentes conjuguées et par suite des lignes asymptotiques, qui sont toutes *projectives* comme nous disons aujourd'hui, et par là ont acquis un rôle prépondérant dans les recherches les plus récentes. LAMÉ, de son côté, cet apôtre de la philosophie naturelle, s'élevait peu à peu à la notion des coordonnées curvilignes de l'espace, à celle des paramètres différentiels, qui lui avait été suggérée par ses études de Physique mathématique et qu'il développa d'une manière magistrale dans un Mémoire inséré en 1833 au Journal de l'École Polytechnique. Bientôt la belle découverte de JACOBI sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde à trois axes inégaux venait apporter un nouvel aliment aux recherches de géométrie. CHASLES, rappelant un de ses théorèmes les plus élégants d'après lequel deux surfaces homofocales du second degré paraissent se couper à angle droit, de quelque point de l'espace qu'on les regarde, montrait que ce théorème aurait pu lui donner, tout au moins, une intégrale première de l'équation différentielle du second ordre dont dépend la détermination des lignes géodésiques de l'ellipsoïde. Grâce à une fertilité de moyens qui n'a jamais été dépassée, il parvenait, avec les seules ressources de la Géométrie, à intégrer, non seulement l'équation différentielle des géodésiques, mais aussi ces systèmes de deux équations différentielles auxquelles JACOBI avait donné le nom d'équations *abéliennes*. Une foule de géomètres, parmi lesquels il faut comprendre LIOUVILLE, FRENET, PUISEUX, JOSEPH BERTRAND, ALFRED SERRET, MINDING, JOACHIMSTHAL, BOUQUET, PAUL SERRET, et plus particulièrement OSSIAN BONNET, à qui ses recherches assignent presque le rôle d'un créateur, prenaient part avec ardeur à ce travail d'élaboration, qui devait mettre sur pied une des branches les plus intéressantes et les plus élégantes de la Géométrie moderne. Tous ces maîtres devaient se préparer à eux-mêmes de dignes successeurs. J'aimerais à faire ici l'analyse de leurs principales découvertes; mais il convient que je me rappelle que le temps nous est mesuré à tous; il faut que je n'abuse pas de votre attention et que j'arrive le plus tôt possible aux recherches dont on s'occupe en ce moment; je ne puis donc que renvoyer ceux d'entre vous qui désireraient plus de détails sur la période un peu ancienne que je dois abandonner, à la conférence que j'ai eu l'honneur de faire devant le Congrés international de Saint-Louis des États-Unis d'Amérique, sous la présidence de l'astronome illustre qui est venu prendre part à nos travaux.

Dans le reste de cette causerie, je me bornerai donc à suivre l'exemple que nous donnait, il y a 8 ans, M. Hilbert à notre Congrès de Paris, et j'indiquerai, dans une revue rapide des principales branches de la géométrie infinitésimale, quels sont les problèmes dont la solution nous importe le plus, et qu'on peut espérer de résoudre dans un avenir plus ou moins prochain.

III.

Des méthodes en géométrie infinitésimale. Rôle de la méthode analytico-géométrique.

Un mot d'abord sur les méthodes qu'il convient de suivre dans l'étude des problèmes de géométrie infinitésimale. Ici, comme dans la géométrie des éléments finis, on a essayé de construire un corps de doctrine entièrement indépendant de l'Analyse. Jacobi avait donné l'exemple en faisant revivre les infiniment petits, proscrits par Lagrange; Joseph Bertrand et Ossian Bonnet l'ont suivi dans cette voie. Aujourd'hui on n'a guère le temps, semble-t-il, de suivre deux méthodes différentes pour étudier les mêmes questions; et l'on s'est attaché presque exclusivement, en géométrie infinitésimale, aux méthodes analytiques qui emploient les axes coordonnés; je suis loin pour ma part de le trouver mauvais, sous la réserve toutefois que la recherche sera vivifiée et inspirée sans cesse par l'esprit géométrique, qui ne doit jamais cesser d'être présent. Pour expliquer ce que je viens de dire, permettez-moi de vous faire part d'un de mes souvenirs les plus anciens et les plus précis. Il y a plus de 30 ans, un analyste des plus distingués m'apporta un travail, qu'il venait de terminer, sur la surface développable circonscrite à la fois à une sphère et à une surface du second degré. Ses formules étaient élégantes, symétriques et savamment déduites; elles l'avaient conduit à cette conclusion, qui l'avait beaucoup surpris, que l'arête de rebroussement de sa développable était rectifiable algébriquement. Je n'eus aucune peine à lui montrer, sans calcul, que la découverte dont il était si fier et qui d'ailleurs ne manquait pas d'intérêt, était évidente géométriquement, et pouvait même être étendue à toute développable circonscrite à une sphère; car elle avait son origine dans cette propriété qu'a l'arête de rebroussement d'être une des développées de la courbe de contact de la développable et de la sphère. C'est ce que mon ami analyste aurait reconnu de lui-même, s'il n'avait pas été trahi et abandonné, pour un court moment je l'espère, par le dieu de la Géométrie.

Suivons donc les méthodes analytiques, mais ne les suivons pas aveuglément. Comme les grandes routes, elle nous fournissent souvent les voies les plus sûres; mais les chemins de traverse ont bien leur charme, et ils nous éclairent beaucoup mieux sur les véritables connexions des lieux et des choses.

On reproche quelquefois aux méthodes analytiques leur longueur et leur obscurité; on a même soutenu que l'utilisation incessante des coordonnées avait quelque chose d'artificiel. L'emploi du trièdre mobile et de la méthode des mouvements relatifs, combiné avec un choix judicieux des coordonnées curvilignes, échappe le plus souvent à cette objection. Il met en évidence les relations étroites et fondamentales qui lient la Géométrie à la science du mouvement et fournit la signification mécanique, si essentielle à connaître, des éléments géométriques qui se présentent dans la recherche.

Il est un autre avantage encore que l'Analyse présente dans ces études. Quoi qu'en disent certaines personnes, plus ou moins étrangères à notre science, le mathématicien n'est nullement une machine à déduire ou à calculer. Ses travaux mettent en jeu *toutes* les facultés de son esprit. La finesse, l'esprit d'invention, l'imagination, lui sont peut-être plus nécessaires que l'ordre et la rectitude dans le raisonnement. Mais en créant lui-même, comme il arrive souvent en Géométrie, l'objet même de ses études, en introduisant des êtres et des éléments nouveaux, il doit se garder pardessus tout de ces spéculations sans portée, dont le moindre inconvénient est de tenir une place qui pourrait être mieux occupée. C'est ici que l'Analyse intervient avec sa vertu propre. Elle n'a pas de signes, selon Fourier, pour les notions confuses; elle n'a pas non plus de méthodes pour les recherches oiseuses et sans avenir. Par contre, elle met entre nos mains, quand nous avons su trouver la bonne voie, tous les éléments qui nous sont nécessaires pour le développement de nos conceptions.

IV.

Nécessité d'introduire franchement et complètement les imaginaires en Géométrie. Exemples à l'appui.

J'ajouterai, et sur ce point j'ai été heureux de recueillir plus d'une fois l'avis conforme et l'adhésion de Sophus Lie, que le géomètre ne doit jamais reculer devant l'emploi franc et complet des éléments imaginaires. Avec Cauchy, les imaginaires ont imposé leur empreinte victorieuse sur toutes les parties de l'Analyse. Leur place, au même titre et plus encore qu'en Analyse, est marquée en Géométrie. Il m'est arrivé dans ma jeunesse de rencontrer quelques professeurs attardés qui levaient les bras au ciel quand on s'aventurait à leur parler du cercle imaginaire de l'infini.

Ces temps sont passés et personne ne conteste plus l'importance des notions sur les imaginaires introduites dans la géométrie des éléments finis; elles sont même devenues si banales qu'on ne songe plus à citer leur premier inventeur. Je me souviens que mon ami LAGUERRE, ayant commencé un de ses Mémoires par une phrase telle que celle-ci: « On sait que tous les cercles du plan peuvent être considérés comme passant par deux points à l'infini », se vit vertement reprendre par PONCELET. « On sait, oui l'on sait, disait l'illustre géomètre, mais vous auriez bien dû dire qui vous a appris cela ». En géométrie infinitésimale, comme dans la géométrie de PONCELET, l'emploi des imaginaires ne sera pas moins fécond qu'en Analyse. Mais il a tardé beaucoup plus à s'imposer. Pourquoi? Je l'ignore. Est-ce parce que, selon quelques-uns, la Géomètrie doit toujours avoir en vue des objets réels et aboutir à des constructions? Peut-être. En tous cas il y a beaucoup de progrès à faire à cet égard. MONGE nous avait pourtant donné l'exemple; sur ce point comme sur plusieurs autres, il a été en avance sur son époque, puisqu'il n'a pas hésité à consacrer tout un chapitre de son Ouvrage à la surface imaginaire dont les rayons de courbure sont égaux et de même signe. Ces imaginaires, devant lesquels il ne reculait pas, ont permis à ses successeurs d'interpréter et de vivifier cette intégration des surfaces minima, qui est une de ses plus belles découvertes, et de constituer ainsi le chapitre le plus attrayant et le plus parfait de la géométrie infinitésimale. N'est-ce pas aussi grâce aux imaginaires qu'on a pu déduire de deux théorèmes célèbres de M. WEINGARTEN, qui ne dépareraient pas le grand Mémoire de GAUSS, la détermination complète des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution?

Je veux encore indiquer un autre exemple dans lequel les imaginaires nous dévoilent la véritable origine de certaines propriétés, inattendues au premier abord. Vous savez que, par des procédés très variés, on a pu compléter certaines recherches de MONGE, et déterminer toutes les surfaces dans lesquelles les lignes de courbure de l'un des systèmes, ou des deux systèmes, sont planes ou sphériques. Considérons, pour plus de netteté, les surfaces à lignes de courbure planes dans un système. On constate des relations singulières entre les lignes de courbure planes d'une même surface. Si l'une d'elles seulement est algébrique, toutes les autres sont algébriques. Si l'une d'elles est un cercle, toutes les autres sont nécessairement des cercles. C'est en faisant intervenir les imaginaires qu'on remonte à la source de ces curieuses relations. Imaginons qu'on déforme la surface développable enveloppe des plans des lignes de courbure, en supposant que chaque plan tangent de cette développable entraîne avec lui la ligne de courbure qui y est contenue. Il est facile d'établir que, parmi toutes les déformations ainsi considérées, il y en aura une, *nécessairement imaginaire*, dans laquelle toutes les lignes de courbure viendront se placer sur une développable *isotrope*, c'est-à-dire circonscrite au cercle de l'infini. Par suite, si une des lignes de courbure de la surface nous est connue, toutes les autres seront nécessairement égales à des sections planes convenablement choisies de la développable isotrope qui contient cette première courbe. Cette remarque donne évidemment la clef des relations que nous avions signalées. Elle nous fournit en même temps la construction la plus simple des surfaces à lignes de courbure planes. On prendra deux développables (D), $(\varDelta)$ dont la seconde soit isotrope, puis on supposera que (D) se déforme, ses plans tangents entraînant avec eux les sections qu'ils ont déterminées dans la développable ($\varDelta$). Les positions nouvelles de ces sections engendreront la surface cherchée.

V.

Quelques problèmes de Géométrie infinitésimale.
Les courbes à torsion constante.

Des méthodes passons aux problèmes. Je commencerai par le suivant:

Les courbes à torsion constante se rencontrent dans un grand nombre de recherches. D'après un curieux théorème d'ENNEPER, les surfaces à courbure constante ont pour lignes asymptotiques des courbes à torsion constante. De même, les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution, dont nous avons déjà parlé, peuvent être dérivées, par une élégante construction géométrique, de courbes imaginaires dont la torsion est constante. Pour que la surface soit algébrique, il faut et il suffit que la courbe à torsion constante dont elle dérive soit algébrique. C'est également de la détermination des courbes algébriques à torsion constante que dépend la construction des surfaces minima algébriques circonscrites à une sphère.

Il y aurait donc un intérêt réel à obtenir, parmi ces courbes à torsion constante que J.-A. SERRET nous a appris à déterminer par trois quadratures, celles qui sont algébriques ou, seulement, unicursales. Même bornée aux courbes unicursales, la recherche se présente sous la forme d'un problème d'Algèbre supérieure, bien digne de tenter un disciple de LAGRANGE et de CAUCHY. Malheureusement, malgré des efforts partiels qui nous ont donné des résultats, assez étendus d'ailleurs, la solution complète et générale de cette belle et difficile question reste encore à trouver.

VI.

Les surfaces à courbure constante et leurs transformations.

Parmi les surfaces non développables du second degré, le paraboloïde de révolution et deux autres paraboloïdes imaginaires tangents au cercle de l'infini sont les seules dont nous sachions obtenir la déformation la plus générale. Lors du concours que l'Académie des Sciences de Paris institua en 1860 sur la déformation des surfaces, et qui réunit des concurrents tels quel BOUR, OSSIAN BONNET, M. CODAZZI et un autre géomètre italien dont BELTRAMI m'a confié le nom, BOUR avait annoncé qu'il avait pu, en appliquant la célèbre méthode de variation des constantes due à LAGRANGE, déterminer toutes les surfaces applicables sur une surface quelconque de révolution et, en particulier, sur la sphère. BOUR est mort peu de temps après, sans avoir pu confirmer le beau résultat qu'il avait obtenu; et son Mémoire, conservé chez JOSEPH BERTRAND, a péri dans les incendies de la Commune. C'est en vain que, reprenant la voie ouverte par BOUR, on a essayé de reconstituer sa méthode. Mais les efforts effectués dans cette direction ont été loin d'être infructueux. Il nous ont fait connaître en particulier des procédés de transformation qui permettent de faire dériver, d'une surface applicable sur la sphère ou, ce qui est la même chose, d'une surface à courbure constante, une suite illimitée des surfaces de même définition. Ces méthodes de transformation des surfaces à courbure constante sont d'une simplicité et d'une élégance qui méritent de nous arrêter quelques instants.

Tous les pays ont pris part à leur élaboration progressive, depuis l'Italie, qui a commencé, jusqu'à l'extrême nord de l'Europe qui a donné le couronnement. On a réussi à faire dériver de toute surface à courbure constante donnée une nouvelle surface de même courbure constante, qui dépend de deux paramètres; de sorte que la répétition de la méthode fournit sans cesse des surfaces nouvelles, qui contiennent dans leur équation des paramètres en nombre aussi grand qu'on peut le désirer.

Analytiquement tout se réduit à la considération d'un système, pour ainsi dire, unique en Analyse. La détermination des surfaces à courbure constante dépend de l'intégration de l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 2\omega}{\partial\alpha\, \partial\beta} = \sin 2\omega,$$

et il suffit de lui adjoindre le système suivant

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\theta+\omega)}{\partial\alpha} &= a\sin(\theta-\omega), \\ \frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial\alpha} &= \frac{1}{a}\sin(\theta+\omega), \end{aligned} \right.$$

où a désigne une constante quelconque, et qui ne peut avoir lieu *qu'entre deux solutions de l'équation* (A).

Si donc ω désigne une solution *quelconque* de l'équation (A), le système (B) en fournira une nouvelle solution θ, et cette solution nouvelle contiendra à la fois a et la constante introduite par l'intégration. Si on la porte dans le système (B) en considérant cette fois ω comme l'inconnue et changeant la valeur de a, on pourra recommencer, et l'on voit que l'application répétée de la méthode introduira deux constantes nouvelles à chaque opération. Comme m'écrivait SOPHUS LIE dans son langage pittoresque, on aura ∞^∞ surfaces. Et il a été établi depuis, par des méthodes élégantes, que, si l'on peut faire le premier pas et effectuer, *pour toute valeur de a*, la première application de la méthode, les intégrations suivantes ne présenteront plus aucune difficulté.

LIE était un géomètre trop inventif et trop original pour ne pas être frappé de la singularité et de l'intérêt de ces méthodes de transformation, qu'il avait contribué beaucoup à mettre sur pied. Il s'efforça, par une tentative hardie, d'en tirer parti pour la détermination des surfaces à courbure constante

Il aimait à me confier ses recherches et leurs résultats. Je reçus un jour de lui une carte postale où il m'annonçait qu'il avait intégré l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante. Je m'empressai, tout joyeux, de le féliciter. Hélas! SOPHUS LIE avait été victime d'AMPÈRE.

Dans ses Mémoires fondamentaux sur les équations aux dérivées partielles, AMPÈRE s'est attaché à bien préciser les objets de ses recherches; et, à une époque où l'on n'avait sur les diverses espèces de solutions: solutions particulières, générales, complètes, singulières, que les notions un peu vagues dues à EULER et à LAGRANGE, il avait cru trouver une définition irréprochable de l'intégrale la plus générale dans le critère suivant: *De toutes les solutions de l'équation proposée, elle sera la seule qui ne satisfera à aucune autre équation aux dérivées partielles que celle proposée et toutes celles qu'on en déduit par différentiation.* Or LIE avait démontré, par quel procédé je ne m'en souviens plus, que l'ensemble des surfaces à courbure constante qu'on peut faire dériver d'une surface donnée, par l'emploi répété des transformations précédentes, satisfait à la condition posée par AMPÈRE. Il en concluait qu'il avait l'intégrale générale, et il avait peut-être raison. Malheureusement, c'est AMPÈRE qui avait tort.

Chez un géomètre tel que LIE, les méprises même sont fécondes. Il ne tarda pas à m'écrire, en me montrant par des exemples ingénieusement choisis, le vice de la définition d'AMPÈRE; et il prit sa revanche par une autre voie, en appliquant cette fois une méthode d'intégration que j'avais donnée autrefois, et qui doit fournir l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles, toutes les fois que cette intégrale peut être exprimée en termes finis, ou plus exactement, toutes le fois qu'elle appartient à la première classe, suivant la définition d'AMPÈRE. Étudiant l'équation (A) et l'équation tout à fait équivalente

$$\text{(C)} \qquad s^2 - rt = a^2(1 + p^2 + q^2)^2,$$

LIE montra que la méthode ne peut réussir. Ce résultat négatif est des plus précieux. Sans être décisif, il laisse peu d'espoir de voir confirmer un jour la découverte que BOUR, ce géomètre pourtant si profond, nous avait annoncée [1].

[1] L'étude que LIE avait faite au point de vue qui nous occupe de l'équation (A) a été étendue depuis, par un jeune géomètre, à l'équation plus générale

$$s = f(x, y, z).$$

Elle l'a été aussi à l'équation plus générale

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

VII.

La notion de l'intégrale générale, telle qu'elle a été donnée par Cauchy.

Dans cette causerie, que je poursuis d'une manière quelque peu irrégulière, j'ai été amené à vous parler de l'intégrale générale telle qu'AMPÈRE avait été conduit à la concevoir. CAUCHY, qui s'est attaché lui aussi à introduire la précision, et quelquefois même une trop grande précision, dans l'étude des différents problèmes du Calcul intégral, a levé toutes les difficultés relatives à ce sujet, en assujettissant chaque intégrale à remplir certaines conditions qui achèvent de la déterminer, et permettent en quelque sorte de la distinguer de toutes les autres. Cette manière vraiment neuve de poser les problèmes de Calcul intégral a été la source d'immenses progrès. Les conditions initiales choisies par CAUCHY étaient peut-être un peu restrictives; mais, par de simples changements de variables, il a été facile de les élargir, et j'ai proposé de désigner sous le nom de *problème de* CAUCHY, qui a été unanimement adopté, celui qui consiste à déterminer et à caractériser l'intégrale qu'on cherche par des conditions initiales choisies d'une manière aussi large que possible. Par exemple, s'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles à *deux* variables indépendantes, la surface intégrale sera assujettie à passer par une courbe donnée quelconque, quand l'équation sera de premier ordre; si l'équation est du second ordre, la surface intégrale devra en outre être inscrite le long de la courbe à une développable donnée; et ainsi de suite pour les ordres supérieurs. Ce nouveau point de vue devait conduire, de la manière la plus précise et dans tous les cas, à la notion des *caractéristiques*, qui était restée si vague dans les travaux de MONGE: *les caractéristiques sont les assemblages pour lesquels le problème de* CAUCHY *devient indéterminé.*

VIII.

Application aux surfaces minima. Le problème de Plateau.

Le problème de CAUCHY, tel que nous venons de le formuler, a été résolu pour les surfaces minima, à l'aide de formules élégantes qui portent le nom de leur auteur et sont universellement employées.

Il faut bien se garder de le confondre avec cette recherche d'une tout autre nature et qui a pour objet la détermination d'une surface minima *continue* passant par un contour fermé. Sur ce point, il faut le reconnaître, nous sommes moins avancés que les physiciens. Pour obtenir la surface cherchée, PLATEAU se contentait de réaliser matériellement le contour qu'il avait en vue, et de le plonger ensuite dans une dissolution du liquide glycérique. Les géomètres n'ont pu rivaliser encore avec ces réalisations expérimentales. Leurs efforts ingénieux et habiles leur ont valu une foule de succès partiels. Les progrès réalisés dans l'étude du calcul des variations, les perfectionnements apportés à l'analyse moderne et à la méthode si féconde des approximations successives, leur permettront bientôt, j'en ai le ferme espoir, de résoudre dans toute sa généralité le beau problème que leur a légué PLATEAU, et d'enregistrer ainsi à leur actif un nouveau et brillant succès.

IX.

Progrès et problèmes de la théorie des cartes géographiques. Représentation géodésique. Problème de Tchebychef.

Comme l'étude des surfaces minima, la théorie des cartes géographiques a vu naître bien des problèmes intéressants. On s'est proposé, par exemple, de rechercher si la correspondance établie par plans tangents parallèles entre deux surfaces quelconques peut donner une représentation conforme de l'une des surfaces sur l'autre; cette recherche a été étendue à la correspondance qui s'établit, entre deux surfaces quelconques, par les points de contact d'une sphère qui doit être tangente à l'une et à l'autre. En étudiant une propriété de la projection centrale, comme LAMBERT avait étudié une propriété de la projection stéréographique, BELTRAMI a été conduit à s'écarter du point de vue qui, entre les mains de LAGRANGE et de GAUSS, avait donné des résultats si parfaits, et à rechercher s'il est possible de faire une carte d'une surface donnée, assujettie à cette unique condition que les géodésiques de la surface soient représentées par les droites du plan. Son élégante analyse lui a montré que ce mode de *représentation géodésique* ne pouvait intervenir que dans le cas des surfaces à courbure constante. A leur tour, les études et les résultats de BELTRAMI ont été étendus à la correspondance entre deux surfaces quelconques et nous ont valu des propriétés nouvelles de cette forme de l'élément linéaire qui porte les noms de LIOUVILLE et de JACOBI.

Un géomètre russe, TCHEBYCHEF, qui occupe une place à part dans le développement des Mathématiques modernes, nous a proposé un nouveau et curieux sujet de recherche qu'on peut présenter comme il suit, en le généralisant quelque peu. Imaginons un filet tel que ceux dans lesquels les dames enferment leur cheveux, ou tel encore qu'en portent les personnes qui se rendent au marché. Quelles que soient leurs formes et leurs dimensions, ces filets sont toujours composés de deux séries de fils rattachés en leurs points de rencontre, de telle manière que, pour chaque maille, les angles seuls des côtés puissent varier, mais non leurs longueurs. Imaginons qu'on pose un pareil filet sur une surface ou, ce qui revient au même, qu'on introduise un corps solide, terminé par une surface quelconque, à l'intérieur du filet, et proposons-nous de déterminer la forme que prendra le filet. Analytiquement, cela revient à mettre l'élément linéaire de la surface considérée sous la forme

$$ds^2 = A^2\, d\alpha^2 + C^2\, d\beta^2 + 2AC \cos\theta\, d\alpha\, d\beta,$$

où A et C désignent des fonctions données de α et de β et θ une fonction *inconnue*. Tchebychef s'est borné au cas où l'on a

$$A = C = 1$$

et, suivant sa coutume, il s'est contenté de rechercher des solutions approchées de son problème. Il n'avait pas remarqué que, dans le cas de la sphère, sa solution complète et générale peut être rattachée à la détermination des surfaces à courbure constante négative; en ce sens que chaque surface à courbure constante négative donne, par la représentation sphérique de ses lignes asymptotiques, une solution du problème de Tchebychef pour la sphère, et *vice versa.*

X.

Les surfaces à courbure constante négative et les formes quadratiques de différentielles. Géométrie non euclidienne.

Vous le voyez, mes chers Collègues, c'est en vain que nous voudrions échapper à ces surfaces à courbure constante, qui paraissent, au premier abord, si particulières. C'est le cas de répéter le vers du poète:

Je l'évite partout, partout il me poursuit.

Elles se présentent à nous, dans toutes les recherches que nous entreprenons, en vertu sans doute de ces propriétés d'invariance qui sont mises en évidence par le théorème de Gauss. Mais il faut le remarquer aussi, leur étude emprunte un intérêt exceptionnel aux relations si étroites qu'elle présente avec ces recherches sur les principes de la Géométrie qui ont été inaugurées par les travaux de Lobatschefsky, de Gauss, de Bolyai et de Riemann. Ce beau et vaste sujet, auquel s'attachent passionnément les géomètres modernes, mériterait à lui seul une étude spéciale. Je me bornerai, pour le moment, à remarquer que Riemann, en le rattachant à la considération d'une forme quadratique de différentielles, a introduit par cela même, en Géométrie infinitésimale, un élément d'étude et de coordination appelé à jouer dans toutes les recherches le rôle le plus essentiel.

Riemann et Beltrami avaient ouvert la voie: l'un en définissant, l'autre en étudiant, d'une manière détaillée, la notion des espaces *à courbure constante*, qui est, en quelque sorte, adéquate à la géométrie non euclidienne. Depuis, Lipschitz et Christoffel ont envisagé les formes quadratiques de différentielles dans toute leur généralité; et leurs savantes recherches, accueillies partout avec grande faveur, ont été poursuivies avec beaucoup de succès dans ce pays. Il faut s'en réjouir, car les formes quadratiques de différentielles interviennent pour ainsi dire partout. On sait le rôle capital qui leur a été assigné dans la mécanique analytique par les immortelles découvertes de LAGRANGE ; pour se borner à la Géométrie, on les obtient, non seulement en formant les éléments linéaires des surfaces et des espaces à un nombre quelconque de dimensions, mais aussi en calculant le moment de deux droites infiniment voisines, l'angle de deux sphères infiniment voisines, etc. Leur étude a été beaucoup avancée en ce qui concerne la partie différentielle et invariantive ; on a même rattaché à leur considération un nouveau genre de calcul qui forme une extension curieuse du calcul différentiel. On a commencé aussi à étudier dans toutes sa généralité le premier et le plus élémentaire des problèmes de cette théorie : je veux dire la recherche des conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour que deux formes soient *applicables* l'une sur l'autre. Dans sa partie délicate et difficile, cette recherche se ramène évidemment à celle des formes quadratiques qu'on peut transformer en elles-mêmes par une suite continue de substitutions. Ici, les magistrales découvertes de LIE sur la théorie des groupes ont trouvé, et trouveront sans doute encore, un beau champ d'application.

XI.

Réduction des problèmes les uns aux autres. Procédés de récurrence. Surfaces isothermiques. Déformation des surfaces du second degré.

Les progrès récents de l'Analyse nous ont conduit à envisager sous un point de vue tout nouveau l'intégration des équations différentielles et aux dérivées partielles. Nous savons aujourd'hui qu'on doit le plus souvent renoncer à les intégrer dans le sens ancien du mot ; qu'il faudra les étudier directement, les classer, les ramener les unes aux autres, rechercher, s'il y a lieu, les transformations qui les reproduisent. Cette étude commence à peine, et elle exigera de longs efforts ; mais, dès à présent, il est permis d'affirmer que la géométrie infinitésimale offrira, le moment venu, à l'Analyse les applications les plus intéressantes, et surtout les exemples les plus précieux.

Nous avons déjà signalé les méthodes de transformation des surfaces à courbure constante. On pourrait presque dire que ces procédés de récurrence sont de règle en Géométrie, car on les retrouve partout.

Considérons, par exemple, les surfaces *isothermiques*, c'est-à-dire les surfaces dont les lignes de courbure forment un système isotherme. Leur détermination dépend d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, qu'on a reussi à écrire sous les formes les plus symétriques, mais dont l'intégration constitue peut-être le problème le plus difficile qu'on rencontre en Géométrie. On en connaît, il est vrai, de nombreuses intégrales particulières : les surfaces du second degré, les cyclides les plus générales, les surfaces de révolution, celles dont la courbure moyenne est constante, certaines surfaces à lignes de courbure planes dans un système, etc., sont des surfaces isothermiques; mais, en comparaison de l'intégrale générale qui, suivant la vieille terminologie, doit comprendre quatre fonctions arbitraires, ces solutions particulières ne comptent pour ainsi dire pas. Ici toutefois, comme dans la théorie des surfaces à courbure constante, certaines constructions géométriques des plus simples permettent de rattacher, par de simples quadratures, à chaque surface isothermique, toute une série de surfaces isothermiques nouvelles, dans la définition desquelles figurera un nombre de constantes de plus en plus grand. On pourrait donc être tenté de reprendre les efforts de Lie, pour déduire de cet ensemble de solutions l'intégrale générale elle-même, en s'appuyant, non plus sur les conceptions d'Ampère, mais sur la définition correcte de l'intégrale générale, telle qu'elle a été donnée par Cauchy. Permettez-moi d'ajourner ce genre de considérations, et de passer à un autre exemple d'un intérêt tout actuel, dans lequel il s'agit, non de la transformation d'une équation en elle-même, mais de la réduction d'un problème à un autre, différent et plus simple.

Il semble que, dans son développement, la Géométrie infinitésimale soit appelée à suivre les mêmes voies que l'analyse de Descartes. La déformation de la sphère avait d'abord occupé les géomètres; la marche naturelle de leurs études les a amenés à s'occuper de la déformation des surfaces générales du second degré. Deux voies différentes ont été suivies pour l'étude de cette belle question. Les uns se sont attachés, et ont réussi, à constituer des procédés de récurrence, des méthodes de transformation analogues à celles qu'on avait données pour les surfaces à courbure constante. Les autres ont essayé de rattacher le problème nouveau qui leur était posé au problème, plus simple dans son énoncé, de la déformation de la sphère, et ils y sont parvenus dans un assez grand nombre de cas: pour le paraboloïde quelconque, pour toutes les quadriques de révolution, et même pour la surface plus générale assujettie à l'unique condition d'être tangente *en un seul point* au cercle de l'infini. Ce résultat peut-il s'étendre encore à la surface quadrique la plus générale? La réponse à cette question, qu'elle soit affirmative ou négative, sera également intéressante dans les deux cas. Je crois bien qu'elle ne tardera pas à être donnée; mais pour le moment je suis réduit à dire, en parlant latin dans la Ville Eternelle,

Adhuc sub judice lis est.

XII.

Les équations linéaires aux dérivées partielles et leur rôle en Géométrie infinitésimale.

Il semble bien, d'après ce qui précède, que la Géométrie infinitésimale soit destinée à devenir en quelque sorte une illustration de cette partie du calcul infinitésimal qui traite des équations aux dérivées partielles. Et cependant je ne vous ai encore rien dit des relations étroites, presque surprenantes, qu'elle présente avec les équations *linéaires* aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Ces équations, qui se présentent aussi, mais sous une forme différente, en Physique mathématique, avaient été déjà considérées par LAPLACE, qui avait donné, pour les intégrer, une méthode vraiment originale. Leur étude analytique a été reprise par RIEMANN et MOUTARD. On a perfectionné leur théorie, constitué pour elles une théorie spéciale des invariants. En particulier, celles dont les invariants sont égaux forment un groupe d'un intérêt exceptionnel. MOUTARD avait indiqué, pour les intégrer quand cela est possible, une méthode qui laissait prise aux objections, mais qui s'est trouvée exacte. De sorte que les recherches géométriques ont contribué ici encore à perfectionner les théories analytiques.

Elles nous ont même posé des problèmes auxquels l'Analyse n'aurait pas songé d'elle-même. C'est ainsi que, parmi ces équations linéaires, se sont révélées comme particulièrement dignes d'être formées et étudiées celles qui possèdent un ou plusieurs groupes de solutions particulières liées par une équation quadratique. Par exemple, la recherche des surfaces à courbure constante se ramène à celle des équations de la forme

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = z\,K(\alpha, \beta),$$

qui possèdent trois solutions dont la somme des carrés est égale à l'unité. Celle des surfaces isothermiques se ramène également à celles des équations de même forme possédant cinq solutions pour lesquelles la somme des carrés est nulle, etc.

Parmi les questions dont la solution dépend exclusivement de l'intégration d'une équation linéaire, deux doivent être plus particulièrement mises en évidence : le problème de la représentation sphérique et le problème de la déformation infiniment petite. Il se ramènent l'un à l'autre, et leur solution peut aujourd'hui être considérée comme complètement achevée.

En particulier, la théorie de la déformation infiniment petite constitue la première application un peu étendue d'une méthode qui paraît appelée à un grand avenir.

XIII.

Le système auxiliaire en Géométrie. Déformation finie et déformation infiniment petite.

Étant donné un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles qui contient un certain nombre de fonctions inconnues, il y a lieu de lui adjoindre un système que nous avons appelé *auxiliaire* et qui détermine les solutions du système infiniment voisines d'un système quelconque, donné à l'avance, de solutions. Le système auxiliaire est évidemment linéaire. Son étude, relativement facile, fournit les renseignements les plus précieux sur le système primitif lui-même, et sur la possibilité d'en obtenir l'intégration. Par exemple, en ce qui concerne la déformation d'une surface, l'application des critères de LAPLACE à l'équation auxiliaire permettra de reconnaître s'il est possible d'intégrer l'équation aux dérivées partielles dont dépend la solution complète et générale du problème.

La considération de la déformation infiniment petite permet encore d'appliquer au problème de la déformation finie un théorème de CAUCHY qui, aujourd'hui encore, est à peine connu, mais qui excitait l'admiration de LIOUVILLE, ce juge si sévère et si difficile, surtout pour les travaux de CAUCHY.

Le grand géomètre a montré qu'on peut étendre aux équations aux dérivées partielles un théorème démontré depuis longtemps par LAGRANGE pour les équations linéaires aux dérivées ordinaires et intégrer, *par de simples quadratures*, tout système linéaire non homogène d'équations aux dérivées partielles, quand on a obtenu l'intégrale générale de ce même système, rendu homogène par la suppression des seconds membres des équations.

D'après cela, si l'on veut trouver les surfaces qui résultent de la déformation d'une surface donnée, on pourra, comme je l'ai montré dans mes *Leçons*, résoudre avec une approximation aussi grande qu'on le voudra, et par de simples quadratures, le problème de la déformation finie, toutes les fois qu'on aura intégré l'équation linéaire de la forme (D) dont dépend la solution complète du problème de la déformation infiniment petite.

XIV.

Élargissement des cadres de la Géométrie. Nécessité de méthodes générales et uniformes permettant les simplifications nécéssaires.

J'espère, mes chers Collègues, vous avoir montré que, même en nous bornant aux parties anciennes et déjà explorées, nous trouvons devant nous bien des questions qui peuvent tenter, et les géomètres, et les analystes. Mais que dire de cette partie presque intacte de la Géométrie qui nous a été léguée par les travaux de PLÜCKER, de SOPHUS LIE et de leurs successeurs. Il ne leur a pas suffi d'introduire le plan et de le considérer, au même titre que le point, comme un élément de l'espace. La théorie des polaires réciproques avait rompu les digues. Au point et au plan sont venus s'adjoindre successivement la ligne droite, la sphère, le cercle, puis les courbes et les surfaces accompagnées de leurs plans tangents; on a même réuni ces êtres déjà si complexes en assemblages, qu'on s'est plu à considérer eux-mêmes comme des éléments primordiaux. L'étude des relations infinitésimales est à peine commencée pour cette nouvelle Géométrie. C'est tout au plus si l'on a ébauché la théorie de la ligne droite et de la sphère, reliées l'une à l'autre par l'admirable transformation de SOPHUS LIE. Le cercle et l'hélice ont donné lieu à quelques recherches; on a, en quelque sorte, isolé et étudié certaines classes de congruences rectilignes, parmi lesquelles il faut signaler les congruences *isotropes* de RIBAUCOUR, qui jouent un rôle si élégant dans la théorie des surfaces minima; on a perfectionné en plusieurs points la théorie des systèmes de coordonnées curvilignes et, en particulier, des systèmes triples de surfaces orthogonales. Mais les progrès ultérieurs dépendront exclusivement de l'ordre, de l'uniformité et de la généralité qu'on parviendra à introduire dans les méthodes. C'est à ce prix seulement qu'on pourra réaliser, dans cette branche, les simplifications sans lesquelles tout progrès deviendrait impossible. J'ai confiance qu'ici comme ailleurs, l'extrême généralité des problèmes engendrera la simplicité des solutions.

W. von DYCK

DIE ENCYKLOPÄDIE
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

Die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften sollte das Thema bilden, über welches Herr FELIX KLEIN vor Ihnen sprechen wollte. Zu unser aller lebhaftem Bedauern ist Herr KLEIN verhindert, nach Rom zu kommen. Wenn das Organisationskomité des Kongresses mich eingeladen hat, an Herrn KLEIN's Stelle zu treten, so geschah dies in Würdigung des Umstandes, dass in der Tat ein Bericht über die Encyklopädie bei dem internationalen Charakter, den das grosse Unternehmen besitzt, recht eigentlich den Verhandlungsgegenständen dieses Kongresses gemäss ist.

Ich darf die Formulierung des Zieles, welches die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften verfolgt hier voranstellen, wie sie in dem bei Inangriffnahme des Werkes im Jahre 1895 ausgegebenen Programm niedergelegt worden ist:

« Aufgabe der Encyklopädie soll es sein, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Litteraturangaben die geschichtliche Entwickelung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie soll sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik beschränken, sondern auch die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete mit berücksichtigen und dadurch ein Gesamtbild der Stellung geben, die die Mathematik innerhalb der heutigen Kultur einnimmt ».

Lassen Sie mich hier vor allem betonen, wie die Durchführung dieses Programmes allein möglich geworden ist durch den allseitigen Anteil, welchen das Werk von Anfang an gefunden hat, welcher ihm schon zu Beginn des Werkes einen grossen und bedeutenden Kreis von Mitarbeitern gesichert hat; lassen Sie mich im besonderen aussprechen, wie sehr die deutschen Herausgeber dankbar sind für die hervorragende Mitarbeit gerade auch der nichtdeutschen Fachgenossen, unter denen sich auch die besten Namen Italiens befinden; lassen Sie mich hervorheben, wie es nur durch solche Unterstützung möglich geworden ist, für jeden Artikel den geeignetsten Referenten unter den auf dem Gebiete schöpferisch tätigen Gelehrten zu finden, wie nur so die Darlegungen dem universellen Charakter aller wissenschaftlichen Arbeit gerecht werden konnten.

Mag durch diese Vielheit der Autoren und der Anschauungen nach mancher Richtung eine gleichmässige Behandlung des Stoffes verloren gegangen sein, an persönlicher Färbung, an Lebendigkeit der Darstellung, an aktuellem Interesse für die zur Zeit im Vordergrunde stehenden Fragen hat die Darlegung gewonnen.

Sei es gestattet, die Aufgabe der Encyklopädie an einem Gleichnis zu kennzeichnen: Es soll eine zusammenhängende Reihe von Bildern geschaffen werden, welche uns eine weithingebreitete, reichgegliederte, vielgestaltige Gegend in ihren grossen Zügen vor Augen führt. Ob die Bilder diesen Zweck erfüllen, hängt zuvörderst ab von der Wahl der Ausschnitte aus der Natur, vom Standpunkt, von dem aus wir sie betrachten, von der Beleuchtung, die wir wählen, vom Format, das jeweils der Bedeutung des Objektes angepasst sein muss. Darüber hinaus aber müssen wir, wenn anders uns die Gegend lebendig erstehen soll, von den Künstlern, die sich der Aufgabe widmen, die Betonung des inneren Zusammenhanges, des Aufbaues fordern. Der Künstler muss jeweils das Bedeutsame und Charakteristische herausheben, muss Einzelheiten zurücktreten lassen, Nebensächliches übergehen. Wenn auch die Aufgabe gebunden ist, im Vergleich zu einer freien Schöpfung künstlerischer Phantasie, wir werden es dennoch billigen und wünschen, dass der Künstler, bei aller Treue in der Wiedergabe der Natur, *seine* Auffassung — etwa in einer stilisierten Darstellung — zum Ausdruck bringt, dass er *seine* Art, die Dinge zu sehen, *seine* Methode, sie zu schildern, bewusst oder unbewusst dem Bilde einprägt. Eine Reihe photographischer Aufnahmen, ohne die Belebung durch die Farbe, in zu gleichmässiger Betonung der Objekte, mit einem Vielerlei von Details, einer unsicheren Gliederung würde der Absicht nicht genügen.

Mit dieser Allegorie mag die Aufgabe der Encyklopädie genugsam bezeichnet sein, um so mehr, als eine Darlegung des gesamten Planes und ein historischer Rückblick über die bisher geleistete Arbeit in der Einleitung zum ersten Bande niedergelegt ist. Ich möchte im Folgenden versuchen, ohne irgendwelchen Anspruch auf Vollständigkeit einen kurzen Ueberblick über den gegenwärtigen Stand der Encyklopädie zu geben, und damit einzelne Bemerkungen verknüpfen über die Wandlungen, welche die fortschreitende Ausgestaltung mit sich gebracht, und über die Frage, inwieweit die Absichten und Aufgaben des Werkes in seinen bis jetzt vorliegenden Abschnitten erfüllt sind und erfüllt werden konnten.

Nach dem ursprünglichen Plane sollte die Anordnung des Stoffes eine alphabetische sein; mit dem Uebergang zu einer systematischen war nicht bloss einer Zersplitterung in völlig unübersehbares Stückwerk begegnet, sondern eine zusammenfassende und methodische Darlegung eigentlich erst ermöglicht und damit die Aufgabe an Bedeutung verändert und gehoben. Vielleicht hat der ursprüngliche Plan bei der ersten Disposition insofern noch nachgewirkt, als der Rahmen des Werkes, wie wir im Einzelnen noch sehen werden, ursprünglich zu enge bemessen worden ist. Mit ausnahme weniger Aufsätze, insbesondere H. Burkhardt's, dessen konzise und prägnante

Schreibweise bei engster Begrenzung grösstmöglichen Inhalt bietet, und mit Ausnahme der Probeartikel, deren Themata einer knappen Behandlung vorzugsweise zugänglich waren, hat jeder Aufsatz den im Entwurf vorgesehenen Raum überschritten. Mit A. PRINGSHEIM's grundlegenden Artikeln ist das System der Ueberschreitungen sozusagen legalisiert worden, und wir müssen der Verlagsbuchhandlung von B. G. TEUBNER auch an dieser Stelle aufrichtig danken, dass sie der Notwendigkeit einer wesentlich breiteren Entwicklung, wie all den vielen Wünschen, die immer wieder an sie herangetreten sind, in liberalster Weise entgegengekommen ist, und zwar schon zu einer Zeit, in der der Erfolg des Unternehmens noch keineswegs gesichert war.

Zu dem Anwachsen des Umfanges der einzelnen Artikel kam aber auch, da wo es der Inhalt bedingte, eine Vermehrung ihrer Zahl durch Teilung. Der Fortschritt der Wissenschaft machte es weiter erforderlich, an manchen Stellen ergänzende Artikel einzufügen. Waren hierdurch schon Umstellungen bedingt, so traten noch Aenderungen der Anordnung aus äusseren Gründen, im Interesse des Fortganges der Herausgabe hinzu. Für die Ungleichheit, die durch solche Wandlungen entsteht, für die Gefährdung des Aufbaus und der Uebersicht müssen wir die Nachsicht der Leser erbitten. Möge sie gewährt werden im Hinblick darauf, dass das Werk ein lebendiges ist und in lebensvoller Entwicklung begriffen, dass es sich vervollkommnet indem es fortschreitet. Wenn nach Jahren die letzten Hefte des Werkes abgeschlossen sind, wenn das gesamte Gebiet einmal durchmessen ist, dann muss wohl die Arbeit auf's neue beginnen. Dann wird es möglich sein, auf Grund der gesammelten Erfahrungen die jetzt vorhandenen Lücken auszufüllen, die Raumverteilung richtiger zu bemessen, Unterschiede auszugleichen. Aber auch dann wird sich wie heute das Werk als ein Werdendes, in stetem Fluss befindlich kennzeichnen, wenn anders es auch dann wieder ein Bild geben soll vom augenblicklichen Inhalt der wissenschaftlichen Forschung, ihrer Verwertung in den angewandten Disciplinen, ihrer Bedeutung für unsere Naturerkenntnis und dadurch ein Gesamtbild von der Stellung der mathematischen Wissenschaften innerhalb der Kultur.

* * *

Indem ich mich nunmehr zu dem Fortschritt der Veröffentlichungen im einzelnen wende, stelle ich die Gruppe der drei ersten, der Analysis und Geometrie, also der Mathematik im engeren Sinne gewidmeten Bände voraus.

Auf dem internationalen Mathematikerkongress in Heidelberg, vor vier Jahren, konnte der erste, von FRANZ MEYER herausgegebene Band, Arithmetik und Algebra (im weitern Sinn genommen) umfassend, vollendet vorgelegt werden, ein wohlverdienter Erfolg für den Redakteur, dessen Initiative die ursprüngliche Konception des ganzen Werkes zu danken ist.

In diesem Bande kamen die soeben bezeichneten Schwierigkeiten der Begrenzung des Umfangs zuerst zum Austrag. Auf der andern Seite bot der Hauptinhalt des Bandes für die Darstellung ein im grossen Ganzen wohldurchforschtes Gebiet, bei dem die Vielheit der Einzel- Erscheinungen und- Methoden schon zu einem geschlossenen Ganzen von einheitlichem Gepräge zusammengezogen erscheint. So konnte einmal die rein systematische Darstellung gewählt werden, für die ich HILBERTS « Theorie der algebraischen Zahlkörper » als das glänzendste Beispiel anführen will, bei dem auf eine historische Darlegung um so eher verzichtet werden konnte, als der ausführliche Bericht, den HILBERT in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veröffentlicht hat, ein genaues Verzeichnis der Literatur enthält. Auf der anderen Seite seien etwa PRINGSHEIMS Aufsätze über Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse angeführt als Beispiele, in welchen von einer Uebersicht über die geschichtliche Entwicklung des Gebietes ausgegangen wird, der sich die Darstellung der Methoden anreiht.

Von dem weiteren Inhalt dieses Bandes möchte ich nur noch auf die Abschnitte hinweisen, welche speziellen Rechenmethoden, wie sie vor allem die angewandte Mathematik fordern muss, gewidmet sind — Ausgleichungsrechnung, Interpolation, Technik des numerischen und graphischen Rechnens mit Einschluss der Rechenapparate — und auf die Darlegung des Versicherungswesens, welches ja auch auf diesem Kongress zum ersten Male in Rahmen der mathematischen Disciplinen erscheint.

Für die Benutzbarkeit des Bandes war die Gestaltung des Registers von besonderer Wichtigkeit und hat der sorgsamsten Ueberlegung um so mehr bedurft, als dasselbe auch für alle folgenden Bände zum Muster dienen sollte. Man kann die Hauptaufgabe des Registers, dem Kundigen ein rasches und sicheres Nachschlagen zu ermöglichen, als gelöst betrachten. Der Uebersichtlichkeit kommt der knappe Raum zu statten (auf einen Bogen Text kommt etwa eine Seite des Registers). Auch an sich genommen ist das Register von Interesse, ganz abgesehen von der Vielgestaltigkeit der Wortbildungen, die uns darin entgegentreten, und die nicht immer die Billigung der Philologen finden würden. Es gewähren die den Stichworten zur Unterteilung zugefügten Beiworte wenigstens zum Teil eine Einsicht in die Wandlungen und Erweiterungen, die ein Begriff je nach seiner Anwendung im Lauf der Zeit erfährt, und deuten damit neue Zusammenordnungen verschiedener Gebiete an — ein Zweck, der ursprünglich durch die alphabetische Anordnung des ganzen Werkes miterfüllt werden sollte.

Es sei gestattet, hier einige Bemerkungen einzufügen über die französische Bearbeitung der Encyklopädie, für welche unter Mitarbeit der Autoren des Originalwerkes, die hervorragendsten Gelehrten Frankreichs ihre Beteiligung zugesagt haben. In Heidelberg konnte der Leiter der Herausgabe Herr J. MOLK das erste Heft vorlegen und in begleitenden Worten die Grundsätze der Bearbeitung bezeichnen. Heute sind 7 Hefte aus den einzelnen Abschnitten des ersten Bandes erschienen. Sie bestätigen die Erwartungen, welche man von dem klärenden Einfluss einer über die Grenzen der Nation hinausgreifenden Vereinigung von Arbeitskräften verschiedener Auffassung und verschiedener Tradition hegen durfte. Die Aufsätze, in einer etwas von der deutschen verschiedenen Zusammenfassung erschienen, haben wesentliche Ergänzungen erfahren, welche der individuellen Auffassung des Bearbeiters gegenüber dem Autor Rechnung tragen, und Erweiterungen, welche die Entwicklung der Encyklopädie im Vergleich zum ersten Plane als notwendig erscheinen liess. Besonderes Gewicht ist vom Herausgeber auf die Ausdehnung der literarischen Nachweise gelegt worden. Der durch diese verdienstvollen und erwünschten Ergänzungen beigebrachte

Stoff wird durch eine kritische Gliederung und Sichtung an Wert noch gewinnen. Für eine spätere Neubearbeitung der Encyklopädie aber wird gerade die so überaus sorgfältige französische Ausgabe die bedeutendste Vorarbeit darstellen. Man muss die grossen inneren Schwierigkeiten kennen, die es macht, alle solche für die Bearbeitung notwendigen Massnahmen einzuleiten und durchzuführen. Nur dann kann man im vollen Masse würdigen, wie Autoren und Bearbeiter eigene Wünsche dem sachlichen und allgemeinen Interesse nachgestellt haben, was der Herausgeber in umsichtiger, unermüdlicher Tätigkeit, was durch ihre Opferwilligkeit die unter der Devise « viribus unitis » verbundenen Verleger TEUBNER und GAUTHIER-VILLARS geleistet haben.

Der zweite Band, redigiert von H. BURKHARDT und W. WIRTINGER umfasst die Analysis im engeren Sinne und bildet den Centralkern der Bände der reinen Mathematik. Die Gliederung des Bandes in zwei gleichwertige Teile, die Analysis reeller und die Analysis komplexer Grössen entspricht der gegenwärtigen Bedeutung des Gebietes reeller Variabler als des allgemeineren, der sich das wegen seiner besonderen Beziehungen einfachere und darum früher entwickelte der Funktionentheorie komplexer Variabler einordnet. Ich erwähne, um die Fülle des Stoffes zu bezeichnen, der hier darzulegen ist, nur einzelne neuere Probleme: Einerseits die an die LIE'schen kontinuierlichen Transformationsgruppen anschliessenden Arbeiten, die Randwertaufgaben, die ihre Ideenbildung vorzugsweise der mathematischen Physik verdanken, die Weiterbildung der Variationsrechnung auf der durch WEIERSTRASS geschaffenen Grundlage, dann die Theorie der Funktionalgleichungen, speziell der Integralgleichungen, welche ihrerseits wieder in mannigfachster Weise auf die genannten Probleme zurückwirkt. Auf der andern Seite die Theorie der automorphen Funktionen, die Fruchtbarmachung der CANTOR'schen Mengenlehre für die Funktionentheorie.

Bei einer ersten Bearbeitung war die Gruppierung nach Gegenständen für die Zwecke der Encyklopädie die natürlich sich darbietende, neben welcher die Entwicklung einzelner in sich abgeschlossener Kreise von Methoden mehr zurücktrat. Wo solche eine weitergehende selbständige oder eine historische Bedeutung gewonnen haben, wie vor allem die auf WEIERSTRASS zurückgehende elementare Behandlung der analytischen Funktionen, werden Ergänzungen einzugreifen haben. Die neueren ausführlichen, besonders von französischer Seite geförderten Untersuchungen über ganze Funktionen schliessen ja vielfach an die WEIERSTRASS'sche Theorie an. Es ist dabei aber interessant zu sehen, wie gerade hier elementare Fragen durch die Modulfunktionen ihre Erledigung finden (z. B. der PICARD'sche Satz). Andererseits sind auf dem Gebiete der reellen Funktionen alte Fragen allgemeiner Art zum Abschluss gekommen und neue entstanden. Ich darf statt weiterer Andeutungen auf die Vorträge, die PICARD in Amerika über die moderne Entwicklung der Analysis gehalten hat, hier verweisen. Sie geben eine Reihe von Beispielen wesentlichen Fortschrittes, welche seit der Zeit der ursprünglichen Disposition der Encyklopädie entstanden sind, und welchen in ergänzenden Artikeln Rechnung zu tragen sein wird. In der französischen Ausgabe konnten diese Erweiterungen auf Grund einer wesentlich anderen Gruppierung des Stoffes grossenteils schon jetzt Berücksichtigung finden.

Im dritten Bande, welcher, von FRANZ MEYER redigiert, die gesamte Geometrie umfasst, kommen die engen Beziehungen und Analogieen, welche alle Gebiete der Mathematik unter einander darbieten, am reichsten zum Ausdruck. Ist doch seit Descartes jedes Gebiet der Grössenlehre (die ihrerseits wieder ihre Terminologie zumeist geometrischen Vorstellungen entlehnt) für die Geometrie fruchtbar gemacht worden. So haben neben der Weiterbildung der Differentialgeometrie, von deren Entwickelung uns soeben Herr Darboux berichtet hat, die Algebra, die Zahlentheorie, die Gruppentheorie, die Mengenlehre, die mehrdimensionalen Probleme von der Mitte des vorigen Jahrhunderts an die Geometrie um ganz neue Gebiete bereichert. Auf der andern Seite hat sich das Interesse den Untersuchungen über die Tatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen und über die Tragweite der einzelnen Axiome wieder zugewendet. Ich möchte weiter noch ein Gebiet besonders herausgreifen, das der algebraischen Kurven und Flächen und ihrer Integrale, im Zusammenhang mit der Analysis situs. An diesen zunächst in Deutschland erwachsenen, in Italien durch die Lebensarbeit Cremona's geförderten Problemen hat sich neuerdings der Wetteifer französischer und italienischer Geometer mit Erfolg betätigt und — ich verweise auf das gestern vorgetragene Referat des Herrn Segre zum Guccia-Preis — neue, an überraschenden Resultaten reiche Untersuchungen gezeitigt.

Solchem lebendigen Interesse für die geometrische Forschung verdanken wir es, wenn sich gerade der geometrische Band der Encyklopädie der hervorragenden Mitarbeit unserer italienischen Fachgenossen erfreut.

***

Ich komme zu kurzen Betrachtungen über die zweite Gruppe der Bände IV bis VI der Encyklopädie, in denen die gegenseitige Stellung und Wechselwirkung der rein mathematischen Disciplinen und ihrer Anwendungen zu umfassender Darstellung gelangen soll. Es ist mir eine besondere Ehre, der Versammlung im Auftrag der beiden Redacteure, Felix Klein und Conrad Mueller und der Verlagsbuchhandlung den soeben abgeschlossenen ersten Teil des vierten Bandes überreichen zu können. Er umfasst die Grundlegung der Mechanik und die elementare Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ich möchte es als ein glückliches Omen bezeichnen für den Fortschritt und Erfolg der auf die angewandte Mathematik bezüglichen Bände der Encyklopädie, dass eine erste Stufe ihrer Bearbeitung gerade bei Gelegenheit dieses Kongresses in Italien erreicht erscheint. Ist doch Italien das Vaterland des Archimedes, dessen schöpferische Kraft alle Gebiete der mathematischen Wissenschaften umspannt, das Geburtsland der Renaissance, von dem aus jene gewaltige Woge neuer Anschauungen und neuer Impulse in Wissenschaft und Kunst in die Welt gegangen ist, das Vaterland Galileis, des Schöpfers der experimentellen Physik, Leonardo da Vinci's, des Ingenieurs, das Vaterland von Lagrange, der der modernen analytischen Mechanik ihre Form gegeben hat!

Auf den Inhalt zunächst des vierten Bandes der Mechanik einzugehen, so ist die Abgrenzung gegenüber dem fünften, der Physik gewidmeten, naturgemäss bis zu einem gewissen Grade willkürlich. Hier ist die Mechanik der Kontinua noch mithereingezogen, insbesondere die gesamte Elastizitätslehre. Sie beansprucht für uns ein doppeltes Interesse; einmal nach ihrer technischen Bedeutung, andererseits nach ihrer hohen theoretischen Entwickelung, wie sie im Anschluss an Betti und Beltrami gerade von den modernen italienischen Mathematikern besonders gepflegt worden ist.

Schon in den bei der gestrigen feierlichen Eröffnung des Kongresses gehaltenen Reden ist der Bedeutung des gegenseitigen Durchdringens mathematischer Gedanken und Formulierungen, naturwissenschaftlicher Anschauungen, technischer Probleme besonders gedacht worden, die auch in der Gliederung der Sectionen des Kongresses zum Ausdruck kommt. Hier dehnt sich ein unendliches Arbeitsfeld, in welchem von Tag zu Tag sich neue Quellen erschliessen, die der Fassung in die mathematische Form bedürfen. Die Mathematik wird dabei genötigt, ihr Rüstzeug immer auf's neue zu stählen und zu vervollkommnen. Es gewinnen von diesen Gebieten ausgehend ihre Methoden selbständiges Leben, verlieren aber dabei leicht, in Folge ihrer Entwickelung nach der abstrakten Seite, den Zusammenhang mit der Bearbeitung der Tatsachen. Und doch ist wiederum gerade von dieser Seite her eine Fülle von Anregungen und neuen Problemen zu gewinnen. So ist es denn auch eine der Hauptaufgaben der Encyklopädie, welche besonders in den der angewandten Mathematik gewidmeten Bänden hervortritt, gerade diese Beziehungen klarzulegen und ihnen im Einzelnen nachzugehen. Im vorliegenden vierten Bande sind neben die Grundlagen der rationellen Mechanik und ihren Aufbau zur klassischen analytischen Mechanik die Gebiete der technischen Mechanik gestellt und es ist das in diesem Umfang wohl zum ersten Mal gesteckte Ziel, den Gesamtbereich der statischen und dynamischen Probleme der Technik ausführlich nach ihrem mathematischen Inhalt kritisch zu sichten. Die Aufgabe ist nicht leicht. Es gilt, um beim vorigen Bilde zu bleiben, da und dort veraltete Brunnenstuben zu beseitigen, die den Lauf der Gewässer verlegt haben, ehe die reine Quelle in die ihr gemässe Fassung geleitet werden kann. Dafür tritt aber auch die Freude an ihrer Erschliessung und an ihrem Ausbau gerade in den der Technik gewidmeten Aufsätzen lebendig zu Tage « Wir meinen », sagt Klein am Schlusse seiner Vorrede, « wenn erst Band IV vollendet vorliegt, etwas Bestimmtes und Nützliches geleistet zu haben. Aber freilich ist es, vom höheren Standpunkte, nur eine Vorbereitung. Mechanik, überhaupt angewandte Mathematik, kann nur durch intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst gelernt werden; die Literatur gibt nur eine Beihilfe. Anleitung zum Beobachten mechanischer Vorgänge von früher Jugend an, und auf höherer Stufe Verbindung des mathematischen Nachdenkens mit der Arbeit im Laboratorium, das ist, was behufs gesunder Weiterbildung der Mechanik daneben und vor allen Dingen in die Wege geleitet werden muss. Die moderne Entwickelung hat ja auch in dieser Hinsicht in vielversprechender Weise eingesetzt. Möge die Wissenschaft der Mechanik, die eine Grunddisciplin aller Naturwissenschaft ist, solcherweise einer neuen Blüte entgegengeführt werden. Möge insbesondere auch das Wort Leonardo da Vinci's sich wieder bewahrheiten, dass die Mechanik das Paradies der Mathematiker ist! ».

Der fünfte Band, redigiert von Herrn A. Sommerfeld, umfasst die Physik. Wir stehen hier inmitten einer Evolutionsperiode physikalischer Tatsachen und einer Revolutionsperiode der grundlegenden Anschauungen. Wir müssen es der Redaktion besonderen Dank wissen, dass es ihr gelungen ist, gerade die Männer für die Darlegung zu gewinnen, die selbst an dieser Neugestaltung am erfolgreichsten mitgewirkt haben. So sind in einer Reihe von Aufsätzen die neuerschlossenen Gebiete vielfach zum ersten Male im Zusammenhange dargestellt. Ich nenne den Aufsatz von KAMMERLINGH-ONNES, welcher die an Van der WAALS und GIBBS anschliessenden Arbeiten der Leydener Schule enthält, die beiden grundlegenden Aufsätze von LORENTZ, in welchen von MAXWELL ausgehend, die moderne Elektronentheorie aufgebaut ist, WIEN's Aufsatz über die Theorie der Strahlung.

Die neuere und neueste Forschung hat inzwischen den Fortgang der Berichte überholt und macht die Einfügung ergänzender Artikel — ich denke an die Erscheinungen der Radioaktivität, an die Relativitätstheorie — notwendig. Charakteristisch für die grundlegenden Anschauungen erscheint das erneute Hervortreten der Molekulartheorie in Gebieten, die ihr bisher fremd waren. Die experimentellen Ergebnisse auf dem Gebiete der Elektrizitätslehre und der Optik leiten zu ihr zurück. Auch die Chemie, die um einen Ausdruck PICARD's zu gebrauchen, ihre prämathematische Periode (das ursprüngliche Stadium jeder Naturwissenschaft) verlassen hat, hat naturgemäss in dem Abschnitt über Molekularphysik ihre Stelle. Am glänzendsten aber tritt die Bedeutung der Molekularhypothese wohl in BOLTZMANN's genialer Auffassung der kinetischen Gastheorie als eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervor. Der Aufsatz über die kinetische Theorie der Materie ist das letzte Zeugnis der Mitarbeit BOLTZMANN's an der Encyklopädie; seiner tätigen Hilfe, wie seiner gewaltigen, einzigartigen Persönlichkeit werden wir stets in Treue und Dankbarkeit gedenken.

Eine besondere Absicht für die Darlegung der einzelnen Gebiete ist es gewesen, die mathematische Physik überall in engste Verbindung mit der Experimentalphysik zu setzen. So gliedert sich, um nur ein Beispiel zu nennen, der Aufsatz über Wärmeleitung in einen mathematischen Teil, welcher die analytischen Methoden von FOURIER bis KELVIN behandelt und in einen physikalischen, die Methoden der Messung umfassend.

Wenn die Fourier'schen Entwickelungen das klassische Beispiel bilden für die Dienste, welche die naturwissenschaftliche Forschung der reinen Analysis geleistet hat, so mag hier der Vectorentheorie als eines Beispiels für die Ausbildung spezieller Methoden des mathematischen Ansatzes auf der Grundlage physikalischer Vorstellungen gedacht sein. In den mathematischen Bänden finden sich die Anschauungen GRASSMANN's und HAMILTON's eingereiht in der Theorie der höheren komplexen Grössen, wie in den Systemen geometrischer Analyse. Hieran schliesst sich im vierten Bande die Entwickelung der Vectoralgebra und Vectoranalysis, während im fünften Bande die Theorie ihre specifische, den Bedürfnissen des elektromagnetischen Feldes angepasste Form erhält. Mit Rücksicht auf die von den Herrn BURALI-FORTI und MARCOLONGO angeregte Besprechung der Vectorenbezeichnung auf dem gegenwärtigen Kongress sei betont, dass die in der Encyklopädie durchgeführte Behandlungsweise, die auf MAXWELL und namentlich auf HEAVISIDE zurückgeht, sich bereits dank dem hervorragenden Einfluss der LORENTZ'schen Encyklopädieartikel bei der jüngeren Generation Eingang zu verschaffen scheint.

Der sechste Band spaltet sich in zwei wesentlich verschiedene Gebiete. Der erste Teilband, redigiert von den Herren PH. FURTWAENGLER und E. WIECHERT umfasst Geodäsie und Geophysik, der zweite, von K. SCHWARZSCHILD redigiert, die Astronomie.

Dem Mathematiker tritt in der Behandlung der beiden Bände vor allem der Umstand entgegen, dass es sich hier zumeist um die Darlegung von Präcisionsmessungen handelt. Dadurch tritt einmal die Fehlerdiscussion im Einzelnen hervor und weiter gewinnt das Instrumentelle, wie übrigens auch in einigen Aufsätzen zur Mechanik und Physik, gegenüber dem Mathematischen besondere Bedeutung.

Für die Geodäsie bildet der Artikel von PIZZETTI über höhere Geodäsie den Mittelpunkt. Es ist naturgemäss, wenn hierbei neben der theoretischen Grundlegung die geschichtliche Entwickelung dieser uralten Wissenschaft, die der mathematischen Forschung so viele Probleme gestellt hat, zu ihrem Rechte kommt; während auf der andern Seite jene internationale Organisation wissenschaftlicher Arbeit in die Erscheinung tritt, wie sie die Aufgabe der Erdmessung und der Schweremessung in ihrer modernen Inangriffnahme darbietet.

Von dem astronomischen Bande der Encyklopädie sagt sein Redacteur, dass er « in gewissem Grade ein Geschenk der Astronomen an die Mathematik bedeutet ». Und in der Tat bilden ja die Astronomen im Kreise unserer Wissenschaften eine geschlossene Familie, die ihre eigene Sprache redet, ihre gesonderte Familientradition besitzt und eine eigene, grossartige, über die Welt gebreitete Organisation ihrer Arbeiten. So war es vielleicht vermessen, die Astronomie mit in den Bereich der Encyklopädie zu ziehen und um so mehr, als kurz vor der Inangriffnahme der Encyklopädie in Deutschland das VALENTINER'sche Handbuch der Astronomie erschienen war, an dem sich die meisten deutschen Astronomen die überhaupt Neigung zu encyklopädischer Tätigkeit besitzen, beteiligt hatten. Und doch rechtfertigt der Inhalt der beiden ersten erschienenen Hefte den Versuch, und zeigt, vielleicht gerade durch die verschiedenartige Behandlungsweise, dass auch dieser Band auf seine Art zu den Zielen der Encyklopädie beiträgt, dass es sich hierbei nicht um einem einseitigen Vorgang handelt, dem der Wärmeleitung analog, bei dem Wärme nur vom wärmeren zum kältern Körper übergeht, sondern, einbegriffen den Widerstand, welcher sich der Annäherung entgegensetzt, um die Erscheinung der wechselseitigen Induction zweier Stromkreise aufeinander.

***

Auf die im Vorstehenden in kurzem Umriss gezeichneten sechs Bände, welche den eigentlichen Inhalt der mathematischen Disciplinen in sich begreifen, ist zuvörderst die Herausgabe beschränkt worden. Die Geschichte, die Philosophie und Didaktik der mathematischen Wissenschaften soll in einem Schlussbande angereiht werden, dessen Disposition freilich nur erst in ihren Grundzügen vorliegt. Die Gebiete sind gerade in den letzten Jahren zu immer steigender Bedeutung gelangt, wie ihnen auch im gegenwärtigen Kongresse die Arbeit der vierten Sektion mit einem überaus reichhaltigen und interessanten Programm gewidmet ist.

In der Geschichte der mathematischen Wissenschaften haben Neudurchforschungen ein tieferes Verständnis für die Anschauungen der Alten herbeigeführt. Vor allem sei hier der glänzenden Bestätigung gedacht, welche die Auffassung

ZEUTHEN's über die Einführung und Verwertung infinitesimaler Betrachtungen bei ARCHIMEDES gefunden hat durch die Heibergsche Entdeckung jener wichtigen Handschrift ueber « des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen ».

Die Gesamtdarstellung der Entwickelungsgeschichte der mathematischen Wissenschaften ist eben jetzt mit der Vollendung des im Zusammenwirken einer Anzahl von Gelehrten entstandenen vierten Bandes des grundlegenden CANTOR'schen Werkes in bedeutungsvoller Weise gefördert. Daneben hat man sich mit der historischen Darlegung einzelner Disziplinen näher beschäftigt und dadurch Aufschluss über die Kontinuität in der Entwickelung der Methoden erhalten. Ganz besonders aber erschliessen uns Gesamtausgaben der Werke hervorragender Forscher das Verständnis für die einzelne Persönlichkeit und für die Zeit in der sie lebte. Hier finden die Akademien ein wichtiges Gebiet ihrer Betätigung. Von der Herausgabe der Klassiker des 19. Jahrhunderts abgesehen, wie sie in Deutschland, in Frankreich, Grossbritannien, Italien von den gelehrten Gesellschaften schon seit lange begonnen, ist gegenwärtig die Herausgabe der Werke von LEIBNIZ durch das kooperative Zusammenwirken des internationalen Verbandes gelehrter Körperschaften auf Anregung Frankreichs eingeleitet. Eben dieser Verband hat neuerdings die alte Forderung nach der Errichtung eines ähnlichen monumentalen Werkes nach der Veranstaltung einer Gesamtausgabe der Schriften EULER's erhoben. Es haben nunmehr auch die für die Wissenschaft interessierten Kreise der Schweiz und insbesondere die Schweizer Naturforschende Gesellschaft die Unterstützung des ihrem grossen Landsmanne geltenden Werkes zugesagt (worüber uns Herr KRAZER noch berichten wird), so dass die Verwirklichung des für die Geschichte wie für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaften gleich bedeutungsvollen Unternehmens nunmehr gesichert erscheint.

Dem Interesse für die Zusammenfassung des gesamten Gebietes der Mathematik seiner historischen Entwickelung nach stellt sich an die Seite die Frage nach der Stellung der Mathematik im Gesamtbereich wissenschaftlicher Erkenntnis, nach ihrer Würdigung nach philosophischer Richtung. Nach der psychologischen: im Eingehen auf die Grundlagen des Zahlbegriffes, auf die Entstehung und Festlegung unserer Vorstellungen von Zeit und Raum; nach der Seite der Logik und Erkenntnistheorie: in der Frage nach der Denknotwendigkeit und Tragweite der Axiome der Arithmetik, der Geometrie und Mechanik, in der Analyse der Methoden für Deduktion und Beweis und deren Wert für die Anordnung und Beschreibung der Tatsachen unserer Gedanken- und Erscheinungswelt. So ist es heute, im Gegensatze zu einer vergangenen Periode, das spezielle Fachgebiet, von dem aus der Uebergang zu den philosophischen Fragen versucht wird. Es sind die Mathematiker selbst, wie die Naturforscher, welche mit der Untersuchung der Grundlagen und Grenzen ihrer Wissenschaft sich Fragen zuwenden, die früher von ausschliesslich philosophischer Seite her in Angriff genommen und unter Zurücksetzung des Tatsachenmaterials behandelt worden sind. So ist schon FECHNER vorangegangen, so sind MACH's historische und philosophische Untersuchungen grundlegend geworden; so ist das allseitige Interesse, welches die gedankenreichen Ausführungen PICARDS, POINCARÉS finden, durch den Zug nach zusammenfassender philosophischer Betrachtung begründet.

Die Fragen des Unterrichtes an unseren Hoch- und Mittelschulen stehen gegenwärtig in lebhaftester Diskussion. Hier ist es die veränderte Stellung und die erhöhte Wertschätzung unserer Disciplinen im Rahmen des gesamten Bildungsstoffes und innerhalb der Aufgaben unserer modernen Kultur, wie andererseits unmittelbar die Bedürfnisfrage, welche eine neue Gestaltung und Abgrenzung des für die einzelnen Entwickelungsstufen der Schule festzusetzenden Lehrstoffes herbeiführt.

Um unsere deutschen Verhältnisse zu bezeichnen, hat die von der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte eingesetzte Unterrichtskommission soeben einen umfassenden Bericht über ihre bisherige Tätigkeit (durch Herrn GUTZMER) erstattet, welcher mit der Aufstellung eines bestimmten, auch auf die naturwissenschaftlichen Gebiete erstreckten Lehrprogrammes für die Mittelschulen abschliesst und mit Vorschlägen für die Hochschulausbildung der Lehrer. Besonders instruktiv werden sich für diese allerorten in Fluss befindlichen Fragen vergleichende Betrachtungen der Unterrichtsverhältnisse in den einzelnen Ländern gestalten, zu denen die in der vierten Sektion unseres Kongresses angekündigten Referate reichen Anlass bieten werden.

Doch ich breche diese Entwickelungen, die vielleicht schon allzusehr ins Einzelne gegangen sind, hier ab und komme zum Schlusse. Möchte es mir gelungen sein, den Plan des ganzen Werkes und die Absicht der einzelnen Darstellungen richtig zu bezeichnen.

***

Die Aufgabe, deren Lösung die Encyklopädie sich stellt, ist von Jahr zu Jahr und weit über die ursprüngliche Vorstellung vom Umfang des zu bewältigenden Gebietes gewachsen.

Ebenso aber, wie es für die Erschliessung neuer wissenschaftlicher Gebiete ein Vorzug ist, die ersten Schritte in gewisser Naivität zu tun, noch ohne Kenntnis ihrer Schwierigkeiten im Einzelnen und ohne auf Einschränkungen zu achten, welche sich einer allgemeinen Anwendbarkeit der Methoden entgegenstellen mögen, so war es auch hier für die Verwirklichung des Gedankens gut, dass mit Unbefangenheit an die Ausführung geschritten worden ist. So können wir heute, vierzehn Jahre nach Beginn der Arbeit, sagen, dass der frische Impuls des ersten Angriffs der Arbeit treu geblieben ist, dass das Werk in allen seinen Teilen in rüstigem Vorwärtsschreiten begriffen, wenn auch noch lange nicht zu Ende geführt ist. Und auch von dieser Arbeit gilt das Wort von GAUSS: « Wahrlich, es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt ».

Von den ursprünglich durchaus objektiven Referaten ist, wie schon eingangs erwähnt, vielfach zu subjektiver Darlegung übergegangen worden, und zwar tritt diese individuelle Auffassung gerade da am stärksten zu Tage, wo es sich um die Klarlegung der grundlegenden Prinzipien und um den inneren Zusammenhang der einzelnen Gebiete handelt. Gerade mit diesen Betrachtungen aber ordnet sich die Aufgabe der Encyklopädie in die grössere ein, welche sich auf die Frage nach der Stellung unserer Wissenschaft im Gesamtbereiche menschlichen Erkennens bezieht. Es liegt im Zuge unserer Zeit, wenn gerade diese gegenwärtig ein erhöhtes Interesse beansprucht.

« Wir sind es müde », sagt DIELS in der Festschrift zur zweihunderjährigen Jubelfeier der preussischen Akademie der Wissenschaften, « wir sind es müde, blos Stoffe zu sammeln, wir wollen geistig des Materiales Herr werden; wir wollen hindurchdringen durch die Einzelheiten zu dem was doch der Zweck der Wissenschaft ist, zu einer allgemeinen, grossen Weltanschauung ».

Für dieses Streben nach einer wissenschaftlich begründeten Lebensauffassung und für die klare Herausarbeitung des Anteils, den die Mathematik dabei besitzen mag, wird die Encyklopädie eine Stufe sein, welche uns von einer Stelle aus den innern Zusammenhang des Baues überschauen und die möglichen Richtungen seiner Weiterführung erkennen lässt. Dann aber müssen wir weitere Bausteine brechen und zubereiten.

Die Anschauungen, welche uns aus jener anderen Epoche zusammenfassender Tätigkeit vor anderthalb Jahrhunderten in D'ALEMBERT's glänzender Vorrede zur französischen Encyklopädie entgegentreten, jener, dem Kraftgefühl einer beispiellosen Entwickelung der mathematisch-physikalischen Disciplinen entsprungene Glaube an einen unbegrenzten Gültigkeitsbereich mathematischer Formulierung, welchen der bekannte Ausspruch von LAPLACE bezeichnet, sie sind heute, nach einer erneuten Sichtung und Zusammenfassung dessen, was die mathematische Einkleidung bedeutet und vermag, einer nüchterneren Auffassung gewichen. In höherem Masse freilich als je zuvor hat sich auf allen Gebieten der Naturwissenschaften die Notwendigkeit der mathematischen Formulierung dargetan, aber wir fassen diese der Beschreibung dienenden Formeln nicht als oberste Gesetze auf im Sinne jenes ἀεὶ ὁ θεὸς γεωμετρεῖ von Plato, sondern wir sehen in der Einführung der Zahl das einzige unserem Verstande zugängliche Mittel, welches uns ein genaues Bild der Vorgänge in der Natur zu bieten vermag, und in diesem bescheidenerem Sinne mögen wir sagen:

Verstehen heisst berechnen.

S. NEWCOMB

LA THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA LUNE

SON HISTOIRE ET SON ÉTAT ACTUEL

Parmi les problèmes de la mécanique céleste, celui du mouvement de la lune occupe un haut rang, à cause de sa difficulté, et du nombre des questions intéressantes auxquelles il a donné naissance. Il nous offre un bon exemple de ces méthodes générales de la science par lesquelles nous prédisons les phénomènes de la nature. Pour atteindre ce but il faut, d'abord, découvrir par des observations les lois de la nature, — ensuite s'informer des conditions actuelles sous lesquelles ces lois s'agitent, et plus tard, au moyen des méthodes de raisonnement, prédire par déduction les résultats de leur action. Mais nous ne cessons jamais d'être en cours de recherche. Après avoir fait nos prédictions il faut, par de nouvelles observations, déterminer si ces prédictions sont exactes. Si une divergence se manifeste entre les résultats observés, et ceux que nous avons prédits par la théorie, il faut corriger, ou la forme des lois, ou les données que nous avons acceptées comme base de la prédiction.

C'est dans la mécanique céleste que ces méthodes de recherche ont leur plus complète manifestation. La loi fondamentale est celle de la gravitation universelle suivant la formule de NEWTON; les faits, — on peut dire en ce cas les données, — sont les éléments des orbites des planètes, leurs masses, et toute condition qui peut modifier leurs mouvements. Depuis l'énoncé de la loi de NEWTON une succession de grands géomètres, tels que D'ALEMBERT, CLAIRAUT, LAPLACE, LAGRANGE, EULER, PLANA, DAMOISEAU, HANSEN, — je ne nomme pas les vivants — ont développé et perfectionné les méthodes de déduction, tandis que les maîtres de l'astronomie théorique ont corrigé sans cesse les éléments astronomiques au moyen des observations. Comme résultat général de tous ces travaux on peut dire que, sauf deux exceptions, l'accord des observations avec la théorie est aujourd'hui parfait. Les petites différences qui existent encore entre les observations et les conclusions de la théorie seront sans doute annullées par de légères corrections des éléments.

Les exceptions dont il s'agit sont le mouvement de la planète Mercure et celui de la lune. Dans le cas de Mercure il ne faut, pour expliquer la différence, qu'admettre l'existence des masses encore inconnues entre Mercure et le soleil. La question de l'existence de ces masses n'appartient pas à notre sujet. Dans le cas de la lune nous nous trouvons en face d'une véritable énigme, d'un phénomène qui semble accuser l'action d'une cause inconnue, assez puissante pour changer — ou le mouvement de la lune — ou la rotation de la terre autour de son axe. Pour donner une idée de la difficulté et de l'importance des questions soulevées par la divergence entre le mouvement théorique et le mouvement observé de la lune, il faut esquisser sommairement la nature générale, et l'état actuel, de la théorie du mouvement de notre satellite.

Le but de toute théorie des mouvements célestes est la construction des formules algébriques, qui doivent exprimer les coordonnées d'un corps en fonction du temps. Au moyen de ces formules on parvient à calculer les dites coordonnées à un moment donné quelconque. La loi générale est celle de la gravitation universelle, dont l'expression est mise sous la forme de trois équations différentielles, dans lesquelles le temps s'introduit comme variable indépendante. Le cours de déduction est compris dans l'intégration de ces équations, qui conduit à l'expression des trois coordonnées d'un corps en fonction du temps, et de six constantes arbitraires. Ces dernières sont les éléments de l'orbite parcourue par le corps. Elles ne sont pas données *a priori*, il faut les déterminer de manière à représenter les observations.

L'intégration complète n'est pas possible, sauf dans le cas où le nombre des corps n'est que deux, dont l'un est pris comme centre du mouvement, tandis que l'autre est celui dont on désire exprimer les coordonnées. Alors la solution prend la forme du mouvement dans une ellipse suivant les lois de KEPLER. Quand on ajoute un troisième corps, il faut adopter la méthode des approximations successives.

Dans le cas de la lune, le corps principal auquel le mouvement est rapporté, est la terre, dont le centre est l'origine des coordonnées. Si aucune force perturbatrice n'agissait inégalement sur la lune et sur la terre, l'orbite de la lune serait une ellipse Keplérienne. Mais l'action perturbatrice du soleil est tellement grande et le problème de déterminer les résultats de son action sur la position de la lune, tellement compliqué et difficile, que le génie de tous les grands géomètres du passé n'a pu suffire a en trouver une solution assez précise pour satisfaire aux besoins de l'astronomie moderne. Pour apprécier les solutions qui ont été effectuées, on remarque qu'elles sont de deux classes: l'une algébrique et l'autre numérique. Dans la première, les coordonnées sont exprimées comme fonctions explicites des éléments; dans l'autre, les valeurs numériques des éléments sont introduites avant l'intégration.

La solution algébrique et générale en termes finies n'existe pas; mais la petitesse de certains des éléments, permet le développement d'une solution applicable au cas de la lune, dans une série infinie de termes ordonnée selon les puissances et les produits de ces petits éléments. Pour ces éléments on peut prendre:

e, e', les eccentricités des deux orbites;
$\gamma = \sin {}^1/_2\, I$, où I est l'inclinaison de l'orbite de la lune sur l'écliptique;
m, rapport de la période de la terre à celle de la lune.

Les coefficients de cette série sont des fonctions périodiques du temps, et le problème est résolu quand nous avons calculé ces coefficients avec une exactitude suffisante. Parmi les geomètres du passé qui se sont occupés du problème, on peut nommer

LAPLACE, EULER, PLANA, DE PONTÉCOULANT, LUBBOCK, DELAUNAY. Aucun d'entre eux n'a réussi entièrement, parce qu'il est à peine possible, pendant le cours de la vie d'un homme, de calculer tous les coefficients de la série avec la précision demandée par notre astronomie.

Parmi les travaux de ces savants, ceux de DELAUNAY méritent notre attention particulière. Sa méthode est une extension de celle de la variation des constantes arbitraires, imaginée par LAGRANGE. Elle peut être décrite comme une transformation des équations différentielles du mouvement, dans laquelle les constantes arbitraires de la première intégration, c'est à dire les éléments elliptiques, deviennent de nouvelles variables. Les premières dérivées de ces variables par rapport au temps, sont développées en séries infinies de termes, dont chacun est fonction des variables elles-mêmes et du temps. La théorie de ce développement, et de l'intégration des équations différentielles par des approximations successives, est bien connue depuis l'époque de LAGRANGE. Mais quoique cette méthode soit applicable au cas des planètes, on rencontre des difficultés en l'appliquant au cas de la lune, à cause du nombre des approximations qui seraient nécessaires.

Pour donner une idée de la méthode de DELAUNAY, soit a un élément quelconque du mouvement elliptique de la lune. Une force perturbatrice agissant sur la lune produit une variation de cet élément que l'on peut développer dans la forme

$$\frac{da}{dt} = P_0 + P_1 + P_2 + \dots \tag{1}$$

où les P sont des fonctions des éléments et du temps, sauf P_0, qui ne contient pas le temps explicitement. L'idée de DELAUNAY est de prendre d'abord deux termes de cette série, le terme constant, P_0, et un des plus importants des termes variables, disons P_1, et d'effectuer une intégration rigoureuse en omettant tous les autres termes. Ainsi notre élément, a, devient fonction de six nouvelles constantes arbitraires a_1, b_1, $c_1, \dots$ et du temps t:

$$a = f(a_1, b_1, c_1, \dots t). \tag{2}$$

Pour tenir compte des autres termes, DELAUNAY prend les constantes arbitraires $a_1, b_1, \dots$ comme de nouvelles variables, dont les premières dérivées par rapport au temps, deviennent fonctions de la forme (1), mais sans le terme P_1. Une nouvelle intégration, dans laquelle on tient compte des termes P_0 et P_2 seulement, sert à exprimer $a_1, b_1, \dots$ en fonction de t et de six nouvelles arbitraires $a_2, b_2 \dots$ Ces dernières deviennent variables à leur tour, et ainsi de suite à tel point que les termes qui restent sont si petits que leurs carrés et leurs produits deviennent négligeables. Alors, l'intégration pour les termes qui restent se fait par une simple quadrature.

De cette manière le problème est réduit à l'exécution d'une série d'opérations algébriques, comprenant des substitutions repétées sans fin, mais toujours se rapprochant de plus en plus des valeurs exactes des variables.

On ne peut qu'admirer le génie qui a conçu cette extension de la méthode féconde de LAGRANGE. Son application n'est pas bornée à la théorie de la lune, mais, comme l'ont montré TISSERAND, HILL, et d'autres, elle peut servir à faire faire un pas important à la théorie des planètes.

Le grand ouvrage de DELAUNAY, *Théorie du mouvement de la lune*, est un monument de calcul algébrique et numérique, si merveilleux qu'il semble extraordinaire qu'un seul homme ait pu l'ériger. Mais quoique les résultats de DELAUNAY dépassent en précision tous les autres développements algébriques de la théorie de la lune, ils ne suffisent pas aux besoins de l'astronomie moderne. Dans la solution chaque coefficient d'un terme est lui même la somme d'une série infinie dont les termes sont ordonnés selon les puissances et produits des petits nombres e, e', γ et m, que j'ai déjà définis. Cette série est assez convergente quant à e, e', et γ. Mais la convergence des termes en m est souvent si lente, à cause des grands coefficients numériques, qu'il est presque impossible de calculer tous les termes de la série qui peuvent devenir sensibles. Il est même douteux que le développement suivant les puissances de m soit convergent pour quelques uns des termes. Quoiqu'il en soit, il est certain que la théorie de DELAUNAY n'est pas développée assez loin en puissances de m pour servir à nos besoins actuels.

Les méthodes dont j'ai parlé jusqu'ici sont purement algébriques et générales; le problème est d'exprimer les coordonnées de la lune en fonctions explicites des éléments. Pour calculer les coordonnées il suffit de substituer, dans leurs expressions algébriques, les valeurs numériques des éléments, comme elles sont données par les observations. Mais vu les difficultés des développements algébriques que j'ai signalées, on a cherché à construire des formules pour le mouvement de la lune actuelle, en substituant, comme je l'ai dit, les valeurs numériques des éléments avant l'intégration. Alors, on trouve une solution particulière des équations du mouvement, au lieu de la solution générale. DAMOISEAU est, je le crois, le premier qui ait appliqué cette méthode. Mais la plus importante théorie numérique est celle de HANSEN, sur laquelle sont basées les tables de la lune dont on a fait usage pendant un demi-siècle. En principe la méthode numérique de HANSEN est assez simple. Dans les deuxièmes membres des équations différentielles du mouvement, on substitue des expressions numériques approximatives; et on trouve par l'intégration des valeurs des éléments et des coordonnées qui, on le peut croire, doivent être plus exactes que celles qui nous ont servi au début. On peut répéter le procédé aussi souvent qu'on voudra, ou bien jusqu'à ce que le résultat ne soit pas changé par la répétition. C'est ainsi que HANSEN, après avoir calculé les valeurs des inégalités dont il a fait usage dans ses *Tables de la Lune*, a repris les calculs, et est arrivé à des valeurs de quelques-uns des termes legèrement différentes de celles des tables. Mais l'exactitude des résultats obtenus par cette méthode n'est pas à l'abri de toute objection. D'ailleurs, la méthode purement numérique ne suffit pas à tous les besoins de la théorie, parce que les dérivées des coordonnées par rapport aux éléments ne peuvent être calculées par de telles expressions. Par conséquent, on ne peut regarder ni la méthode de DELAUNAY, ni celle de HANSEN, comme tout à fait satisfaisante.

Je passe maintenant à une série de recherches qui, je le crois, nous conduisent à des résultats ayant toute l'exactitude demandée par l'astronomie de notre temps. Cette série commence avec l'ouvrage de LEONHARD EULER, *Theoria Motuum*

Lunae, Nova Methodo Pertractata. C'est un fait assez remarquable dans l'histoire de notre science qu'un siècle entier se soit écoulé sans qu'aucun géomètre n'ait observé la supériorité de la méthode esquissée dans cet ouvrage d'EULER. Sa publication eut lieu en 1772; c'est en 1878 que M. GEORGE W. HILL publia le premier de ses mémoires sur le mouvement de la lune, alors qu'on suppose nulles l'inclinaison et les excentricités, dont l'idée fondamentale est basée sur l'ouvrage d'EULER ([1]). Voici quelle est cette idée. En regardant les mouvements moyens de la terre autour du soleil, et de la lune autour de la terre comme donnés, l'expression de chaque coordonnée de la lune peut être développée en série ordonnée selon les puissances et les produits des excentricités e et e' des deux orbites, et de γ, sinus de leur demi-inclinaison. Soit y une telle coordonnée. Alors

$$y = P_0 + eP_1 + e'P_2 + \gamma P_3 + e\gamma P_4 + \ldots \tag{3}$$

où les P sont des fonctions périodiques de la forme

$$P = \sum h \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (A + Bt). \tag{4}$$

Les coefficients h sont des fonctions de m, le rapport des mouvements moyens du soleil et de la lune; les A sont des combinaisons linéaires des longitudes moyennes du soleil, de la lune, du périgée, et du nœud, et les B sont des fonctions de m, e, e', et γ.

Maintenant, EULER a cherché à développer séparément les valeurs des P. Mais il a rencontré une difficulté dans l'introduction de m, e, e', et γ dans les B. Par conséquent, il a dû regarder les mouvements des arguments comme des données d'observation. Ce que HILL a fait cent ans plus tard peut être résumé ainsi:

1° Il a conçu une méthode générale pour développer les termes de P_0, en fonction des mouvements moyens, avec toute l'exactitude que l'on voudra; et dans le Mémoire de 1878 il a porté le développement bien au delà de tous les besoins de l'astronomie.

2° Dans un Mémoire célèbre qui a paru en 1888 ([2]) il a développé une méthode nouvelle pour traiter la partie du mouvement du périgée qui est indépendante de e, e', et γ.

Ce que HILL a fait pour le périgée, ADAMS et COWELL l'ont fait pour le mouvement du nœud.

Naturellement, les idées et les méthodes de HILL sont applicables à la forme plus générale du problème dans laquelle e, e', et γ sont compris. Mais voici une difficulté qui se présente lorsqu'on cherche de déterminer les coefficients P_1, P_2, etc., des puissances et produits des e, e', et γ dans la série. Dans la forme ordinaire d'un tel développement en série infinie, les coefficients ne contiennent pas ces éléments. Mais, comme je l'ai remarqué, nos éléments e, e', et γ entrent dans les valeurs de B et, par conséquent, dans les P. La difficulté est de développer les B,

([1]) American Journal of Mathematics, vol. I.

([2]) Ce Mémoire a été réimprimé dans les Acta Mathematica, tome VIII.

c'est-à-dire les mouvements du périgée, et du nœud, en puissances et produits de ces quantités.

C'est Ernest W. Brown (¹) qui a abordé le problème ainsi présenté, et qui vient d'en vaincre les difficultés et d'en compléter la solution. Les points principaux de la méthode appliquée par Brown peuvent être résumés comme il suit:

1° Au lieu de développer les coefficients h en puissances de m, le rapport des mouvements moyens, il emploie la valeur numérique de m *ab initio*. Sa méthode est donc une combinaison des méthodes algébriques et numériques déjà décrites.

2° Il a découvert une méthode pour former les dérivées par rapport à m, au moyen des dérivées par rapport aux autres éléments.

3° Il a aussi développé une méthode générale pour faire dépendre chacune des fonctions périodiques P_1, P_2, etc., de la solution d'une équation différentielle de deuxième ordre. Cette solution peut être obtenue avec toute l'exactitude qu'on désire par la solution d'un système d'équations linéaires.

4° A chaque pas il détermine ceux des termes du mouvement du périgée et du nœud qui sont nécessaires à la solution.

5° Il a exécuté les calculs numériques de la théorie de manière à trouver chacun des coefficients pour la longitude, la latitude et la parallaxe de la lune avec une erreur moindre que $\pm 0''.01$.

6° Il a inventé des formules de vérification pour découvrir des erreurs quelconques dans les calculs numériques des termes.

Ce degré d'exactitude suffit pour toutes les applications pratiques de la théorie. La comparaison des coefficients de Hansen et de Delaunay avec ceux de Brown nous porte aussi à croire que les résultats de Brown sont aussi exactes qu'on peut le désirer.

Je dois signaler les travaux d'un autre savant qui a contribué à cette théorie moderne. Les coordonnées employées par Euler, Hill et Brown sont rectangulaires, et, après les avoir formées, il faut les transformer en des coordonnées polaires. M. H. Andoyer a proposé une méthode pour développer immédiatement les coordonnées polaires dans la même forme. Cette méthode me semble digne de l'attention des géomètres qui s'intéressent à la théorie dont il s'agit.

Jusqu'ici j'ai parlé seulement de l'action du soleil comme force perturbatrice modifiant le mouvement elliptique de la lune autour de la terre. Tant que l'orbite de la terre ne change pas, les inégalités dans le mouvement de la lune produites par l'action du soleil sont purement périodiques. Le mouvement moyen de la lune, de son périgée et de son nœud, serait uniforme de siècle en siècle, et les inégalités lunaires reprendraient leurs valeurs initiales toutes les fois que lune, périgée et nœud retournent à leurs positions originales. Mais l'action des planètes doit aussi produire de petits changements dans le mouvement de la lune, et cela de deux manières; l'une, par la différence de leur action directe sur les deux corps, lune et terre, et

(¹) Les recherches de Brown se trouvent *in extenso* dans les Memoirs of the Royal Astronomical Society, vols. LIII, LIV et LVII, 1897-1905. Il a développé plusieurs points de la théorie dans l'American Journal of Math., vol. XII, et Transactions of the American Mathematical Society, vol. IV, etc.

l'autre, en modifiant le mouvement de la terre autour du soleil, ce qui change l'action du soleil sur la lune. En général l'action des planètes est moindre que celle du soleil dans le même rapport que leurs masses, et par conséquent, on peut la croire négligeable. Mais l'observation et la théorie ont, toutes les deux, montré que l'effet de cette action est important. D'abord, la comparaison des observations modernes avec les éclipses de lune rapportées par PTOLÉMÉE a montré à HALLEY que le mouvement moyen de la lune avait été accéléré depuis l'époque de PTOLÉMÉE. Plus tard, on a estimé la quantité de l'accélération comme 10″ par siècle. La cause de ce phénomène fut découverte par LAPLACE; c'est la diminution séculaire de l'excentricité de l'orbite de la terre, produite par l'action des planètes. Les calculs de LAPLACE donnèrent 10″ comme valeur de l'accélération séculaire, de manière que l'accord de la théorie avec l'observation semblait complète. Vers 1850 HANSEN reprit le calcul pour ses Tables de la lune, avec le résultat 12″.18. Ses calculs ultérieurs, publiés dans son *Darlegung*, donnèrent un résultat encore plus grand de 0″.35, c'est-à-dire 12″.53. Il a essayé de justifier ce nombre, non seulement par la théorie, mais aussi par l'observation, en discutant plusieures éclipses totales de soleil rapportées par les anciens historiens. Mais cet accord a été détruit par les recherches profondes de J. C. ADAMS, qui trouva que, en poussant plus loins les approximations, la valeur théorique de l'accélération n'était que presque la moitié de la valeur calculée par HANSEN. Ce résultat a été de suite confirmé par DELAUNAY. En effet HANSEN, comme LAPLACE et les autres géomètres qui avaient abordé le problème, s'est borné à des termes de premier ordre par rapport à l'action perturbatrice du soleil; tandis que les termes d'ordre plus élevé produisent des résultats bien sensibles. Les derniers calculs du Professeur BROWN le conduisent à une valeur de 5″.81, résultat que nous pouvons accepter comme exact en théorie à quelques centièmes d'une seconde près.

Il y avait, donc, un désaccord bien marqué entre la théorie et l'observation, dont une *vera causa* a été trouvée par WILLIAM FERREL, et plus tard par DELAUNAY, dans l'action de la lune sur les marées. A cause du frottement, les marées ne sont pas symmétriques par rapport à la direction de la lune; il en résulte un couple dans l'action de la lune sur la mer, qui tend toujours à retarder la révolution de la terre autour de son axe, et à produire un petit accroissement dans la durée de notre jour, ce qui fait que notre mesure de temps est toujours en retard de siècle en siècle. Il faut un retard de 12 secondes seulement pour produire une accélération apparente de 6″ dans le mouvement moyen de la lune. Des recherches ultérieures donnent une valeur apparente de l'accélération de 8″ seulement, de manière que le désaccord entre la valeur théorique et la valeur observée de cette quantité n'est que de 2″ par siècle.

Un fait intéressant est que le retardement de la rotation de la terre produit par les marées a été soutenu par KANT, quoique sa démonstration de l'effet ne fût pas correcte. LAPLACE a montré que l'action supposée par KANT n'existe pas; mais sa conclusion qu'il n'y a pas de ralentissement, n'est pas bien fondée.

LAPLACE montra, par une comparaison du mouvement de la lune avec les tables de LALANDE, l'existence de quelques inégalités de longue période dans ce mouvement.

Hansen est le premier qui ait pu montrer l'existence d'une telle inégalité dans la théorie. Dans ses *Tables de la lune* il a introduit deux inégalités dues à l'action de Venus, dont l'une a une période de 273 ans, et l'autre de 239 ans. La première de ces inégalités existe actuellement dans la théorie, mais l'autre est bien petite, 0″.24 seulement, ainsi que l'ont démontré Delaunay et Radau. La valeur adoptée par Hansen est presque cent fois trop grande, et, ce qui est pis, ni la valeur de Hansen, ni la vraie valeur théorique, ne représentent les observations. C'est à ce désaccord énigmatique que je consacrerai la fin de mon discours.

Prenons d'abord le terme théorique de notre comparaison. Je ne puis imaginer que trois actions perturbatrices du mouvement de la lune. Ce sont celles du soleil, des planètes, et de la déviation de la terre de la forme sphérique. Cette dernière ne peut produire aucune inégalité de période plus longue que celle du nœud de l'orbite lunaire, parce que, par sa rotation diurne, l'action de toute inégalité longitudinale dans la figure de la terre s'annule dans la période d'un jour. L'action du soleil est bien déterminée. Il ne reste donc que celle des planètes.

Le problème de l'action des planètes sur la lune est le plus compliqué de tous les problèmes bien définis de la mécanique céleste. Mais depuis l'époque de Hansen les méthodes pour calculer cette action ont été tellement perfectionnées par les recherches profondes de Delaunay, de Radau, de Hill et de Brown, que leurs résultats semblent hors de doute. La première inégalité de Hansen est la seule de longue période avec une amplitude importante, qui existe dans la théorie.

C'est un caractère important de ces déviations observées qu'elles semblent être irrégulières plutôt que périodiques. Pour parler plus exactement; elles ne peuvent se représenter par un ou même par deux termes périodiques. Il est vrai pourtant, qu'en admettant un terme dont la période est de 250 ans environ, on peut représenter la plus grande partie de la déviation; ce qui reste semblant tout à fait irrégulier. Les fluctuations les plus rémarquables ont eu lieu depuis 1850. Vers cette époque le mouvement moyen était accéléré, et l'accélération paraissait continuer jusqu'à 1864. Alors, le mouvement était subitement retardé de sorte que, pendant la période de 1864 à 1874, le mouvement annuel en longitude était plus petit de 0″.5 qu'il n'était pendant la période de 1850 à 1863-4. Transporté à la lune, la vitesse de ce corps s'est changée de un ou deux kilomètres par an. Depuis 1890 environ, la direction de ce mouvement est renversée.

On peut imaginer deux hypothèses pour expliquer ces changements. Ou ils sont réels, ou il ne sont qu'apparents, étant produits par des changements dans la rotation de la terre, de la même manière qu'un ralentissement de cette rotation produit un accroissement apparent de l'accélération séculaire. Pour décider entre ces hypothèses il nous faut une épreuve indépendante de l'uniformité de notre mesure de temps. Malheureusement nous n'avons aucune preuve précise. La meilleure en est fournie par le mouvement de Mercure. Les passages de cette planète sur le disque du soleil, observés depuis 1677, jusqu'à 1907 accusent de semblables changements, mais leur quantité est inférieure à la moitié de celle qui est nécessaire pour expliquer le phénomène dont il s'agit. Il semble donc qu'une partie du changement est réelle, et qu'une autre partie est due à des changements dans la rotation de la terre. N'est ce donc pas que l'action de la lune sur les marées soit variable, et que la combinaison de cette action avec la réaction des marées sur la lune puissent complètement expliquer le phénomène? Mais, au contraire, cette réaction doit retarder, plutôt qu'accélérer, le mouvement actuel de la lune. Je vais exposer brièvement la théorie de cette action et réaction:

1° En faisant abstraction de l'action du soleil, le mouvement des marées est produit par l'action de la lune.

2° Ce mouvement est nécessairement accompagné de frottement.

3° Ce frottement entraine une diminution de l'énergie totale, kinétique et potentielle, du système terre-lune.

4° Le moment du mouvement de ce système reste invariable. Il se divise en deux parties distinctes, celle de la terre, et celle de la lune, due à sa révolution autour de la terre.

5° Le moment de la rotation de la terre ne peut être changé par aucune action mutuelle entre ses parties, même par le frottement. Pour qu'un changement se produise, l'action d'un couple, due à la lune, est nécessaire, ce qui n'est possible que dans le cas où les marées sont assymétriques par rapport au rayon vecteur de la lune.

6° Le même couple réagit sur la lune, de sorte que l'accroissement de son moment est égal à la diminution du moment de la terre.

7° Par la même réaction, la distance moyenne et le mouvement moyen de la lune seront changés, de manière que, tout en conservant leurs relations fixes, la somme de l'énergie kinétique et de l'énergie potentielle du système se trouvera diminuée d'une quantité égale au frottement.

8° Le résultat de ces relations doit être, selon Sir George Darwin, un retardissement de 3.″6 environ de notre mesure de temps pour chaque 1″ d'accélération apparente du mouvement moyen de la lune, et *vice versa.*

Ces conclusions théoriques appliquées à notre problème ne représentent point les changements observés. C'est à dire: pour expliquer les variations du mouvement moyen de la lune par l'action des marées, il faut supposer des variations de presque une minute dans notre mesure de temps pendant les deux siècles depuis 1700. Mais les passages de Mercure semblent montrer que ces variations ne peuvent pas dépasser quelques secondes.

Toute reflexion faite, il me semble que l'explication de l'énigme ainsi présentée est aujourd'hui le problème le plus important et le plus intéressant de la mécanique céleste. Mais la question appartient au domaine de la physique céleste plutôt qu'à celui de la mathématique; et je me retiens de la discuter.

H. A. LORENTZ

LE PARTAGE DE L'ÉNERGIE ENTRE LA MATIÈRE PONDÉRABLE ET L'ÉTHER

Le problème sur lequel j'aurai l'honneur de vous présenter quelques réflexions est celui de la distribution de l'énergie entre la matière et l'éther, en tant que cette distribution s'opère par l'émission et l'absorption de la chaleur rayonnante et de la lumière. Depuis Kirchhoff, les physiciens s'en sont souvent occupés, d'abord en se fondant sur les principes généraux de la thermodynamique, et plus tard en introduisant des idées empruntées à la théorie cinétique de la matière, à la théorie électromagnétique de la lumière et à la théorie des électrons.

Pour fixer les idées, il conviendra, de préciser la question. Figurons nous, à cet effet, qu'une enceinte ayant la forme d'un parallélipipède rectangulaire, dont les faces intérieures sont parfaitement réfléchissantes, contient un corps pondérable M, qui se trouve à une certaine distance des parois, et supposons que l'éther, le milieu universel qui transmet la lumière et les actions électromagnétiques, remplisse l'espace entier à l'intérieur de cette enceinte, pénétrant même les particules dont le corps pondérable se compose.

Kirchhoff a montré que, dans ces circonstances, si le corps M est maintenu à une température déterminée T, il s'établira un état d'équilibre dans lequel l'éther est traversé dans toutes les directions par les rayons émis par la matière pondérable. Ces rayons, incessamment réfléchis par les parois, ne tarderont pas à rencontrer de nouveau le corps M. Ils finiront par en être absorbés, mais la perte que subirait ainsi l'énergie de l'éther se trouve compensée par l'émission de nouvelles ondes lumineuses ou calorifiques. Du reste, cette égalité de l'énergie émise et absorbée n'est pas limitée à la totalité des vibrations; si, en employant le théorème de Fourier, on décompose le rayonnement en un grand nombre de parties, chacune caractérisée par sa longueur d'onde, la quantité d'énergie qui correspond à chaque partie restera constante malgré les échanges continuels.

De plus, la seconde loi de la thermodynamique, c'est-à-dire le principe que l'égalité de température d'un système de corps ne sera jamais troublée par leur rayonnement mutuel, exige que l'état de l'éther soit indépendant de la nature physique ou chimique du corps pondérable. Placez dans l'enceinte un morceau de métal, un cristal quelconque ou une masse gazeuse; vous aurez toujours le même rayonnement dans l'éther ambiant.

En somme, cette théorie de KIRCHHOFF que je viens de rappeler à grands traits, nous apprend que l'énergie du rayonnement qui existe dans l'unité de volume de l'éther, en tant qu'elle correspond aux longueurs d'onde comprises entre les limites λ et $\lambda + d\lambda$, peut être représentée par une expression de la forme

$$F(\lambda, T)\, d\lambda, \tag{1}$$

où la fonction F est indépendante des propriétés spéciales du corps qui a produit les rayons. Dans cette formule, comme dans toutes celles qui suivront, nous entendrons par T la température absolue.

KIRCHHOFF ne laissait pas d'insister sur la haute importance de cette fonction du rayonnement. En effet, l'existence d'une telle fonction universelle prouve que tous les corps pondérables doivent avoir quelque chose de commun, et le problème de découvrir en quoi cela consiste a un charme particulier.

Avant de considérer les recherches théoriques faites sur la fonction F, je dois dire quelques mots de la manière dont elle peut être déterminée expérimentalement. Imaginons une enceinte de très grandes dimensions, qui ne contient qu'un petit corps M placé près du centre. Laissons au système le temps de se mettre en équilibre, et pratiquons ensuite dans l'une des parois une petite ouverture.

Les rayons qui se dirigeaient vers la partie de la paroi qui a été enlevée passeront maintenant au dehors du système, et il est clair que si, au moyen d'un spectroscope muni d'un bolomètre, nous pouvions examiner la radiation qui sort de l'ouverture dans les premiers instants, cela nous ferait connaître l'état de rayonnement qui existait à l'intérieur de l'enceinte. Il faut remarquer, cependant, qu'en général ce ne sera que pendant un temps extrêmement court, beaucoup trop court pour permettre des observations, que les rayons sortant de l'ouverture correspondront à cet état. À cause de la grande vitesse de propagation, les vibrations qui se trouvaient à l'entour du corps pondérable auront bientôt quitté le système, et le rayonnement s'affaiblira, à moins que le corps n'émette rapidement une quantité de rayons suffisante pour remplacer l'énergie qui s'est élancée au dehors. On peut démontrer qu'il en sera ainsi lorsque le corps pondérable a la propriété d'absorber tous les rayons qu'il reçoit; on connaîtra donc la fonction cherchée si l'on réussit à déterminer l'émission d'un corps de cette nature, d'un corps « noir » comme on dit ordinairement.

Or, grâce à une idée ingénieuse de BOLTZMANN, qui a été reprise par M. M. W. WIEN et LUMMER, on est parvenu à réaliser un corps noir, et à en examiner le rayonnement. C'est un point sur lequel nous aurons à revenir. Ce qui nous intéresse pour le moment, c'est le résultat général de ces expériences. Pour chaque température T, on peut représenter graphiquement la fonction du rayonnement F en prenant pour abscisses les valeurs de λ et pour ordonnées celles de F. La courbe obtenue montre une allure à laquelle on aurait pu s'attendre; l'ordonnée est maximum pour une longueur d'onde déterminée λ_m, et devient insensible pour des valeurs très petites ou très grandes des abscisses. Il n'est guère nécessaire d'ajouter que l'aire comprise entre la courbe et l'axe des longueurs d'onde, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int_0^\infty F(\lambda, T)\, d\lambda, \tag{2}$$

est la mesure du rayonnement total du corps noir, ou bien de l'énergie totale qui existe dans l'unité de volume de l'éther contenu dans notre enceinte.

Cette grandeur croît rapidement lorsqu'on élève la température, et il y a en même temps un changement profond dans la distribution de l'énergie dans le spectre. Il en est du corps noir comme de beaucoup d'autres qui ne peuvent pas être appelés ainsi; l'échauffement favorise l'émission de rayons à petite longueur d'onde, de sorte que l'ordonnée maxima se déplace vers le côté du violet.

C'est sur cette influence de la température que se sont portées les recherches théoriques qui ont suivi celles de KIRCHHOFF. BOLTZMANN a démontré que le rayonnement total doit être proportionnel à la quatrième puissance de la température, et WIEN a assigné à la fonction du rayonnement la forme

$$F(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T), \tag{3}$$

où $f(\lambda T)$ est une fonction du produit de la longueur d'onde par la température. On en déduit que le déplacement du maximum vers le violet suit une loi bien simple; la longueur d'onde qui lui correspond est inversement proportionnelle à la température.

Nous verrons dans la suite que certaines considérations pourraient nous porter à croire qu'après tout ces lois remarquables ne sont pas conformes à la réalité. Toutefois, il est certain que leur déduction appartient à ce qu'on a fait de plus beau en physique théorique, et qu'au premier abord elles semblent mériter une entière confiance. On peut invoquer à leur appui non seulement l'accord très satisfaisant avec les expériences de LUMMER et PRINGSHEIM, mais aussi la solidité des théorèmes dont BOLTZMANN et WIEN se sont servis dans leurs raisonnements. Il est vrai que la thermodynamique à elle seule ne leur a pas suffi; on a été obligé d'emprunter à la théorie électromagnétique de la lumière la notion d'une pression exercée par les rayons, et de faire intervenir le changement de longueur d'onde qui est produit, selon le principe bien connu de DOPPLER, par le déplacement d'une paroi réfléchissante; mais ces principes semblent être à l'abri de tout doute.

Vous voyez que le problème posé par KIRCHHOFF n'est pas entièrement résolu par notre dernière équation. Au lieu des deux grandeurs λ et T, nous avons maintenant la seule variable λT, mais la manière dont ce produit entre dans la fonction f reste à déterminer.

Pour pouvoir aller plus loin, il est indispensable de pénétrer le mécanisme intime des phénomènes; il faudra se rendre compte des mouvements invisibles des petites particules du corps pondérable, et du lien qu'il y a entre ces mouvements et le champ électromagnétique dans l'éther. La théorie du rayonnement doit donc se rattacher aux théories moléculaires de la matière et se conformer à la méthode dont elles se servent.

Vous savez que CLAUSIUS a inauguré la théorie moderne des gaz et que MAXWELL et BOLTZMANN ont su donner un vaste développement à cette doctrine et à la théorie cinétique de la matière en général. Les travaux de ces physiciens fournissent un exemple remarquable de l'application de deux branches des mathématiques. En premier lieu, le calcul des probabilités y joue un rôle considérable, comparable à celui qui lui appartient dans la statistique. En effet, à part quelques résultats très simples, on ne peut faire presque rien dans la théorie des mouvements moléculaires sans se servir d'une méthode statistique. Comme il est impossible de suivre dans leurs mouvements chacune des innombrables particules dont un corps se compose, on est obligé de grouper ensemble les molécules qui se trouvent dans un même état de mouvement, ou plutôt dont l'état est compris entre des limites suffisamment resserrées. Quand on connaît le nombre des molécules appartenant à chaque groupe, on aura une image statistique de l'état du corps, et l'on pourra décrire les changements de cet état, si l'on réussit à indiquer comment les nombres en question varient d'un instant à un autre.

L'autre branche des mathématiques dont je dois dire quelques mots, est la géométrie polydimensionnelle, qui, dans les dernières années, a pris une grande importance pour plusieurs parties de la physique. Déjà, les physico-chimistes commencent à s'en servir pour coordonner les phénomènes compliqués qui se présentent dans leurs recherches. Tant qu'il s'agit des équilibres dans les systèmes formés de deux ou de trois substances, on peut employer une représentation de l'énergie libre ou du potentiel thermodynamique par une courbe ou une surface; la solution d'un problème est alors souvent ramenée à une construction géométrique. D'une manière analogue, on peut, dans l'étude des systèmes à un plus grand nombre de composantes, introduire une représentation graphique dans un espace à plus de trois dimensions. Bien entendu, on ne *voit* pas cette représentation, et en réalité l'avantage qu'on y trouve consiste dans l'emploi du *langage* de la géométrie polydimensionnelle, qui fait ressortir mieux que toute autre chose l'analogie des équilibres avec ceux qui se présentent dans des systèmes moins compliqués.

Signalons aussi, à ce propos, l'exemple donné par HERTZ dans son admirable traité sur les principes de la mécanique. Grâce à un mode d'expression qui a été modelé d'après celui de la géométrie à n dimensions, il a pu réduire tous les phénomènes du mouvement à cette loi fondamentale, que tout système matériel se meut avec vitesse constante suivant une ligne dont la courbure est la plus petite qui soit compatible avec les liaisons du système. Dans cette théorie, certains principes généraux, tels que celui de la moindre action, prennent une forme très claire, que, du reste, on peut leur conserver si l'on préfère les idées fondamentales de la mécanique ordinaire aux nouvelles hypothèses par lesquelles HERTZ a voulu les remplacer.

Dans les questions de statistique, les méthodes de la géométrie polydimensionnelle se présentent immédiatement à l'esprit dès que le nombre des variables qu'on prend pour base du groupement est supérieur à trois. Si les divers cas qui font l'objet de la statistique ne se distinguent que par la valeur d'une variable unique, on peut, en prenant cette dernière pour coordonnée, représenter chaque cas par un point sur une ligne droite. Les cas dans lesquels la variable en question est comprise entre des limites données correspondront à des points situés sur une certaine partie de la ligne, et on connaît la loi de la distribution des différentes valeurs de la variable, quand on a exprimé en fonction de la coordonnée la densité de la distribution des points représentatifs.

Une méthode analogue peut être suivie quand le groupement se fait selon les valeurs de deux ou de trois variables; la représentation graphique se fera alors dans un plan ou dans un espace. Ici encore, chaque cas particulier a son point représentatif, dont les coordonnées indiquent les valeurs des variables fondamentales, et la grandeur sur laquelle on devra porter son attention, est de nouveau la densité de la distribution, c'est-à-dire le nombre des points par unité de surface ou unité de volume.

On comprend facilement l'extension qu'on peut donner à ce qui précède. Lorsqu'il y a n variables fondamentales, on peut considérer leurs valeurs comme les coordonnées d'un point dans un espace à n dimensions; on dira que ces points, ou les cas qu'ils représentent, sont distribués dans un domaine polydimensionnel, et on entendra par densité de la distribution le nombre des points par unité d'étendue.

Cette définition suppose qu'on puisse évaluer la grandeur d'un domaine qui est limité d'une manière quelconque; en d'autres termes, la grandeur d'un intervalle qu'on laisse libre aux variations des grandeurs fondamentales. C'est un problème qu'on peut toujours résoudre après avoir fixé que la grandeur d'un intervalle dans lequel les variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont simultanément comprises entre x_1 et $x_1 + dx_1$, x_2 et $x_2 + dx_2, \ldots x_n$ et $x_n + dx_n$ sera représentée par le produit $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$.

Parmi les théorèmes dans lesquels il est question de l'étendue de ces domaines polydimensionnels, il y en a un dû à LIOUVILLE, qui est d'une fréquente application dans les théories moléculaires. Considérons un système matériel dont le mouvement est déterminé par les équations de HAMILTON

$$\dot{q} = \frac{\partial E}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial E}{\partial q},$$

où l'on a désigné par q les n coordonnées de LAGRANGE, par $\dot{q}$ les vitesses, par p les moments correspondants, et par E l'énergie exprimée en fonction des coordonnées et des moments. À chaque système de valeurs des q et des p existant à un moment t_1, correspondront des valeurs déterminées q', p' de ces variables à un instant postérieur t_2, et si nous laissons aux valeurs initiales la liberté de varier dans un domaine $d\mathrm{S}$ infiniment petit de l'étendue à $2n$ dimensions qui leur correspond, les valeurs finales seront limitées à un domaine $d\mathrm{S}'$ de l'étendue (q', p'). Le théorème de LIOUVILLE nous enseigne qu'on a toujours

$$d\mathrm{S}' = d\mathrm{S}.$$

J'espère que vous me pardonnerez cette digression, que j'ai cru avoir peut-être quelque intérêt pour ceux d'entre vous qui ont un peu perdu l'habitude de la géométrie polydimensionnelle.

Revenons maintenant aux mouvements dans un système de molécules. Dans le cas d'un gaz dont les particules sont considérées comme des points matériels, les composantes de la vitesse d'une molécule peuvent être prises pour variables fondamentales, et l'état sera stationnaire lorsque la densité de la distribution est exprimée par la fonction

$$ae^{-kE}, \tag{4}$$

où a et k sont des constantes, tandis que E désigne l'énergie cinétique d'une molécule. Cette formule exprime la loi bien connue de Maxwell, que Boltzmann a su étendre à des gaz polyatomiques. Il trouva qu'on n'a rien à changer à la forme de l'expression (4). Si on prend pour variables fondamentales les coordonnées rectangulaires du centre de gravité d'une molécule, les composantes de la vitesse de ce point et les coordonnées et moments qui définissent les positions et les vitesses des atomes relatives au centre de gravité, la fonction représente toujours, pour un état stationnaire du gaz, la densité de la distribution dans l'espace polydimensionnel correspondant à toutes ces variables, c'est-à-dire que le nombre des molécules pour lesquelles les valeurs des variables se trouvent dans un certain intervalle infiniment petit sera donné par le produit de la grandeur de cet intervalle par la fonction (4). Seulement, E doit signifier maintenant l'énergie totale d'une molécule, y compris l'énergie potentielle qui peut être due à l'action de forces extérieures, telles que la gravité.

Ce qui nous intéresse surtout dans ces théories, c'est la conclusion qu'on peut en tirer en ce qui concerne l'énergie cinétique d'une molécule ou d'un atome. On trouve qu'à température donnée, la valeur moyenne de cette énergie, pour autant qu'elle dépend du mouvement du centre de gravité, a une valeur entièrement déterminée, à laquelle on ne peut rien changer, ni par l'action de forces extérieures, ni par un changement d'état d'agrégation, ni même par une combinaison ou décomposition chimique. Cette énergie moyenne est proportionnelle à la température T et peut donc être représentée par αT, où α est une constante universelle. Nous la verrons reparaître dans la théorie du rayonnement.

La méthode de Boltzmann est très générale, mais pourtant il y a des cas où elle ne s'applique pas, l'état intérieur d'un système pouvant être tellement compliqué qu'il devient difficile ou même impossible de choisir les unités ou les éléments pour lesquels on établira une statistique. Dans ces circonstances on peut se servir d'une autre méthode qu'on doit également à Boltzmann, et que Gibbs a mise sous une forme plus légèrement maniable.

Elle consiste à faire la statistique, non pas des molécules dont un corps se compose, mais d'un assemblage de corps entiers, qui peuvent tous être regardés comme des copies de celui qu'il s'agit d'étudier. Nous supposerons que le nombre N de ces corps soit très grand et qu'ils diffèrent plus ou moins les uns des autres par les positions relatives et les vitesses de leurs particules; alors nous pourrons faire la statistique de l'ensemble qu'ils constituent.

Définissons l'état d'un corps par n coordonnées générales q et par les moments correspondants p, et considérons ces variables fondamentales comme les coordonnées dans un espace à $2n$ dimensions. Soit dS un élément de cet espace, φdS le nombre des points représentatifs ou, comme nous dirons pour abréger, des corps qui s'y trouvent. Au point de vue statistique l'état de l'ensemble est connu lorsque φ, la densité de la distribution, est donnée en fonction des q et des p.

Les N systèmes de l'ensemble doivent être regardés comme simplement juxtaposés, sans aucune action mutuelle. Cependant, l'état de chacun d'eux se modifiera par les mouvements et les forces intérieurs. Donc, les points représentatifs se déplaceront, et ce n'est que pour certaines formes spéciales de la fonction φ que, malgré ce déplacement, la distribution avec laquelle on commence se maintient. En se servant du théorème de Liouville, on démontre facilement qu'on a une telle distribution stationnaire, c'est-à-dire un état de choses dans lequel il y a toujours le même nombre de systèmes dans un élément dS, si l'on pose

$$\varphi = Ce^{-\frac{E}{\Theta}},$$

E étant l'énergie d'un système — qui dépend des coordonnées et des moments — et C et Θ désignant des constantes. Un ensemble déterminé par cette équation est nommé par Gibbs un ensemble « canonique ».

Comme chaque système est indépendant des autres, chacun a une énergie constante, et son point représentatif se meut sur ce qu'on peut appeler une « surface de constante énergie ». Deux de ces surfaces, caractérisées par les valeurs E et $E + dE$ de l'énergie, renferment une certaine partie de l'étendue $2n$-dimensionnelle totale, disons une « couche » mince et les points représentatifs qui se trouvent dans cette couche, où ils sont uniformément répandus, y resteront pour toujours. Cela posé, on peut enlever dans la pensée tous les systèmes qui se trouvent au dehors de la couche. Si ensuite, pour ceux qui y appartiennent, on fait abstraction des différences infiniment petites entre leurs énergies, on obtient un ensemble que Gibbs appelle « microcanonique » et que Boltzmann avait déjà étudié sous le nom d'ensemble « ergodique ». Un ensemble de ce genre est caractérisé par la valeur de l'énergie commune à tous les systèmes, tandis qu'un ensemble canonique est défini par la valeur de la constante Θ, que Gibbs nomme le « module ».

Quel est maintenant le parti qu'on peut tirer de ces considérations, qui, au premier abord, semblent peu propres à nous apprendre quelque chose sur ce qui se passe dans un système réel? Si elles peuvent nous être utiles, c'est parce que, dans les systèmes avec lesquels nous faisons nos expériences, le nombre des particules ou éléments constituants est excessivement grand. Grâce à cela, il est très probable, sinon certain, que les grandeurs qui sont accessibles à nos observations sont sensiblement les mêmes dans la vaste majorité des systèmes d'un ensemble ergodique, et qu'on obtiendra les valeurs de ces grandeurs pour un corps réel en prenant les moyennes des valeurs qu'elles ont dans un tel ensemble. On peut même dire que, lorsque, au lieu d'opérer toujours sur un même morceau de cuivre, par exemple, on répète les mesures un grand nombre de fois sur des morceaux différents, « égaux » les uns aux autres dans le sens ordinaire de ce mot, c'est en réalité sur les corps d'un ensemble microcanonique qu'on fait les mesures. Substituer la considération des valeurs moyennes dans un tel ensemble à l'étude d'un seul et même corps, cela revient, en fin de compte, à négliger les petites différences qu'on trouverait, ou plutôt qu'on ne trouverait pas, parce qu'elles sont trop faibles, entre un échantillon de cuivre et un autre.

Quant à l'ensemble canonique, l'idée de s'en servir peut être regardée comme un artifice mathématique. Pour une valeur donnée du module Θ, les systèmes de l'ensemble ont une certaine énergie moyenne E, et, lorsque les particules ou éléments de chaque système sont très nombreux, il semble permis d'admettre que le nombre des systèmes dans lesquels l'énergie diffère tant soit peu de cette valeur moyenne est très petit par rapport au nombre total N. Par conséquent, les valeurs moyennes calculées pour l'ensemble canonique peuvent être considérées comme égales à celles qu'on trouverait pour un ensemble microcanonique caractérisé par l'énergie E; elles pourront donc nous faire connaître, elles aussi, les valeurs qui se rapportent à un système réel.

***

Après ces préliminaires, qui peut-être sont devenus trop longs, nous pouvons enfin aborder notre problème principal. Il nous sera facile d'en trouver une solution remarquable, que M. Jeans a été le premier à indiquer.

Nous devons nous figurer le corps M qui se trouve dans l'enceinte parallélipipédique comme composé d'innombrables atomes animés d'un mouvement perpétuel; de plus, il y a des particules chargées ou électrons, soit libres, soit captivées à l'intérieur des atomes. Ces électrons prennent part au mouvement calorifique, et doivent être regardés comme les véritables sources du rayonnement. En effet, d'après les idées modernes, le mouvement d'une particule non chargée n'a aucune influence sur l'éther; un électron, au contraire, devient le centre d'un rayonnement toutes les fois que sa vitesse change en direction ou en grandeur. D'un autre côté, les forces électriques qui existent dans un rayon de lumière agissent sur les électrons et leur communiquent un mouvement qu'ils partageront bientôt avec les autres particules du corps. Voilà la cause de l'absorption des rayons, par laquelle une partie de leur énergie est transformée en chaleur.

Vu le nombre énorme des atomes et électrons, la diversité de leurs mouvements, et la complexité des rayons qui s'entrecroisent dans l'éther, la méthode statistique est toute indiquée, et, comme il semble difficile de l'appliquer à un seul système, nous aurons recours à la méthode de Gibbs. Examinons d'abord la question de son applicabilité à notre problème.

L'état de l'éther dans un système où se trouvent des électrons mobiles est déterminé par un système d'équations aux dérivées partielles qui, au premier abord, semblent bien différentes des équations de Hamilton. Elles contiennent la force électrique, qui, grâce à un choix convenable des unités, peut être représentée par le même vecteur D que le déplacement diélectrique, la force magnétique H, la densité ϱ de la charge électrique, et la vitesse v avec laquelle un élément de la charge se déplace; enfin une constante c, égale à la vitesse de la lumière. En choisissant proprement les axes des coordonnées, et en indiquant par les signes D_x, D_y, D_z, H_x, etc. les composantes des vecteurs D, H, etc., nous aurons

(5) $$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\varrho,$$

(6) $$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0,$$

(7) $$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{1}{c}(\dot{D}_x+\varrho v_x), \text{ etc.}$$

(8) $$\frac{\partial D_z}{\partial y}-\frac{\partial D_y}{\partial z}=-\frac{1}{c}\dot{H}_x, \text{ etc.}$$

À ces équations, il faut joindre les conditions qui doivent être remplies aux parois de l'enceinte. Je supposerai que ces parois sont parfaitement conductrices, ce qui les rendra parfaitement réfléchissantes; alors la force électrique D sera partout normale à la paroi.

On peut démontrer que les conditions que je viens d'énumérer déterminent complètement le champ électromagnétique dans l'éther, quand on connaît, outre l'état initial, la distribution de la charge des électrons et le mouvement de ces particules. Quant à ce mouvement lui même, il faudra tenir compte, en l'étudiant, d'abord des forces qui peuvent agir entre les électrons et les particules non chargées, et, en second lieu, de la force exercée par l'éther. Par unité de charge, les composantes de cette dernière sont données par

(9) $$D_x+\frac{1}{c}(v_y H_z-v_z H_y), \text{ etc.}$$

Comme je viens de dire, ce système de formules est bien différent des équations de Hamilton. Cependant, on peut les y réduire. C'est ce qu'on peut faire en deux pas, dont le premier consiste dans l'établissement d'un théorème qui est analogue à celui de la moindre action et que j'exprimerai par la formule

(10) $$\delta\int_{t_1}^{t_2}(L-U)\,dt=0.$$

Ici, l'énergie électrique est représentée par U, l'énergie magnétique par L, et le signe δ se rapporte au passage d'un état de choses réel, qui satisfait à toutes les équations précédentes, à un état fictif, que je nommerai l'état ou le mouvement varié, et que nous précisons comme il suit. À partir de l'état réel qui existe à un moment quelconque t, nous donnons des déplacements infiniment petits aux électrons, et un changement infiniment petit aux composantes D_x, D_y, D_z, tels que l'équation (5) ne cesse pas d'être vraie, et que les conditions aux parois restent remplies. Ces déplacements et variations peuvent être des fonctions continues quelconques du temps; quand ils ont été choisis, nous connaissons pour chaque instant la position variée des électrons et le champ électrique varié dans l'éther. Le mouvement varié n'est autre chose que la succession de ces états variés, et les nouvelles vitesses des électrons, les valeurs de $\dot{D}_x$, $\dot{D}_y$, $\dot{D}_z$ et les grandeurs

$$\dot{D}_x + \varrho v_x, \text{ etc.},$$

qu'on peut appeler les composantes du courant varié, se trouvent complètement définies.

Entendons ensuite par H le vecteur déterminé par les équations (6) et (7), et calculons la valeur de L pour les deux mouvements par la formule

$$L = \tfrac{1}{2} \int H^2 dV,$$

où dV est un élément de volume; nous aurons alors la valeur de δL. Pareillement, nous obtiendrons δU en prenant pour les deux mouvements l'intégrale

$$U = \tfrac{1}{2} \int D^2 dV.$$

On peut démontrer maintenant que l'équation (10) est toujours vraie, pourvu que les déplacements des électrons et les variations de D s'annulent pour $t = t_1$ et $t = t_2$. Réciproquement, on peut trouver les équations (8) et les forces (9) en partant de la formule (10).

Il importe de remarquer que, pour arriver à cette équation, il n'est nullement nécessaire de penser à une explication mécanique des phénomènes électromagnétiques, dans laquelle L serait considéré comme l'énergie cinétique, et U comme l'énergie potentielle. Il nous suffit que nous ayons une équation de la même forme que celle qu'on rencontre dans la mécanique ordinaire.

Jusqu'ici nous n'avons parlé ni des particules sans charge, ni des actions non électromagnétiques. On en tiendra compte en comprenant sous le symbole U l'énergie potentielle de ces actions, et sous L l'énergie cinétique des particules (et des électrons eux-mêmes, si nous voulons leur attribuer une masse matérielle).

Passons maintenant du principe de la moindre action aux équations de Hamilton. À cet effet, il est nécessaire d'introduire un système de coordonnées q, propres à définir la position des particules et le champ électrique dans l'éther.

Je commencerai par choisir un nombre de coordonnées que j'appellerai toutes q_1, qui déterminent la position des particules non chargées, et un système de grandeurs q_2 qui fixent la position des électrons. Pour simplifier, je considérerai ces derniers comme des corps rigides; alors nous pouvons prendre pour chacun d'eux les coordonnées de son centre, et les angles qui déterminent son orientation.

Il nous reste à choisir les coordonnées pour le champ électrique dans l'éther. Or, quel que soit ce champ, on peut toujours le décomposer en deux parties superposées, dont la première est le champ qui existerait si les électrons se trouvaient en repos dans les positions indiquées par les coordonnées q_2, tandis que la seconde satisfait partout à la relation

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0,$$

chacune des deux parties remplissant les conditions aux parois. La première partie est entièrement déterminée par les coordonnées q_1, et le théorème de Fourier nous permet d'écrire pour la seconde

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} D_x &= \sum (q_3\alpha + q_3'\alpha') \cos\frac{u\pi}{f} x \sin\frac{v\pi}{g} y \sin\frac{w\pi}{h} z, \\ D_y &= \sum (q_3\beta + q_3'\beta') \sin\frac{u\pi}{f} x \cos\frac{v\pi}{g} y \sin\frac{w\pi}{h} z, \\ D_z &= \sum (q_3\gamma + q_3'\gamma') \sin\frac{u\pi}{f} x \sin\frac{v\pi}{g} y \cos\frac{w\pi}{h} z. \end{aligned} \right.$$

Ici, on a pris pour axes des coordonnées trois arêtes du parallélipipède, et on a représenté par f, g, h les longueurs de ces arêtes. Les coefficients u, v, w sont des nombres entiers et positifs, et pour chaque système (u, v, w) de leurs valeurs, on a introduit deux directions déterminées par les cosinus α, β, γ, α', β', γ', ces directions étant perpendiculaires entre elles et à celle qui est déterminée par $\frac{u}{f}, \frac{v}{g}, \frac{w}{h}$. De plus, pour chaque système (u, v, w), il a y deux coefficients q_3 et q_3'; enfin, les sommes doivent être étendues à toutes les combinaisons possibles des u, v, w. Ce sont les grandeurs q_3, q_3' — indiquées dans la suite par le seul symbole q_3 — qui seront les coordonnées pour l'éther.

Il s'agit maintenant d'indiquer les valeurs des énergies U et L. Lorsqu'un champ électrique ou magnétique résulte de la superposition d'un nombre de champs élémentaires, l'énergie se compose de plusieurs parties, dont les unes appartiennent aux champs élémentaires pris séparément, tandis que chacune des autres provient de la coexistence de deux champs élémentaires. Dans le cas qui nous occupe, il y a d'abord les champs électriques dépendant des coordonnées q_2 et q_3. Quant aux champs magnétiques, chacun d'eux correspond à une certaine distribution du courant électrique. Quand une coordonnée q_2 change avec le temps, c'est-à-dire quand un électron se déplace, nous avons un courant de convection, combiné avec un courant de déplacement dans l'éther ambiant; l'intensité de ces courants, et celle du champ magnétique qu'ils produisent, sont alors proportionnelles à $\dot{q}_2$. D'un autre côté, le changement d'une coordonnée q_3 déterminera un courant de déplacement dont on trouvera les composantes en différentiant par rapport à t les expressions (11). Ce courant et son champ magnétique sont proportionnels à la dérivée $\dot{q}_3$.

Remarquons encore que, dans l'expression pour l'énergie électrique, il n'y a ni de termes avec le produit d'un q_2 par un q_3, ni de termes qui contiennent le produit de deux q_3 différents. Pareillement, les produits de deux $\dot{q}_3$ feront défaut dans l'expression pour l'énergie magnétique.

En fin de compte, on peut écrire

$$U = U_0 + \frac{1}{16} fgh \Sigma q_3^2, \tag{12}$$

U_0 étant une fonction des coordonnées q_1 et q_2, et

$$L = L_0 + \frac{fgh}{16c^2} \Sigma \frac{\dot{q}_3^2}{\pi^2\left(\frac{u^2}{f^2}+\frac{v^2}{g^2}+\frac{w^2}{h^2}\right)} + \sum_{ij} l_{ij} \dot{q}_{2i} \dot{q}_{3j}, \tag{13}$$

où L_0 est une fonction homogène du second degré des dérivées $\dot{q}_1$ et $\dot{q}_2$. Le dernier terme de L contient tous les produits d'un $\dot{q}_2$ par un $\dot{q}_3$, chaque produit étant multiplié par un coefficient qui est une fonction des coordonnées de l'électron auquel se rapporte $\dot{q}_{2i}$. Ce coefficient dépend des valeurs de u, v, w, α, β, γ correspondant à la coordonnée q_{3j}, mais non pas de cette coordonnée elle-même.

Par un raisonnement qu'il est inutile d'indiquer ici, la formule générale (10) conduit maintenant à des équations qui sont semblables à celles de Lagrange et qui pourraient servir à traiter les problèmes qu'on étudie ordinairement à l'aide des formules (5)-(9). Par exemple, dans l'expression pour la force exercée sur un électron, il y aura un terme qui contient les vitesses $\dot{q}_2$ de cet électron, multipliées par les grandeurs $\dot{q}_3$; ce terme représente la force qui est due au mouvement de la particule dans le champ magnétique.

Notons aussi que l'équation relative à une coordonnée q_3 a la forme

$$\frac{fgh}{8c^2} \cdot \frac{\ddot{q}_{3j}}{\pi^2\left(\frac{u^2}{f^2}+\frac{v^2}{g^2}+\frac{w^2}{h^2}\right)} + \sum_i l_{ij} \ddot{q}_{2i} + \sum_i \frac{dl_{ij}}{dt} \dot{q}_{2i} + \frac{1}{8} fgh q_{3j} = 0. \tag{14}$$

Les termes contenant $\ddot{q}_{2i}$ peuvent nous faire connaître la radiation émise par les électrons; nous savons déjà qu'une telle radiation existe toutes les fois qu'il y a des accélérations $\ddot{q}_2$.

Du reste, lorsque les électrons se trouvent en repos, de sorte que $\dot{q}_2 = 0$ et $\ddot{q}_2 = 0$, la formule (14) montre que q_{3j} peut subir des changements périodiques représentés par

$$q_{3j} = a \cos(nt + s),$$

où a, n et s sont des constantes.

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (11), celles-ci prennent la forme correspondant à des ondes stationnaires. La longueur de ces ondes est donnée par

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{u^2}{f^2}+\frac{v^2}{g^2}+\frac{w^2}{h^2}}}, \tag{15}$$

et la durée des vibrations par

$$\tau = \frac{2}{c\sqrt{\frac{u^2}{f^2}+\frac{v^2}{g^2}+\frac{w^2}{h^2}}},$$

de sorte qu'on retrouve la relation générale

$$\lambda = c\tau .$$

Dans ce qui précède nous avons parlé des équations de LAGRANGE. Celles de HAMILTON s'en déduisent par le procédé ordinaire, si l'on introduit les moments p qu'on obtient en différentiant l'expression (13) par rapport aux grandeurs $\dot{q}$.

Une des conditions qui est nécessaire pour que la méthode de GIBBS puisse être appliquée à notre système, se trouve maintenant remplie. Cependant il y a encore une difficulté. Dans chacun des systèmes dont nous pourrions composer un ensemble, le nombre des coordonnées q_3 qui définissent le champ électrique dans l'éther est infini, et il paraît difficile de faire la statistique par rapport à un nombre infini de variables. Il est donc nécessaire de remplacer le système réel avec son nombre infini de degrés de liberté par un système fictif pour lequel ce nombre n est limité, et de traiter le système réel comme un cas limite dont on s'approche de plus en plus en faisant accroître le nombre n. Le cas est analogue à celui d'une corde vibrante qui a également un nombre infini de coordonnées. Ici, on peut limiter ce nombre en supposant que la masse soit concentrée en des points placés à des distances finies sur un fil qui lui même est sans masse appréciable, un expédient dont on s'est souvent servi pour trouver les modes de vibration d'une corde continue. On pourrait suivre la même voie dans l'étude d'un système électromagnétique, si l'on pouvait commencer par des équations ne contenant que les valeurs des grandeurs électromagnétiques dans un groupe de points situés à des distances finies les uns des autres. Ce remplacement des équations différentielles par des équations à différences finies est facile lorsqu'il s'agit des formules qui s'appliquent à l'éther libre, mais il m'a été impossible de faire la même chose pour les équations qui contiennent la densité ϱ de la charge.

Heureusement, il y a un autre artifice. Le nombre des coordonnées d'un système mécanique peut être diminué par l'introduction de nouvelles liaisons; on peut, par exemple, imaginer un mécanisme qui empêche une corde de se mouvoir comme elle le ferait en donnant les harmoniques au delà d'un certain nombre de vibrations, tout en la laissant libre de donner les tons inférieurs. D'une manière analogue, nous obtiendrons un système ne possédant qu'un nombre fini de degrés de liberté, si nous imaginons dans l'éther des liaisons qui excluent les champs électriques représentés par les formules (11), pour lesquels la longueur d'onde (15) serait inférieure à une certaine limite λ_0. C'est avec ce système fictif que nous pouvons former un ensemble canonique de GIBBS au module Θ.

Parmi les propriétés d'un tel ensemble il y en a une qui est d'un intérêt spécial pour notre but. Supposons qu'une des coordonnées q, ou un des moments p

n'entre dans l'expression pour l'énergie E que dans un terme de la forme αq^2 ou βp^2. On démontre alors que la valeur moyenne de la partie de l'énergie qui est indiquée par ce terme, c'est-à-dire de la partie de l'énergie qui correspond à l'ordonnée ou au moment en question, est donnée par la moitié du module Θ.

Ce résultat s'applique à quelques-unes des variables que nous avons à considérer. En premier lieu, si m est la masse d'une particule non chargée, disons d'une molécule, du corps M, et q_1 une des coordonnées rectangulaires du centre de gravité de cette molécule, l'énergie L contient le terme $\frac{1}{2} m \dot{q}_1^2$ ou $\frac{p_1^2}{2m}$, si p_1 est le moment correspondant à la coordonnée q_1. Evidemment, ce moment ne se retrouve dans aucun autre terme de L; la valeur moyenne dans l'ensemble canonique, de la partie de L qui lui correspond est $\frac{1}{2}\Theta$, et on trouve $\frac{3}{2}\Theta$ pour la valeur moyenne de l'énergie due au mouvement du centre de gravité de la molécule. En effet, on peut répéter le raisonnement précédent, en entendant par q_1 la deuxième ou la troisième coordonnée de ce point. Fixons maintenant notre attention sur un nombreux groupe de molécules égales contenues dans le corps M; soit ν le nombre de ces molécules. L'énergie totale qu'elles possèdent en vertu du mouvement de leurs centres de gravité, aura dans l'ensemble canonique la valeur moyenne $\frac{3}{2}\nu\Theta$, et il faudra lui attribuer la même valeur dans le seul corps M.

Nous avons déjà vu que l'énergie en question peut être représentée par $\alpha\nu T$, T étant la température et α une constante universelle. La comparaison des deux résultats montre que le module Θ doit être proportionnel à la température du corps, et que l'on a

$$\Theta = \frac{2}{3}\alpha T.$$

En second lieu, chaque coordonnée q_3 de l'éther ne se montre que dans un seul terme

$$\frac{1}{16} fghq_3^2$$

de l'expression pour l'énergie électrique. Nous en concluons que, dans l'ensemble canonique, l'énergie qui appartient à une seule coordonnée q_3 est donnée, en moyenne, par

$$\frac{1}{2}\Theta = \frac{1}{3}\alpha T,$$

et celle qui appartient aux *deux* coordonnées q_3 et q_3' que nous avons introduites pour un système de valeurs des nombres u, v, w, par

$$\frac{2}{3}\alpha T.$$

La forme de la fonction du rayonnement est une conséquence presque immédiate de ce résultat. Il est permis de supposer que les dimensions f, g, h du parallélipipède sont très grandes par rapport aux longueurs d'onde qui entrent en jeu. Cela posé, on trouve

$$\frac{4\pi}{\lambda^4} fgh d\lambda$$

pour le nombre des systèmes (u, v, w) pour lesquels la longueur d'onde est comprise entre les limites λ et $\lambda + d\lambda$, et

$$\frac{8\pi\alpha T}{3\lambda^4} fgh d\lambda$$

pour l'énergie électrique moyenne dans les systèmes de l'ensemble canonique, en tant que cette énergie appartient à l'intervalle $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. L'énergie doit avoir cette même valeur pour le système que nous étudions, ce qui donne

$$\frac{8\pi\alpha T}{3\lambda^4} d\lambda$$

pour l'unité de volume. Remarquons enfin que dans l'éther qui entoure le corps M, l'énergie magnétique est égale à l'énergie électrique, et nous voyons, en nous bornant toujours à l'intervalle $d\lambda$, que la valeur totale de l'énergie par unité de volume est

$$\frac{16\pi\alpha T}{3\lambda^4} d\lambda,$$

et que la fonction du rayonnement est donnée par

$$F(\lambda, T) = \frac{16\pi\alpha T}{3\lambda^4}. \tag{16}$$

Avant d'entrer dans une discussion de ce résultat, je dois mentionner la belle théorie du rayonnement qui a été développée par M. Planck. Ce physicien suppose qu'un corps pondérable contienne des particules dans lesquelles des oscillations électriques peuvent avoir lieu, la plus simple image qu'on puisse se former d'un tel « résonateur » étant celle d'un seul électron qui peut vibrer autour de sa position d'équilibre. Chaque résonateur a sa propre période de vibration, et nous admettrons que toutes les périodes se trouvent représentées dans le corps.

Or, Planck considère d'un côté l'équilibre entre les vibrations des résonateurs et le rayonnement dans l'éther, et d'un autre côté le partage de l'énergie qui se fait entre les résonateurs et les particules ordinaires. La première partie de la théorie est basée sur les équations du champ électromagnétique; dans la seconde, Planck suit une marche semblable à celle dont on s'est souvent servi dans les théories moléculaires. Elle revient à examiner quelle distribution de l'énergie doit être considérée comme la plus probable. Ici, une idée nouvelle est introduite. PLANCK suppose qu'un résonateur ne puisse pas gagner ou perdre de l'énergie par degrés infinitésimaux, mais seulement par des portions ayant une grandeur finie et déterminée ; ces portions seraient inégales pour des résonateurs à périodes de vibration τ différentes. En effet, il attribue à l'élément d'énergie en question la grandeur

$$\frac{h}{\tau},$$

où h est une constante.

Enfin, par un raisonnement dans lequel je ne puis le suivre ici, il obtient la formule suivante pour la fonction du rayonnement :

$$F(\lambda, T) = \frac{8\pi c h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{3ch}{2\alpha\lambda T}} - 1}.$$

Cette équation montre un accord très satisfaisant avec les résultats expérimentaux de LUMMER et PRINGSHEIM. Elle a la forme de la formule (3), et elle conduit à un maximum de F pour une valeur de λ qui est inversement proportionnelle à la température.

Pour de grandes valeurs de la longueur d'onde, on peut remplacer

$$e^{\frac{3ch}{2\alpha\lambda T}} - 1$$

par

$$\frac{3ch}{2\alpha\lambda T},$$

et la formule de PLANCK devient identique à celle qu'on trouve par la méthode de GIBBS. Cet accord des résultats obtenus par deux méthodes bien différentes est très curieux, mais malheureusement il n'existe que pour les grandes longueurs d'onde. Selon la théorie que je vous ai présentée, la formule (16) devrait être vraie pour toutes les longueurs d'onde au dessus de la valeur que j'ai nommée λ_0 ; dans le cas limite qu'on obtient en faisant diminuer de plus en plus cette dernière, l'équation devrait même s'appliquer à toutes les longueurs d'onde, si petites qu'elles soient.

C'est ce résultat que j'avais en vue lorsque je disais que peut-être les lois de BOLTZMANN et de WIEN ne pourraient être maintenues. Il est vrai que la fonction que nous avons trouvée rentre dans la forme générale (3), mais il n'y a plus de maximum, et si l'on étend l'intégrale de la fonction à toutes les longueurs d'onde, de 0 à ∞, on obtient une grandeur infinie. Cela veut dire que, pour être en équilibre avec un corps d'une température donnée, l'éther devrait contenir une quantité infinie d'énergie ; en d'autres termes, si on commence par un corps doué d'une quantité finie d'énergie, cette dernière se dissiperait entièrement dans l'éther. Nous pouvons ajouter qu'à la longue elle s'y trouverait sous forme d'ondes excessivement courtes, et que même, parce que le produit αT diminuerait de plus en plus, l'énergie qui correspond aux longueurs d'onde au dessus de quelque valeur fixe arbitrairement choisie tendrait vers 0.

Tout cela semble bien étrange au premier abord et j'avoue que, lorsque JEANS publia sa théorie, j'ai espéré qu'en y regardant de plus près, on pourrait démontrer que le théorème de l'« equipartition of energy », sur lequel il s'était fondé, est inapplicable à l'éther, et qu'ainsi on pourrait trouver un vrai maximum de la fonction $F(\lambda, T)$. Les considérations précédentes me semblent prouver qu'il n'en est rien, et qu'on ne pourra échapper aux conclusions de JEANS à moins qu'on ne modifie profondément les hypothèses fondamentales de la théorie. Du reste, on serait conduit à des résultats analogues si on appliquait la méthode de GIBBS à d'autres systèmes possédant une infinité de degrés de liberté. On peut se figurer, par exemple, deux systèmes de molécules, dont les centres se meuvent dans un plan fixe, les molécules du premier système se mouvant dans ce plan comme les particules d'un gaz se meuvent dans l'espace, et celles du second système étant attachées à des cordes tendues dans une direction perpendiculaire au plan. On trouverait sans doute que, par les chocs mutuels, l'énergie d'un tel système s'accumulerait de plus en plus dans les cordes, y produisant des vibrations à longueurs d'onde extrêmement courtes.

Je ne veux pas nier que la méthode de GIBBS ne soit un peu artificielle et qu'il ne soit préférable d'établir la théorie du rayonnement sur l'examen de ce qui se passe, non pas dans un ensemble, mais dans un seul et même système. Aussi ai-je fait une tentative dans cette direction il y a déjà quelques années. On a de bonnes raisons pour croire que les métaux contiennent des électrons libres animés d'un mouvement rapide, dans lequel ils se heurtent contre les atomes métalliques après avoir parcouru des trajets d'une très petite longueur. Les changements de vitesse qui sont produits par les chocs doivent donner lieu à une émission dont on peut chercher à calculer les particularités, et on obtient la valeur de la fonction F en combinant le résultat avec celui qu'on trouve pour l'absorption; on voit facilement, en effet, que l'état de l'éther dans notre enceinte est entièrement déterminé par les pouvoirs émissif et absorbant du corps pondérable M.

Pour simplifier, j'ai effectué le calcul pour une mince plaque métallique. En me bornant à de grandes longueurs d'onde, j'ai trouvé une formule identique à celle que nous venons de déduire au moyen de la méthode de GIBBS. Cela est très satisfaisant, mais je n'ai pas réussi à appliquer ce procédé direct à des longueurs d'onde plus petites. Dès qu'on renonce aux simplifications qui sont permises pour les grandes longueurs, il devient très difficile de débrouiller le rayonnement par le théorème de FOURIER et de calculer d'une manière exacte l'absorption produite par un essaim d'électrons fourmillant entre les atomes du métal. Pour faire ressortir encore mieux la difficulté du problème, j'ajouterai que les ondes qui existent dans l'éther sont continuellement éparpillées par les électrons, et que cette dispersion est accompagnée d'un changement des périodes lorsque les électrons se trouvent en mouvement.

La méthode basée sur la considération d'un ensemble canonique a le mérite d'embrasser tous ces détails, parce que les équations de HAMILTON qu'elle prend pour point de départ comprennent toutes les actions qui existent entre les électrons et l'éther.

Du reste, quel que soit notre jugement sur les différentes théories, leur résultat commun, que pour les grandes longueurs d'onde la fonction du rayonnement a la forme

$$F(\lambda, T) = \frac{16\pi\alpha T}{3\lambda^4},$$

peut être considéré comme définitivement acquis. Si on compare avec cette formule les mesures faites sur les rayons infra-rouges extrêmes, on peut en déduire la constante universelle α. Cela nous donne la valeur αT de l'énergie moyenne d'une molécule gazeuse à la temperature T, et ensuite, parce que nous connaissons la vitesse du mouvement calorifique, la masse des molécules et atomes. C'est M. PLANCK qui, le premier, a montré la possibilité de ces calculs, dont le résultat s'accorde admirablement avec les nombres obtenus par des méthodes entièrement différentes.

On voit aussi que l'énigme posée par le fait que la fonction $F(\lambda, T)$ est indépendante des propriétés spéciales des corps n'est pas restée sans solution; c'est l'énergie d'agitation des particules constituantes, représentée par αT, qui détermine l'intensité du rayonnement dans l'éther.

Dans la formule de PLANCK, il y a encore la constante h qui est commune à tous les corps, et si l'on adopte la théorie de ce physicien, on peut espérer découvrir un jour la signification physique de cette constante, ce qui constituerait un progrès de la plus haute importance.

Il me reste à parler de la manière dont la théorie de JEANS, dans laquelle il n'y a pas d'autre constante que le seul coefficient α, peut rendre compte du maximum dans la courbe du rayonnement que les expériences ont mis en évidence. L'explication donnée par JEANS — et c'est bien la seule qu'on puisse donner — revient à dire que ce maximum a été illusoire; si on a cru l'observer, ce serait parce qu'on n'avait pas réussi à réaliser un corps qui fût noir pour les petites longueurs d'onde.

En effet, il ne faut pas perdre de vue que la formule que nous avons trouvée pour la fonction du rayonnement, qui dépend du rapport entre les pouvoirs émissif et absorbant d'un corps, ne nous apprend rien sur la grandeur de ces pouvoirs pris séparément. Un exemple bien simple, dans lequel je me bornerai à l'intensité de l'émission, peut nous faire voir que l'échange d'énergie entre la matière et l'éther peut devenir de plus en plus lent à mesure que la fréquence des vibrations augmente. Supposons qu'un électron, se mouvant le long d'une ligne droite, soit repoussé par un point fixe de cette ligne avec une force inversement proportionnelle au cube de la distance x. Nous pouvons poser alors, en choisissant convenablement le moment $t = 0$,

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 t^2},$$

où a et b sont des constantes positives, et

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2 t^2)^3}}. \tag{17}$$

C'est cette accélération qui produit le rayonnement, et pour décomposer ce dernier en des parties qui se distinguent par la longueur d'onde, nous devons développer la fonction (17) à l'aide du théorème de FOURIER. Or, si on veut déterminer l'amplitude des vibrations de la fréquence n, c'est-à-dire de la longueur d'onde $\frac{2\pi c}{n}$, on est conduit à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos nt}{\sqrt{(a^2+b^2t^2)^3}}\,dt,$$

qui tend vers la valeur

$$\frac{1}{ab^2}\sqrt{\frac{\pi b n}{2a}}\,e^{-\frac{an}{b}}$$

pour de grandes valeurs de n. À cause du facteur exponentiel, cette expression finit par devenir extrêmement petite. Il est permis de présumer qu'on obtiendra un résultat semblable lorsqu'un électron se meut sous l'influence d'une force suivant une loi différente, et que l'absorption deviendra très faible en même temps que l'émission. Il se pourrait donc fort bien que le corps dont se sont servis LUMMER et PRINGSHEIM, tout en étant équivalent à un corps noir pour de grandes longueurs d'onde, ait eu un pouvoir émissif beaucoup plus petit que celui d'un tel corps pour les ondes les plus courtes.

Remarquons aussi que la petitesse des pouvoirs émissif et absorbant doit avoir pour conséquence qu'en ce qui concerne les petites longueurs d'onde l'équilibre entre l'éther et un corps pondérable s'établit avec une extrême lenteur. On peut même dire que l'équilibre final, dans lequel l'énergie se serait uniformément distribuée sur une infinité de modes de vibration, constituerait un état qu'il est impossible de se représenter et qui ne sera jamais atteint dans un temps fini. En réalité il n'y aurait qu'une transformation continuelle de l'énergie dans la direction de cet état.

En terminant cette discussion, je ne puis nullement prétendre vous avoir présenté une solution définitive du problème proposé. En physique théorique on ne peut faire autre chose qu'examiner les différentes hypothèses et évaluer leurs degrés de probabilité en indiquant les conséquences qu'on peut tirer de chacune d'elles. Eh bien, si l'on compare la théorie de PLANCK et celle de JEANS, on trouve qu'elles ont toutes les deux leurs mérites et leurs défauts. La théorie de PLANCK est la seule qui nous ait donné une formule conforme aux résultats des expériences, mais nous ne pouvons l'adopter qu'à condition de remanier profondément nos idées fondamentales sur les phénomènes électromagnétiques. On le voit déjà lorsqu'on considère qu'un seul électron qui se meut d'une manière quelconque émet des rayons de toutes les longueurs d'onde; évidemment, il est impossible d'appliquer à un tel cas l'hypothèse des éléments d'énergie dont la grandeur dépend de la fréquence. La théorie de JEANS, au contraire, nous oblige à attribuer à un hasard pour le moment inexplicable l'accord entre les observations et les lois de BOLTZMANN et de WIEN.

Heureusement on peut espérer que de nouvelles déterminations expérimentales de la fonction du rayonnement permettront une décision entre les deux théories.

NOTE ADDITIONNELLE.

Quelque temps après le Congrès, M. W. WIEN a eu l'obligeance de me faire remarquer que je ne m'étais pas suffisamment rendu compte des difficultés qu'on rencontre dans la théorie de JEANS, et, en y réfléchissant de nouveau, j'ai reconnu qu'en effet les considérations exposées dans ma conférence ne suffisent pas à faire disparaître le désaccord qui existe entre cette théorie et les observations. Dans les expériences de LUMMER et PRINGSHEIM, le pouvoir émissif du corps rayonnant pour les petites longueurs d'onde à été considérablement inférieur à celui qu'on déduit de notre formule (16); donc, si cette équation était la vraie expression du rayonnement d'un corps noir, le rayonnement mesuré par ces physiciens aurait été beaucoup moindre que celui d'un tel corps et, en vertu de la loi de KIRCHHOFF, le pouvoir absorbant du système qu'ils ont employé devrait avoir été inférieur à l'unité à un degré qu'il est impossible d'admettre (1).

Du reste, on peut faire ressortir l'insuffisance de la théorie de JEANS par un calcul bien simple. Prenons, par exemple, le cas d'une plaque polie en argent, ayant la température de 15°, et comparons, pour la lumière jaune, le pouvoir emissif E_1 de ce corps à celui (E_2) d'un corps noir à la température de 1200°. Sous l'incidence normale, l'argent poli réfléchit environ 90 % de la lumière incidente; son pouvoir absorbant est donc égal à $\frac{1}{10}$, et on aura $E_1 = \frac{1}{10} E_3$, si l'on désigne par E_3 le pouvoir émissif d'un corps noir à 15°. D'un autre côté, la formule (16) exige que, pour une longueur d'onde déterminée, le pouvoir émissif $F(\lambda, T)$ soit proportionnel à la température absolue, d'où l'on déduit $E_3 = \frac{288}{1473} E_2 = \frac{1}{5} E_2$ et, par conséquent, $E_1 = \frac{1}{50} E_2$.

Or, à la température de 1200°, un corps noir (dont le pouvoir émissif surpasse celui de tous les autres) brillerait d'un éclat bien vif, et une substance douée d'un pouvoir émissif cinquante fois plus petit, devrait sans doute être visible dans l'obscurité. Il est donc bien certain que, si l'on excepte les ondes très longues, les corps émettent beaucoup moins de lumière, en proportion de leur pouvoir absorbant, que ne le demande la théorie de JEANS. Cela nous prouve que la théorie qui se base sur les équations ordinaires de l'électrodynamique et sur le théorème de l'« equipartition of energy », doit être profondément remaniée; on devra introduire l'hypothèse de particules rayonnantes, telles que les résonateurs de PLANCK, auxquelles, pour une raison ou une autre, les théorèmes de la mécanique statistique ne soient pas applicables.

(1) Des mesures directes de ce pouvoir ont montré qu'il ne diffère qu'extrêmement peu de l'unité. (Voir LUMMER et PRINGSHEIM, Physikalische Zeitschrift, *9*, 1908, p. 449).

Il ne faut pas croire, cependant, qu'en adoptant cette manière de voir, on puisse venir à bout de toutes les difficultés. Il est tout au moins très probable que, dans quelques corps, notamment dans les métaux, il y ait, outre les résonateurs, des électrons libres, et je ne vois aucune raison pour laquelle la théorie de GIBBS ne s'appliquerait pas à ces particules. On serait donc conduit à ce résultat paradoxal que l'état d'équilibre entre l'éther et la matière pondérable qui s'établit par l'intermède des résonateurs, ne serait pas identique à celui qui se produit par l'échange d'énergie, d'une part entre la matière et les électrons, et d'autre part entre ces derniers et l'éther, conséquence qui serait en contradiction avec les lois de la thermodynamique, d'après lesquelles il ne peut y avoir qu'un seul état d'équilibre.

On pourra peut être éviter cette contradiction en se réprésentant — je parle toujours des petites longueurs d'onde — l'échange d'énergie qui s'opère par l'intermède des résonateurs comme beaucoup plus rapide que celui qui est dû aux électrons libres. Si la différence qui existe entre les deux modes d'action sous le rapport de leurs vitesses est très grande, on peut concevoir que dans nos expériences tout se passe comme si les électrons libres n'existaient pas, et que pourtant, pourvu qu'on leur laisse un temps suffisamment long, ces mêmes électrons finissent par faire sentir leur influence. Alors, en fin de compte, JEANS aurait raison, le système tendant vers l'état final dont nous avons parlé et dans lequel les résonateurs seraient sans influence, parce que leur énergie diminuerait de plus en plus; mais cela n'empêcherait pas qu'au point de vue expérimental on ne dût s'en tenir à la théorie de PLANCK. Malgré la présence des électrons libres qui, à la longue, dérangeraient l'équilibre provisoire qu'on observe, les actions qui amènent cet équilibre peuvent très bien être telles que leurs effets s'accordent avec la seconde loi de la thermodynamique.

Il n'est guère nécessaire d'ajouter qu'on doit s'exprimer avec beaucoup de réserve sur ces questions délicates. Sans doute, la théorie se simplifierait considérablement s'il y avait quelque moyen d'échapper entièrement aux conséquences que M. JEANS a signalées.

H. POINCARÉ

L'AVENIR DES MATHÉMATIQUES

Pour prévoir l'avenir des mathématiques, la vraie méthode est d'étudier leur histoire et leur état présent.

N'est-ce pas là, pour nous autres mathématicien, un procédé en quelque sorte professionnel? Nous sommes accoutumés à *extrapoler*, ce qui est un moyen de déduire l'avenir du passé et du présent, et comme nous savons bien ce qu'il vaut, nous ne risquons pas de nous faire illusion sur la portée des résultats qu'il nous donne.

Il y a eu autrefois des prophètes de malheur. Il répétaient volontiers que tous les problèmes susceptibles d'être résolus l'avaient été déjà, et qu'après eux il n'y aurait plus qu'à glaner. Heureusement l'exemple du passé nous rassure. Bien des fois déjà on a cru avoir résolu tous les problèmes, ou tout au moins avoir fait l'inventaire de ceux qui comportent une solution. Et puis le sens du mot solution s'est élargi, les problèmes insolubles sont devenus les plus intéressants de tous et d'autres problèmes se sont posés auxquels on n'avait pas songé. Pour les Grecs, une bonne solution était celle qui n'emploie que la règle et le compas; après, cela a été celle qu'on obtient par l'extraction de radicaux, puis celle où ne figurent que des fonctions algébriques ou logarithmiques. Les pessimistes se trouvaient ainsi toujours débordés, toujours forcés de reculer, de sorte qu'à présent je crois bien qu'il n'y en a plus.

Mon intention n'est donc pas de les combattre puisqu'ils sont morts; nous savons bien que les mathématiques continueront à se développer, mais il s'agit de savoir dans quel sens. On me répondra « dans tous les sens » et cela est vrai en partie; mais si cela était tout à fait vrai, cela deviendrait un peu effrayant. Nos richesses ne tarderaient pas à devenir encombrantes et leur accumulation produirait un fatras aussi impénétrable que l'était pour l'ignorant la vérité inconnue.

L'historien, le physicien lui même, doivent faire un choix entre les faits; le cerveau du savant, qui n'est qu'un coin de l'univers, ne pourra jamais contenir l'univers tout entier; de sorte que, parmi les faits innombrables que la nature nous offre, il en est qu'on laissera de côté et d'autres qu'on retiendra. Il en est de même, à fortiori, en mathématiques; le mathématicien, lui non plus, ne peut conserver pêle mêle tous les faits qui se présentent à lui; d'autant plus que ces faits c'est lui, j'allais dire c'est son caprice qui les crée. C'est lui qui construit de toutes pièces une combinaison nouvelle en rapprochant les éléments; ce n'est pas en général la nature qui la lui apporte toute faite.

Sans doute il arrive quelquefois que le mathématicien aborde un problème pour satisfaire à un besoin de la physique; que le physicien ou l'ingénieur lui demandent de calculer un nombre en vue d'une application. Dira-t-on que, nous autres géomètres, nous devons nous borner à attendre les commandes, et, au lieu de cultiver notre science pour notre plaisir, n'avoir d'autre souci que de nous accomoder au goût de la clientèle? Si les mathématiques n'ont d'autre objet que de venir en aide à ceux qui étudient la nature, c'est de ces derniers que nous devons attendre le mot d'ordre. Cette façon de voir est-elle légitime? Certainement non; si nous n'avions pas cultivé les sciences exactes pour elles-mêmes, nous n'aurions pas créé l'instrument mathématique, et le jour où serait venu le mot d'ordre du physicien, nous aurions été désarmés.

Les physiciens non plus n'attendent pas, pour étudier un phénomène, que quelque besoin urgent de la vie matérielle leur en ait fait une nécessité, et ils ont bien raison; si les savants du XVIII[e] siècle avaient délaissé l'électricité, parce qu'elle n'aurait été à leurs yeux qu'une curiosité sans intérêt pratique, nous n'aurions au XX[e] siècle ni télégraphie, ni électrochimie, ni électrotechnique. Les physiciens, forcés de choisir, ne sont donc pas guidés dans leur choix uniquement par l'utilité. Comment donc font-il pour choisir entre les faits naturels? Nous pouvons le dire aisément; les faits qui les intéressent ce sont ceux qui peuvent conduire à la découverte d'une loi; ce sont donc ceux qui sont analogues à beaucoup d'autres faits, qui ne nous apparaissent pas comme isolés, mais comme étroitement groupés avec d'autres. Le fait isolé frappe tous les yeux, ceux du vulgaire comme ceux du savant. Mais ce que le vrai physicien seul sait voir, c'est le lien qui unit plusieurs faits dont l'analogie est profonde, mais cachée. L'anecdote de la pomme de Newton n'est probablement pas vraie, mais elle est symbolique; parlons-en donc comme si elle était vraie. Eh bien, nous devons croire qu'avant Newton bien des hommes avaient vu tomber des pommes; aucun n'avait rien su en conclure. Les faits seraient stériles s'il n'y avait des esprits capables de choisir entre eux en discernant ceux derrière lesquels il se cache quelque chose et de reconnaître ce qui se cache derrière, des esprits qui sous le fait brut sentiront l'âme du fait.

En mathématiques nous faisons tout à fait la même chose; des éléments variés dont nous disposons, nous pouvons faire sortir des millions de combinaisons différentes; mais une de ces combinaisons, tant qu'elle est isolée, est absolument dépourvue de valeur; nous nous sommes souvent donné beaucoup de peine pour la construire, mais cela ne sert absolument à rien, si ce n'est peut-être à donner un sujet de devoir pour l'enseignement secondaire. Il en sera tout autrement le jour où cette combinaison prendra place dans une classe de combinaisons analogues et où nous aurons remarqué cette analogie; nous ne serons plus en présence d'un fait, mais d'une loi. Et, ce jour là, le véritable inventeur, ce ne sera pas l'ouvrier qui aura patiemment édifié quelques-unes de ces combinaisons, ce sera celui qui aura mis en évidence leur parenté. Le premier n'aura vu que le fait brut, l'autre seul aura senti l'âme du fait.

Souvent, pour affirmer cette parenté, il lui aura suffi d'inventer un mot nouveau, et ce mot aura été créateur; l'histoire de la science nous fournirait une foule d'exemples qui vous sont familiers.

Le célèbre philosophe viennois MACH a dit que le rôle de la Science est de produire l'économie de pensée, de même que la machine produit l'économie d'effort. Et cela est très juste. Le sauvage calcule avec ses doigts ou en assemblant de petits cailloux. En apprenant aux enfants la table de multiplication, nous leur épargnons pour plus tard d'innombrables manœuvres de cailloux. Quelqu'un autrefois a reconnu, avec des cailloux ou autrement, que 6 fois 7 font 42 et il a eu l'idée de noter le résultat, et c'est pour cela que nous n'avons pas besoin de recommencer. Celui-là n'a pas perdu son temps si même il ne calculait que pour son plaisir; son opération ne lui a pris que deux minutes, elle en aurait exigé en tout deux milliards, si un milliard d'hommes avait dû la recommencer après lui.

L'importance d'un fait se mesure donc à son rendement, c'est-à-dire à la quantité de pensée qu'elle nous permet d'économiser.

En physique, les faits à grand rendement sont ceux qui rentrent dans une loi très générale, parce qu'ils permettent d'en prévoir un très grand nombre d'autres, et il n'en est pas autrement en mathématiques. Je me suis livré à un calcul compliqué et je suis arrivé péniblement à un résultat; je ne serai pas payé de ma peine si je ne suis devenu par là capable de prévoir les résultats d'autres calculs analogues et de les diriger à coup sûr en évitant les tâtonnements auxquels j'ai dû me résigner la première fois. Je n'aurai pas perdu mon temps, au contraire, si ces tâtonnements mêmes ont fini par me révéler l'analogie profonde du problème que je viens de traiter avec une classe beaucoup plus étendue d'autres problèmes; s'ils m'en ont montré à la fois les ressemblances et les différences, si en un mot ils m'ont fait entrevoir la possibilité d'une généralisation. Ce n'est pas alors un résultat nouveau que j'aurai acquis, c'est une force nouvelle.

Une formule algébrique qui nous donne la solution d'un type de problèmes numériques, pourvu que l'on remplace à la fin les lettres par des nombres, est l'exemple simple qui se présente tout d'abord à l'esprit. Grâce à elle un seul calcul algébrique nous épargne la peine de recommencer sans cesse de nouveaux calculs numériques. Mais ce n'est là qu'un exemple grossier; tout le monde sent qu'il y a des analogies qui ne peuvent s'exprimer par une formule et qui sont les plus précieuses.

Si un résultat nouveau a du prix, c'est quand en reliant des éléments connus depuis longtemps, mais jusque-là épars et paraissant étrangers les uns aux autres, il introduit subitement l'ordre là où régnait l'apparence du désordre. Il nous permet alors de voir d'un coup d'œil chacun de ces éléments et la place qu'il occupe dans l'ensemble. Ce fait nouveau non-seulement est précieux par lui-même, mais lui seul donne leur valeur à tous les faits anciens qu'il relie. Notre esprit est infirme comme le sont nos sens; il se perdrait dans la complexité du monde si cette complexité n'était harmonieuse, il n'en verrait que les détails à la façon d'un myope et il serait forcé d'oublier chacun de ces détails avant d'examiner le suivant, parce qu'il serait incapable de tout embrasser. Les seuls faits dignes de notre attention sont ceux qui introduisent de l'ordre dans cette complexité et la rendent ainsi accessible.

Les mathématiciens attachent une grande importance à l'élégance de leurs méthodes et de leurs résultats; ce n'est pas là du pur dilettantisme. Qu'est ce qui nous donne en effet dans une solution, dans une démonstration, le sentiment de l'élégance? C'est l'harmonie des diverses parties, leur symétrie, leur heureux balancement; c'est en un mot tout ce qui y met de l'ordre, tout ce qui leur donne de l'unité, ce qui nous permet par conséquent d'y voir clair et d'en comprendre l'ensemble en même temps que les détails. Mais précisément, c'est là en même temps ce qui lui donne un grand rendement; en effet, plus nous verrons cet ensemble clairement et d'un seul coup d'œil, mieux nous apercevrons ses analogies avec d'autres objets voisins, plus par conséquent nous aurons de chances de deviner les généralisations possibles. L'élégance peut provenir du sentiment de l'imprévu par la rencontre inattendue d'objets qu'on n'est pas accoutumé à rapprocher; là encore elle est féconde, puisqu'elle nous dévoile ainsi des parentés jusque-là méconnues; elle est féconde même quand elle ne résulte que du contraste entre la simplicité des moyens et la complexité du problème posé; elle nous fait alors réfléchir à la raison de ce contraste et le plus souvent elle nous fait voir que cette raison n'est pas le hasard et qu'elle se trouve dans quelque loi insoupçonnée. En un mot le sentiment de l'élégance mathématique n'est autre chose que la satisfaction due à je ne sais quelle adaptation entre la solution que l'on vient de découvrir et les besoins de notre esprit, et c'est à cause de cette adaptation même que cette solution peut être pour nous un instrument. Cette satisfaction esthétique est par suite liée à l'économie de pensée. C'est ainsi que les cariatides de l'Erechthéion, par exemple, nous semblent élégantes parce qu'elles portent un lourd fardeau avec souplesse et pour ainsi dire allégrement et qu'elles nous donnent ainsi le sentiment de l'économie de l'effort.

C'est pour la même raison que, quand un calcul un peu long nous a conduits à quelque résultat simple et frappant, nous ne sommes pas satisfaits tant que nous n'avons pas montré que nous aurions *pu prévoir*, sinon ce résultat tout entier, du moins ses traits les plus caractéristiques. Pourquoi? Qu'est-ce qui nous empêche de nous contenter d'un calcul qui nous a appris, semble-t-il, tout ce que nous désirions savoir? C'est parce que dans des cas analogues, le long calcul ne pourrait pas resservir, et qu'il n'en est pas de même du raisonnement souvent à demi intuitif qui aurait pu nous permettre de prévoir. Ce raisonnement étant court, on en voit d'un seul coup toutes les parties, de sorte qu'on aperçoit immédiatement ce qu'il y faut changer pour l'adapter à tous les problèmes de même nature qui peuvent se présenter. Et puisqu'il nous permet de prévoir si la solution de ces problèmes sera simple, il nous montre tout au moins si le calcul mérite d'être entrepris.

Ce que nous venons de dire suffit pour montrer combien il serait vain de chercher à remplacer par un procédé mécanique quelconque la libre initiative du mathématicien. Pour obtenir un résultat qui ait une valeur réelle, il ne suffit pas de moudre des calculs ou d'avoir une machine à mettre les choses en ordre; ce n'est pas seulement l'ordre, c'est l'ordre inattendu qui vaut quelque chose. La machine peut mordre sur le fait brut, l'âme du fait lui échappera toujours.

Depuis le milieu du siècle dernier, les mathématiciens sont de plus en plus soucieux d'atteindre à l'absolue rigueur; ils ont bien raison et cette tendance s'accentuera de plus en plus. En mathématiques la rigueur n'est pas tout, mais sans elle il n'y a rien; une démonstration qui n'est pas rigoureuse, c'est le néant. Je crois que personne ne contestera cette vérité. Mais si on la prenait trop à la lettre, on serait amené à conclure qu'avant 1820, par exemple, il n'y avait pas de mathématiques; ce serait manifestement excessif; les géomètres de ce temps sous-entendaient volontiers ce que nous expliquons par de prolixes discours; cela ne veut pas dire qu'ils ne le voyaient pas du tout; mais ils passaient là-dessus trop rapidement, et pour le bien voir, il aurait fallu qu'ils prissent la peine de le dire.

Seulement est-il toujours nécessaire de le dire tant de fois; ceux qui les premiers se sont préoccupés avant tout de la rigueur nous ont donné des raisonnements que nous pouvons essayer d'imiter; mais si les démonstrations de l'avenir doivent être bâties sur ce modèle, les traités de mathématiques vont devenir bien longs; et si je crains les longueurs, ce n'est pas seulement parce que je redoute l'encombrement des bibliothèques, mais parce que je crains qu'en s'allongeant, nos démonstrations perdent cette apparence d'harmonie dont j'ai expliqué tout à l'heure le rôle utile.

C'est à l'économie de pensée que l'on doit viser, ce n'est donc pas assez de donner des modèles à imiter. Il faut qu'on puisse après nous se passer de ces modèles et au lieu de répéter un raisonnement déjà fait, le résumer en quelques lignes. Et c'est à quoi l'on a déjà réussi quelquefois; par exemple il y avait tout un type de raisonnements qui se ressemblaient tous et qu'on retrouvait partout; ils étaient parfaitement rigoureux, mais ils étaient longs. Un jour on a imaginé le mot d'uniformité de la convergence et ce mot seul les a rendus inutiles; on n'a plus eu besoin de les répéter puisqu'on pouvait les sous-entendre. Les coupeurs de difficultés en quatre peuvent donc nous rendre un double service; c'est d'abord de nous apprendre à faire comme eux au besoin, mais c'est surtout de nous permettre le plus souvent possible de ne pas faire comme eux, sans pourtant rien sacrifier de la rigueur.

Nous venons de voir par un exemple quelle est l'importance des mots en mathématiques, mais j'en pourrais citer beaucoup d'autres. On ne saurait croire combien un mot bien choisi peut économiser de pensée, comme disait Mach. Je ne sais si je n'ai pas déjà dit quelque part que la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Il faut s'entendre. Il convient que ces choses, différentes par la matière, soient semblables par la forme, qu'elles puissent pour ainsi dire se couler dans le même moule. Quand le langage a été bien choisi, on est tout étonné de voir que toutes les démonstrations, faites pour un objet connu, s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objets nouveaux, on n'a rien à y changer, pas même les mots, puisque les noms sont devenus les mêmes.

Il y a un exemple qui se présente tout d'abord à l'esprit, ce sont les quaternions, sur lesquels je n'ai pas à insister. Un mot bien choisi suffit le plus souvent pour faire disparaître les exceptions que comportaient les règles énoncées dans l'ancien langage; c'est pour cela qu'on a imaginé les quantités négatives, les quantités imaginaires, les points à l'infini, que sais-je encore? Et les exceptions, ne l'oublions pas, sont pernicieuses, parce qu'elles cachent les lois.

Eh bien, c'est l'un des caractères auxquels on reconnaît les faits à grand rendement, ce sont ceux qui permettent ces heureuses innovations de langage. Le fait brut est alors quelquefois sans grand intérêt, on a pu le signaler bien des fois sans avoir rendu grand service à la science; il ne prend de valeur que le jour où un penseur mieux avisé aperçoit le rapprochement qu'il met en évidence et le symbolise par un mot.

Les physiciens d'ailleurs agissent absolument de même; ils ont inventé le mot d'énergie, et ce mot a été prodigieusement fécond, parce que lui aussi créait la loi en éliminant les exceptions, parce qu'il donnait le même nom à des choses différentes par la matière et semblables par la forme.

Parmi les mots qui ont exercé la plus heureuse influence, je signalerai ceux de groupe et d'invariant. Ils nous ont fait apercevoir l'essence de bien des raisonnements mathématiques; ils nous ont montré dans combien de cas les anciens mathématiciens considéraient des groupes sans le savoir, et comment se croyant bien éloignés les uns des autres, ils se trouvaient tout à coup rapprochés sans comprendre pourquoi.

Nous dirions aujourd'hui qu'ils avaient envisagé des groupes isormorphes. Nous savons maintenant que dans un groupe la matière nous intéresse peu, que c'est la forme seule qui importe et que quand on connaît bien un groupe, on connait par cela même tous les groupes isomorphes; et grâce à ces mots de groupes et d'isomorphisme qui résument en quelques syllabes cette règle subtile et la rendent promptement familière à tous les esprits, le passage est immédiat et peut se faire en économisant tout effort de pensée. L'idée de groupe se rattache d'ailleurs à celle de transformation; pourquoi attache-t-on tant de prix à l'invention d'une transformation nouvelle? parce que d'un seul théorème elle nous permet d'en tirer dix ou vingt; elle a la même valeur qu'un zéro ajouté à la droite d'un nombre entier.

Voilà ce qui à déterminé jusqu'ici le sens du mouvement de la science mathématique, et c'est aussi bien certainement ce qui le déterminera dans l'avenir. Mais la nature des problèmes qui se posent y contribue également. Nous ne pouvons oublier quel doit être notre but; selon moi ce but est double; notre science confine à la fois à la philosophie et à la physique, et c'est pour nos deux voisines que nous travaillons; aussi nous avons toujours vu et nous verrons encore les mathématiciens marcher dans deux directions opposées.

D'une part, la science mathématique doit réfléchir sur elle-même et cela est utile, parce que réfléchir sur elle-même, c'est réfléchir sur l'esprit humain qui l'a créée, d'autant plus que c'est celle de ses créations pour laquelle il a fait le moins d'emprunts au dehors. C'est pourquoi certaines spéculations mathématiques sont utiles, comme celles qui visent l'étude des postulats, des géométries inaccoutumées, des fonctions à allures étranges. Plus ces spéculations s'écarteront des conceptions les plus communes, et par conséquent de la nature et des applications, mieux elles nous montreront ce que l'esprit humain peut faire, quand il se soustrait de plus en plus à la tyrannie du monde extérieur, mieux par conséquent elles nous le feront connaître en lui-même.

Mais c'est du côté opposé, du côté de la nature, qu'il faut diriger le gros de notre armée.

Là nous rencontrons le physicien ou l'ingénieur qui nous disent: « Pourriez-vous m'intégrer telle équation différentielle, j'en aurais besoin d'ici huit jours en vue de telle construction qui doit être terminée pour telle date ». « Cette équation, répondons-nous, ne rentre pas dans l'un des types intégrables, vous savez qu'il n'y en a pas beaucoup ». « Oui, je le sais, mais alors à quoi servez-vous? ». Le plus souvent, il suffirait de s'entendre; l'ingénieur, en réalité, n'a pas besoin de l'intégrale en termes finis; il a besoin de connaître l'allure générale de la fonction intégrale, ou simplement il voudrait un certain chiffre qui se déduirait facilement de cette intégrale si on la connaissait. Ordinairement on ne la connaît pas, mais on pourrait calculer ce chiffre sans elle, si on savait au juste de quel chiffre l'ingénieur a besoin et avec quelle approximation.

Autrefois on ne considérait une équation comme résolue que quand on en avait exprimé la solution à l'aide d'un nombre fini de fonctions connues; mais cela n'est possible qu'une fois sur cent à peine. Ce que nous pouvons toujours faire, ou plutôt ce que nous devons toujours chercher à faire, c'est de résoudre le problème *qualitativement* pour ainsi dire, c'est-à-dire de chercher à connaître la forme générale de la courbe qui représente la fonction inconnue.

Il reste ensuite à trouver la solution *quantitative* du problème; mais si l'inconnue ne peut être déterminée par un calcul fini, on peut la représenter toujours par une série infinie convergente qui permet de la calculer. Cela peut-il être regardé comme une vraie solution? On raconte que NEWTON communiqua à LEIBNITZ, un anagramme à peu près comme ceci: *aaaaabbbeeeeii*, etc. LEIBNITZ, naturellement n'y comprit rien du tout; mais nous qui avons la clef, nous savons que cet anagramme veut dire, en le traduisant dans le langage moderne: Je sais intégrer toutes les équations différentielles, et nous sommes amenés à nous dire que NEWTON avait bien de la chance ou qu'il se faisait de singulières illusions. Il voulait dire tout simplement qu'il pouvait former (par la méthode des coefficients indéterminés) une série de puissances satisfaisant formellement à l'équation proposée.

Une semblable solution aujourd'hui ne nous satisferait plus, et cela pour deux raisons; parce que la convergence est trop lente, et parce que les termes se succèdent sans obéir à aucune loi. Au contraire, la série Θ nous paraît ne rien laisser à désirer, d'abord parce qu'elle converge très vite (cela, c'est pour le praticien qui désire avoir son nombre le plus promptement possible) et ensuite parce que nous apercevons d'un coup d'œil la loi des termes (cela, c'est pour satisfaire les besoins esthétiques du théoricien).

Mais alors il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas; il y a seulement des problèmes *plus ou moins* résolus, selon qu'il le sont par une série de convergence plus ou moins rapide, ou régie par une loi plus ou moins harmonieuse. Il arrive toutefois qu'une solution imparfaite nous achemine vers une solution meilleure. Quelquefois la série est de convergence si lente que le calcul est impraticable et qu'on n'a réussi qu'à démontrer la possibilité du problème.

Et alors l'ingénieur trouve cela dérisoire, et il a raison, puisque cela ne l'aidera pas à terminer sa construction pour la date fixée. Il se préoccupe peu de savoir si cela sera utile aux ingénieurs du XXII^e^ siècle; nous, nous pensons autrement et nous sommes quelquefois plus heureux d'avoir économisé un jour de travail à nos petits fils qu'une heure à nos contemporains.

Quelquefois en tâtonnant, empiriquement pour ainsi dire, nous arrivons à une formule suffisamment convergente. Que voulez-vous de plus, nous dit l'ingénieur; et nous, malgré tout, nous ne sommes pas satisfaits; nous aurions voulu *prévoir* cette convergence. Pourquoi? parce que si nous avions su la prévoir une fois, nous saurions la prévoir une autre fois. Nous avons réussi, c'est peu de chose à nos yeux si nous n'avons sérieusement l'espoir de recommencer.

A mesure que la science se développe, il devient plus difficile de l'embrasser tout entière; alors on cherche à la couper en morceaux, à se contenter de l'un de ces morceaux: en un mot, à se spécialiser. Si l'on continuait dans ce sens, ce serait un obstacle fâcheux aux progrès de la Science. Nous l'avons dit, c'est par des rapprochements inattendus entre ses diverses parties que ses progrès peuvent se faire. Trop se spécialiser, ce serait s'interdire ces rapprochements. Espérons que des Congrès comme celui-ci, en nous mettant en rapports les uns avec les autres, nous ouvriront des vues sur le champ du voisin, nous obligeront à le comparer au nôtre, à sortir un peu de notre petit village, et seront ainsi le meilleur remède au danger que je viens de signaler.

Mais je me suis trop attardé à des généralités, il est temps d'entrer dans le détail.

Passons en revue les diverses sciences particulières dont l'ensemble forme les mathématiques; voyons ce que chacune d'elles a fait, où elle tend et ce qu'on peut en espérer. Si les vues qui précèdent sont justes, nous devons voir que les grands progrès du passé se sont produits lorsque deux de ces sciences se sont rapprochées, lorsqu'on a pris conscience de la similitude de leur forme, malgré la dissemblance de leur matière, lorsqu'elles se sont modelées l'une sur l'autre, de telle façon que chacune d'elles puisse profiter des conquêtes de l'autre. Nous devons en même temps entrevoir, dans des rapprochements du même genre, les progrès de l'avenir.

L'arithmétique.

Les progrès de l'arithmétique ont été plus lents que ceux de l'algèbre et de l'analyse, et il est aisé de comprendre pourquoi. Le sentiment de la continuité est un guide précieux qui fait défaut à l'arithméticien; chaque nombre entier est séparé des autres, il a pour ainsi dire son individualité propre; chacun d'eux est une sorte d'exception et c'est pourquoi les théorèmes généraux seront plus rares dans la théorie des nombres, c'est pourquoi aussi ceux qui existent seront plus cachés et échapperont plus longtemps aux chercheurs.

Si l'arithmétique est en retard sur l'algèbre et sur l'analyse, ce qu'elle a de mieux à faire c'est de chercher à se modeler sur ces sciences afin de profiter de leur avance. L'arithméticien doit donc prendre pour guide les analogies avec l'algèbre. Ces analogies sont nombreuses et si, dans bien de cas, elles n'ont pas encore été étudiées d'assez près pour devenir utilisables, elles sont au moins pressenties depuis longtemps et le langage même des deux sciences montre qu'on les a aperçues. C'est ainsi qu'on parle de nombres transcendants, et qu'on se rend compte ainsi que la classification future de ces nombres a déjà pour image la classification des fonctions transcendantes, et cependant on ne voit pas encore très bien comment on pourra passer d'une classification à l'autre; mais si on l'avait vu, cela serait déjà fait, et ce ne serait plus l'œuvre de l'avenir.

Le premier exemple qui me vient à l'esprit est la théorie des congruences, où l'on trouve un parallélisme parfait avec celle des équations algébriques. Certainement on arrivera à compléter ce parallélisme, qui doit subsister par exemple entre la théorie des courbes algébriques et celle des congruences à deux variables. Et quand les problèmes relatifs aux congruences à plusieurs variables seront résolus, ce sera un premier pas vers la solution de beaucoup de questions d'analyse indéterminée.

Un autre exemple, où l'analogie toutefois n'a été aperçue qu'après coup, nous est fourni par la théorie des corps et des idéaux. Pour en avoir la contre partie, considérons les courbes tracées sur une surface; aux nombres existants correspondront les intersections complètes, aux idéaux les intersections incomplètes, aux idéaux premiers les courbes indécomposables; les diverses classes d'idéaux ont aussi leurs analogues.

Nul doute que cette analogie ne puisse éclairer la théorie des idéaux, ou celle des surfaces, ou peut-être toutes deux à la fois.

La théorie des formes, et en particulier celle des formes quadratiques, est intimement liée à celle des idéaux. Si parmi les théories arithmétiques elle a été l'une des premières à prendre figure, c'est quand on est parvenu à y introduire l'unité par la considération des groupes de transformations linéaires.

Ces transformations ont permis la classification et par conséquent l'introduction de l'ordre. Peut être en a-t-on tiré tout le fruit qu'on en pouvait espérer; mais si ces transformations linéaires sont les parentes des perspectives en géométrie, la géométrie analytique nous fournit bien d'autres transformations (comme par exemple les transformations birationnelles d'une courbe algébrique) dont on aura avantage à chercher les analogues arithmétiques. Celles-ci formeront sans aucun doute des groupes discontinus dont on devra d'abord étudier le domaine fondamental qui sera la clef de tout. Dans cette étude, je ne doute pas que l'on n'ait à se servir de la *Geometrie der Zahlen* de Minkowski.

Une idée dont on n'a pas encore tiré tout ce qu'elle contient, c'est l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres par Hermite. On sait maintenant ce qu'elle signifie. Prenons pour point de départ deux formes F et F', la seconde quadratique définie, et appliquons-leur une même transformation; si la forme F' transformée est réduite, on dira que la transformation est réduite, et aussi que la forme F transformée est réduite. Il en résulte que si la forme F peut se transformer en elle-même, elle pourra avoir plusieurs réduites; mais cet inconvénient est essentiel et ne peut être évité par aucun détour; il n'empêche pas d'ailleurs que ces réduites ne permettent la classification des formes. Il est clair que cette idée, qui n'a été jusqu'ici appliquée qu'à des formes et à des transformations très particulières, peut être étendue à des groupes de transformations non linéaires, elle a une portée beaucoup plus grande et n'a pas été épuisée.

Un domaine arithmétique où l'unité semble faire absolument défaut, c'est la théorie des nombres premiers; on n'a trouvé que des lois asymptotiques et on n'en doit pas espérer d'autres; mais ces lois sont isolées et on n'y peut parvenir que par des chemins différents qui ne semblent pas pouvoir communiquer entre eux. Je crois entrevoir d'où sortira l'unité souhaitée, mais je ne l'entrevois que bien vaguement; tout se ramènera sans doute à l'étude d'une famille de fonctions transcendantes qui permettront, par l'étude de leurs points singuliers et l'application de la méthode de M. Darboux, de calculer asymptotiquement certaines fonctions de très grands nombres.

L'algèbre.

La théorie des équations algébriques retiendra encore longtemps l'attention des géomètres; les côtés par où on peut l'aborder sont nombreux et divers; le plus important est certainement la théorie des groupes sur laquelle nous reviendrons. Mais il y a aussi la question du calcul numérique des racines et celle de la discussion du nombre des racines réelles. Laguerre a montré que tout n'était pas dit sur ce point avec Sturm. Il y a lieu d'étudier un système d'invariants ne changeant pas de signe quand le nombre des racines réelles reste le même. On peut aussi former des séries de puissances représentant des fonctions qui admettront pour points singuliers les diverses racines d'une équation algébrique (par exemple des fonctions rationnelles dont le dénominateur est le premier membre de cette équation); les coefficients des termes d'ordre élevé nous fourniront l'une des racines avec une approximation plus ou moins grande; il y là le germe d'un procédé de calcul numérique dont on pourra faire une étude systématique.

Il y a une quarantaine d'années, c'était l'étude des invariants des formes algébriques qui semblait absorber l'algèbre entière; elle est aujourd'hui délaissée; la matière cependant n'est pas épuisée; seulement il faut l'étendre, en ne se bornant plus par exemple aux invariants relatifs aux transformations linéaires, mais en abordant ceux qui se rapportent à un groupe quelconque. Les théorèmes anciennement acquis nous en suggéreront ainsi d'autres plus généraux qui viendront se grouper autour d'eux, de même qu'un cristal se nourrit dans une solution. Et quant à ce théorème de Gordan que le nombre des invariants distincts est limité, et dont Hilbert a si heureusement simplifié la démonstration, il me semble qu'il nous conduit à nous poser une question beaucoup plus générale: si on a une infinité de polynômes entiers, dépendant algébriquement d'un nombre fini d'entre eux, peut-on toujours les déduire par addition et multiplication d'un nombre fini d'entre eux?

Il ne faut pas croire que l'algèbre soit terminée parce qu'elle nous fournit des règles pour former toutes les combinaisons possibles; il reste à chercher les combinaisons intéressantes, celles qui satisfont à telle ou telle condition. Ainsi se constituera une sorte d'analyse indéterminée où les inconnues ne seront plus des nombres entiers, mais des polynômes. C'est alors cette fois l'algèbre qui prendra modèle sur l'arithmétique, en se guidant sur l'analogie du nombre entier, soit avec le polynôme entier à coefficients quelconques, soit avec le polynôme entier à coefficients entiers.

Les équations différentielles.

On a déjà beaucoup fait pour les équations différentielles linéaires et il ne reste qu'à parfaire ce qui est commencé. Mais en ce qui concerne les équations différentielles non linéaires, on est beaucoup moins avancé. L'espoir d'une intégration à l'aide des fonctions connues est perdu depuis longtemps; il faut donc étudier pour elles-mêmes les fonctions définies par ces équations différentielles et d'abord tenter une classification systématique de ces fonctions; l'étude du mode de croissance dans le voisinage des points singuliers fournira sans doute les premiers éléments de cette classification, mais nous ne serons satisfaits que quand on aura trouvé un certain groupe de transformations (par exemple de transformations de CREMONA) qui jouera par rapport aux équations différentielles le même rôle que le groupe des transformations birationnelles pour les courbes algébriques. Nous pourrons alors ranger dans une même classe toutes les transformées d'une même équation. Nous aurons encore pour guide l'analogie avec une théorie déjà faite, celle des transformations birationnelles et du genre d'une courbe algébrique.

On peut se proposer de ramener l'étude de ces fonctions à celle des fonctions uniformes, et cela de deux manières; on sait que si $y = f(x)$, on peut, quelle que soit la fonction $f(x)$, exprimer y et x par les fonctions uniformes d'une variable auxiliaire t; mais si $f(x)$ est la solution d'une équation différentielle, dans quel cas les fonctions uniformes auxiliaires satisferont-elles elles-mêmes à des équations différentielles? Nous ne le savons pas; nous ne savons pas non plus dans quels cas l'intégrale générale peut se mettre sous la forme $F(x, y) =$ constante arbitraire, $F(x,y)$ étant uniforme.

J'insisterai sur la discussion qualitative des courbes définies par une équation différentielle. Dans le cas le plus simple, celui où l'équation est du 1er ordre et du 1er degré, cette discussion se ramène à la détermination du nombre des cycles limites. Elle est très délicate et ce qui peut nous la faciliter, c'est l'analogie avec la recherche du nombre des racines réelles d'une équation algébrique; quand un fait quelconque pourra mettre en évidence la nature de cette analogie, nous serons certains d'avance qu'il sera fécond.

Les équations aux dérivées partielles.

Notre connaissance des équations aux dérivées partielles a fait récemment un progrès considérable par suite des découvertes de M. FREDHOLM. Or si l'on examine de près l'essence de ces découvertes, on voit qu'elles ont consisté à modeler cette théorie difficile sur une autre beaucoup plus simple, celle des déterminants et des systèmes d'équations du 1er degré. Dans la plupart des problèmes de physique mathématique, les équations à intégrer sont linéaires; elles servent à déterminer des fonctions inconnues de plusieurs variables et ces fonctions sont continues. Pourquoi?

parce que nous avons écrit les équations en regardant la matière comme continue. Mais la matière n'est pas continue, elle est formée d'atomes, et si nous avions voulu écrire les équations comme l'aurait fait un observateur de vue assez perçante pour voir les atomes, nous n'aurions pas eu un petit nombre d'équations *différentielles* servant à déterminer certaines *fonctions* inconnues, nous aurions eu un grand nombre d'équations *algébriques* servant à déterminer un grand nombre de *constantes* inconnues. Et ces équations algébriques auraient été linéaires, de sorte qu'on aurait pu, avec une patience infinie, leur appliquer directement la méthode des déterminants.

Mais comme la brièveté de notre vie ne nous permet pas le luxe d'une patience infinie, il faut procéder autrement, il faut passer à la limite en supposant la matière continue. Il y a deux manières de généraliser la théorie des équations du 1^er^ degré, en passant à la limite. On peut considérer une infinité d'équations discrètes, avec une infinité, également discrète, d'inconnues. C'est par exemple ce qu'a fait Hill dans sa théorie de la Lune. On a alors des déterminants infinis qui sont aux déterminants ordinaires ce que les séries sont aux sommes finies.

On peut prendre une équation aux dérivées partielles, représentant pour ainsi dire une infinité continue d'équations, et s'en servir pour déterminer une fonction inconnue, représentant une infinité continue d'inconnues. On a alors d'autres déterminants infinis, qui sont aux déterminants ordinaires ce que les intégrales sont aux sommes finies. C'est là ce qu'a fait Fredholm; son succès provient d'ailleurs du fait suivant: si dans un déterminant les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, et que les autres éléments soient considérés comme homogènes de 1^er^ ordre, on peut ordonner le développement du déterminant en réunissant en un seul groupe l'ensemble des termes homogènes de même degré. Le déterminant infini de Fredholm se prêtait à cette façon d'ordonner et il est arrivé que l'on obtenait ainsi une série convergente.

Cette analogie, qui a certainement guidé Fredholm, a-t-elle ainsi donné tout ce qu'elle doit donner? Certainement non; si le succès vient de la forme linéaire des équations, on doit pouvoir appliquer des idées du même genre à tous les problèmes relatifs à des équations de forme linéaire, et même aux équations différentielles ordinaires, puisque leur intégration peut toujours se ramener à celle d'une équation *linéaire* aux dérivées partielles du 1^er^ ordre.

On a abordé il y a quelque temps le problème de Dirichlet et les autres problèmes connexes par un autre moyen, en revenant à l'idée primitive de Dirichlet et en cherchant le minimum d'une intégrale définie, mais cette fois par des procédés rigoureux. Je ne doute pas qu'on n'arrive sans grande difficulté à rapprocher les deux méthodes l'une de l'autre, à se rendre compte de leurs rapports mutuels, et je ne doute pas non plus que l'une et l'autre n'ait beaucoup à y gagner. Grâce à M. Hilbert qui a été doublement initiateur, on marche dans cette voie.

Les fonction abéliennes.

On sait quelle est la principale question qu'il nous reste à resoudre en ce qui concerne les fonctions abéliennes. Les fonctions abéliennes engendrées par les intégrales relatives à une courbe algébrique ne sont pas les plus générales; elles ne sont qu'un cas particulier, et c'est ce qu'on peut appeler les fonctions abéliennes spéciales. Quels sont leurs rapports avec les fonctions générales et comment peut-on classer ces dernières? Il y a peu de temps encore la solution semblait bien lointaine. Je considère aujourd'hui le problème comme virtuellement résolu, depuis que MM. Castelnuovo et Enriques ont publié leur récent Mémoire sur les intégrales de différentielles totales des variétés à plus de deux dimensions. Nous savons maintenant qu'il y a des fonctions abéliennes attachées à une courbe et d'autres à une surface, et qu'il ne sera jamais nécessaire de s'élever jusqu'aux variétés de plus de deux dimensions. En combinant cette donnée avec celles qui résultent des travaux de M. Wirtinger, on viendra sans doute à bout de toutes les difficultés.

Théorie des fonctions.

C'est surtout des fonctions de deux et de plusieurs variables que je voudrais parler. L'analogie avec les fonctions d'une seule variable est un guide précieux, mais insuffisant; il y a entre le deux sortes de fonctions une différence essentielle, et toutes les fois qu'on tente une généralisation en passant des unes aux autres, on rencontre un obstacle inattendu dont on a parfois triomphé par des artifices spéciaux, mais qui souvent aussi est demeuré jusqu'ici infranchissable. Nous devons donc rechercher les faits qui sont de nature à nous éclairer sur l'essence de cette différence entre les fonctions d'une variable et celles qui en contiennent plusieurs. Il faudra d'abord regarder de près les artifices qui ont réussi dans certains cas particuliers, afin de voir ce qu'ils peuvent avoir de commun. Pourquoi la représentation conforme est-elle le plus souvent impossible dans un domaine à quatre dimensions et que faut-il mettre à la place? La véritable généralisation des fonctions à une variable, n'est elle pas dans les fonctions harmoniques à quatre variables dont les parties réelles des fonctions de deux variables ne sont que des cas particuliers? Pourra-t-on tirer parti pour l'étude des fonctions transcendantes à plusieurs variables de ce qu'on sait des fonctions algébriques ou rationnelles, ou, en d'autres termes, dans quel sens peut-on dire que les fonctions transcendantes à deux variables sont aux fonctions transcendantes à une variable ce que les fonctions rationnelles à deux variables sont aux fonctions rationnelles à une variable?

Est-il vrai que si $z = f(x, y)$, on peut, quelle que soit la fonction f, exprimer à la fois x, y, z en fonctions uniformes de deux variables auxiliaires, ou, pour employer une expression qui commence à être consacrée par l'usage, peut-on *uniformiser* les fonctions de deux variables, comme on uniformise les fonctions d'une variable? Je me borne à poser la question, dont un avenir prochain nous donnera peut-être la solution.

Théorie des groupes.

La théorie des groupes est un sujet étendu sur lequel il y aurait beaucoup à dire.

Il y a bien des sortes de groupes, et quelle que soit la classification adoptée, on en trouve toujours de nouveaux qui n'y rentrent pas. Je veux me borner et je ne parlerai ici que des groupes continus de Lie et des groupes discontinus de Galois, que l'on a coutume de qualifier, les uns et les autres, de groupes d'ordre fini, quoique le mot n'ait pas tout à fait le même sens pour les uns et pour les autres.

Dans la théorie des groupes de Lie, on est guidé par une analogie spéciale; une transformation finie est le résultat de la combinaison d'une infinité de transformations infinitésimales. Le cas le plus simple est celui où ces transformations infinitésimales se réduisent à une multiplication par $1 + \varepsilon$, ε étant très petit. La répétion de ces transformations engendre alors la fonction exponentielle; c'est comme cela que Neper y est arrivé. Nous savons que la fonction exponentielle peut être représentée par une série très simple et très convergente, et l'analogie peut alors nous montrer la voie à suivre. Cette analogie peut d'ailleurs être exprimée par un symbolisme spécial, sur lequel vous m'excuserez de ne pas insister ici. On est déjà très avancé grâce à Lie, Killing et Cartan; il ne reste plus qu'à simplifier les démonstrations, coordonner et classifier les résultats.

L'étude des groupes de Galois est beaucoup moins avancée; et cela s'explique; c'est pour la même raison que l'arithmétique est moins avancée que l'analyse, car la continuité a donné de grandes facilités dont on a su profiter. Mais heureusement il y a entre le deux théories un parallélisme manifeste et on devra s'efforcer de le mettre de mieux en mieux en évidence. L'analogie est tout à fait pareille à celle que nous avons signalée entre l'arithmétique et l'algèbre et on en pourra tirer le même parti.

La géométrie.

Il semble que la géométrie ne puisse rien contenir qui ne soit déjà dans l'algèbre ou dans l'analyse; que les faits géométriques ne soient autre chose que les faits algébriques ou analytiques exprimés dans un autre langage. On pourrait donc croire qu'après la revue que nous venons de passer, il ne nous restera plus rien à dire qui se rapporte spécialement à la géométrie. Ce serait méconnaître l'importance même d'un langage bien fait, ne pas comprendre ce qu'ajoute aux choses elles-mêmes la façon d'exprimer ces choses et par conséquent de les grouper.

D'abord les considérations géométriques nous amènent à nous poser de nouveaux problèmes; ce sont bien, si l'on veut, des problèmes analytiques, mais que nous ne nous serions jamais posés à propos d'analyse. L'analyse en profite cependant comme elle profite de ceux qu'elle est obligée de résoudre pour satisfaire aux besoins de la Physique.

Un grande avantage de la géométrie, c'est précisément que les sens y peuvent venir au secours de l'intelligence, et aident à deviner la route à suivre, et bien des esprits préfèrent ramener les problèmes d'analyse à la forme géométrique. Malheureusement nos sens ne peuvent nous mener bien loin, et ils nous faussent compagnie dès que nous voulons nous envoler en dehors des trois dimensions classiques. Est-ce à dire que, sortis de ce domaine restreint où il semblent vouloir nous enfermer, nous ne devons plus compter que sur l'analyse pure et que toute géométrie à plus de trois dimensions est vaine et sans objet? Dans la génération qui nous a précédés, les plus grands maîtres auraient répondu « oui »; nous sommes aujourd'hui tellement familiarisés avec cette notion que nous pouvons en parler, même dans un cours d'université, sans provoquer trop d'étonnement.

Mais à quoi peut-elle servir? Il est aisé de le voir: elle nous donne d'abord un langage très commode, qui exprime en termes très concis ce que le langage analytique ordinaire dirait en phrases prolixes. De plus, ce langage nous fait nommer du même nom ce qui se ressemble et affirme des analogies qu'il ne nous permet plus d'oublier. Il nous permet donc encore de nous diriger dans cet espace qui est trop grand pour nous et que nous ne pouvons voir, en nous rappelant sans cesse l'espace visible qui n'en est qu'une image imparfaite sans doute, mais qui en est encore une image. Ici encore, comme dans tous les exemples précédents, c'est l'analogie avec ce qui est simple qui nous permet de comprendre ce qui est complexe.

Cette géométrie à plus de trois dimensions n'est pas une simple géométrie analytique, elle n'est pas purement quantitative, elle est aussi qualitative et c'est par là surtout qu'elle devient intéressante. L'importance de l'*Analysis Situs* est énorme et je ne saurais trop y insister; le parti qu'en a tiré RIEMANN, l'un de ses principaux créateurs, suffirait à le démontrer. Il faut qu'on arrive à la construire complètement dans les espaces supérieurs; on aura alors un instrument qui permettra réellement de voir dans l'hyperespace et de suppléer à nos sens.

Les problèmes de l'*Analysis Situs* ne se seraient peut être pas posés si on n'avait parlé que le langage analytique; ou plutôt, je me trompe, ils se seraient posés certainement, puisque leur solution est nécessaire à une foule de questions d'analyse; mais ils se seraient posés isolément, les uns après les autres, et sans qu'on puisse apercevoir leur lien commun.

Ce qui a surtout contribué aux récents progrès de la géométrie, c'est l'introduction de la notion de transformations et de groupes. C'est grâce à elle que la géométrie n'est plus un assemblage de théorèmes plus ou moins curieux qui se succèdent et ne se ressemblent pas, mais qu'elle a conquis une unité. Et d'un autre côté, l'histoire des sciences ne doit pas oublier que c'est à propos de géométrie que l'on a commencé à étudier systématiquement les transformations continues, de sorte que les géomètres pures ont contribué pour leur part au développement de l'idée de groupe, si utile aux autres branches des mathématiques.

L'étude des groupes de points sur une courbe algébrique, à la façon de BRILL et NOETHER, nous donnera encore des résultats utiles, soit directement, soit en servant de modèle à d'autres théories analogues. C'est ainsi que nous voyons se développer tout un chapitre de la géométrie, où les courbes tracées sur une surface jouent un rôle semblable à celui des groupes de points sur une courbe. Par là, on peut dès aujourd'hui espérer que vont s'éclaircir les derniers mystères qui se rapportent à l'étude des surfaces et qui paraissaient si tenaces.

Les géomètres ont donc un vaste champ à moissonner, et je n'ai garde d'oublier la géométrie énumérative et surtout la géométrie infinitésimale, cultivée avec tant d'éclat par M. DARBOUX, et à laquelle M. BIANCHI a apporté tant de contributions utiles.

Le cantorisme.

J'ai parlé plus haut du besoin que nous avons de remonter sans cesse aux premiers principes de notre science et du profit qu'en peut tirer l'étude de l'esprit humain. C'est ce besoin qui a inspiré deux tentatives qui ont tenu une très grande place dans l'histoire la plus récente des mathématiques. La première est le cantorisme, qui a rendu à la science les services que l'on sait. Un des traits caractéristiques du cantorisme, c'est qu'au lieu de s'élever au général en bâtissant des constructions de plus en plus compliquées et de définir par construction, il part du *genus supremum* et ne définit, comme auraient dit les scholastiques, que *per genus proximum et differentiam specificam*. De là l'horreur qu'il a quelque temps inspirée à certains esprits, à HERMITE par exemple, dont l'idée favorite était de comparer les sciences mathématiques aux sciences naturelles. Chez la plupart d'entre nous ces préventions s'étaient dissipées, mais il est arrivé qu'on s'est heurté à certains paradoxes, à certaines contradictions apparentes, qui auraient comblé de joie ZÉNON d'Elée et l'école de Mégare. Et alors chacun de chercher le remède. Je pense pour mon compte, et je ne suis pas seul, que l'important c'est de ne jamais introduire que des êtres que l'on puisse définir complètement en un nombre fini de mots. Quel que soit le remède adopté, nous pouvons nous promettre la joie du médecin appelé à suivre un beau cas pathologique.

La recherche des postulats.

On s'est efforcé d'autre part d'énumérer les axiomes et les postulats plus ou moins dissimulés, qui servent de fondement aux diverses théories mathématiques. M. HILBERT a obtenu les résultats les plus brillants. Il semble d'abord que ce domaine soit bien limité et qu'il n'y ait plus rien à y faire quand l'inventaire sera terminé, ce qui ne saurait tarder. Mais quand on aura tout énuméré, il y aura bien des manières de tout classer; un bon bibliothécaire trouve toujours à s'occuper, et chaque classification nouvelle sera instructive pour le philosophe.

J'arrête cette revue, que je ne saurais songer à rendre complète pour une foule de raisons, et d'abord parce que j'ai déjà trop abusé de votre attention. Je pense que ces exemples auront suffit pour vous montrer par quel mécanisme les sciences mathématiques ont progressé dans le passé, et dans quel sens elles doivent marcher dans l'avenir.

EMILE PICARD

LA MATHÉMATIQUE
DANS SES RAPPORTS AVEC LA PHYSIQUE

J'entendais un jour soutenir à un éminent mécanicien que les mathématiciens ne sont pas à leur place dans les sections scientifiques des sociétés savantes. Il estimait qu'ils devaient trouver asile dans quelque section de Philosophie ou de Logique d'une Académie des Sciences morales et politiques. Mon savant ami, en émettant cette boutade, ne pensait évidemment qu'à certains travaux de philosophie mathématique, assez en honneur aujourd'hui, qu'il jugeait sans bienveillance et regardait comme des débauches de logique des mathématiciens. La réponse était facile, et les raisons sont évidentes, pour lesquelles, dans les Universités et les Académies, les mathématiciens font partie des mêmes groupements que les savants adonnés à l'étude de la nature: le contact a en effet toujours été intime entre la Mathématique et la Physique. Ce sujet a été bien des fois traité. Il n'est peut-être pas sans intérêt de le reprendre, en jetant un coup d'œil sur le passé et cherchant à en tirer quelque enseignement pour l'avenir; c'est ce que je me propose de faire dans ce discours.

I.

Il n'est pas douteux que les Mathématiques eurent primitivement un caractère expérimental. La Géométrie fut d'abord une branche de la Physique, et des propositions assez cachées, comme la propriété de l'hypoténuse d'un triangle rectangle furent découvertes par l'expérience. Aux époques reculées de l'Egypte et de la Chaldée, la Science apparaît avec un caractère surtout utilitaire. On fait généralement honneur aux Grecs d'avoir créé la Science rationnelle et désintéressée; mais, au moins chez les premiers penseurs de la Grèce, la Mathématique reste intimement mêlée aux doctrines philosophiques et aux rêveries cosmogoniques. La devise des Pythagoriciens était que « les choses sont nombres », et les propriétés des nombres se trouvaient à la base de leurs explications sur l'Univers; leur Géométrie avait parfois un caractère mystique et magique, comme en témoigne par exemple le fameux pentagone étoilé, qui servait de signe de reconnaissance aux adeptes de l'École et était considéré comme un symbole de la santé. Si nous arrivons maintenant à la Géométrie classique, représentée par le livres d'EUCLIDE et de ses successeurs, nous entrons dans le domaine de la pure logique, où la déduction travaille sur les concepts lentement élaborés dans les âges antérieurs. Il faut cependant compléter cette vue. La Géométrie fut quelque chose de plus pour les Grecs: ils y voyaient le type idéal de la Science, où tout est d'une intelligibilité parfaite. On a noté d'ailleurs que cette Science idéale de la Géométrie grecque, étudiant des objets rationnellement construits, ne perd pas contact avec l'intuition spatiale d'où elle tire toutes ses conceptions, et c'est là un point capital. L'instrument mathématique pourra alors être utilisé pour une connaissance de l'Univers, le réel étant en quelque sorte le monde sensible vu à travers les concepts de l'Arithmétique et de la Géométrie, et, quoique dans un domaine encore très restreint, nous comprenons pourquoi les sciences de la nature prennent de bonne heure une forme mathématique. Les travaux géométriques et mécaniques d'ARCHIMÈDE en donnent un admirable exemple, et la recherche qu'il fit de l'aire d'un segment de parabole en s'appuyant sur le théorème des moments, symbolise bien la connexion étroite entre ce que nous appellerions aujourd'hui les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. Dans les derniers siècles de l'Hellénisme, alors que languissent les spéculations géométriques de l'époque antérieure, la Trigonométrie et la Géométrie sphérique se développent, sous l'influence des besoins de l'Astronomie, entre les mains d'HIPPARQUE et plus tard de PTOLÉMÉE. Ainsi, à son déclin, la Science grecque nous offre un exemple, qui s'est présenté dans d'autres temps, de recherches mathématiques paraissant épuisées et se renouvelant sous l'influence de problèmes fournis par l'observation des phénomènes physiques.

Il n'est pas dans mon sujet de suivre à travers le moyen âge et la Renaissance les transformations de l'algèbre géométrique des anciens, qui se sépare peu à peu de la Géométrie. L'Algèbre, proprement dite, arrive ainsi à l'autonomie, avec son symbolisme et ses notations de plus en plus perfectionnées, constituant une langue d'une admirable clarté qui, suivant le mot de FOURIER, n'a pas de signe pour exprimer les notions confuses, et procure à la pensée une véritable économie. Les bonnes notations, tout le monde en convient, sont souvent indispensables pour arriver à la solution des problèmes posés. On peut aller plus loin, et dire qu'elles conduisent parfois à poser de nouveaux problèmes, l'esprit étant soutenu et porté en avant par les symboles qu'il a créés; la théorie des équations algébriques en offrirait plus d'un exemple. Il y a même un danger dans cette facilité de créations symboliques: c'est au temps qu'il appartient d'en montrer l'utilité et la fécondité. A cet égard, notre langue algébrique usuelle a fait ses preuves, en rendant possibles les progrès ultérieurs des Sciences mathématiques, et dans certaines parties de la Physique mathématique, des symbolismes plus récents rendent d'incontestables services.

Au XVII^{e} siècle, le développement de la Cinématique et de la Dynamique naissante fut la cause des plus grands progrès de l'Analyse. C'est de là que date l'Analyse moderne; elle est vraiment sortie de la Mécanique. L'origine de la notion de dérivée est dans le sentiment confus que nous avons de la mobilité des choses et de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle s'accomplissent les phénomènes; les mots de *fluentes* et de *fluxions* marquent bien cette origine. Peu d'intégrations eurent plus de conséquences que celle de GALILÉE remontant de la loi des vitesses à celle des espaces dans le problème de la chute des corps, et il est impossible de séparer dans HUYGENS et NEWTON le mécanicien et le physicien du mathématicien; tels les grands artistes de la Renaissance, que nous trouvons à la fois peintres, architectes et sculpteurs.

Ce fut une époque décisive dans l'histoire de la Science mathématique que le moment où, allant bien au delà de ce qu'avaient rêvé les Pythagoriciens, on se rendit compte avec précision que l'étude des phénomènes naturels était susceptible de prendre une forme mathématique, et cela surtout quand le développement de la Mécanique conduisit à postuler que les changements infiniment petits, de quelque nature qu'ils soient, survenant dans un système, dépendent uniquement de l'état actuel de celui-ci. On fut ainsi amené à penser que la forme, à laquelle on se trouverait ramené, serait donnée par des équations différentielles, et nous vivons encore aujourd'hui sur ce principe qui, depuis le commencement du XVIII[e] siècle, a orienté le développement de l'Analyse. Il serait injuste d'oublier que les problèmes posés par la Géométrie ont eu quelque part aussi dans cette orientation, mais, pour garder un point de vue plus uniforme, et si je ne craignais d'être accusé de paradoxe, je pourrais alléguer, comme je le disais plus haut, que la Géométrie fait partie de la Physique.

II.

L'histoire des Mathématiques, en ses points les plus essentiels, se confond au XVIII[e] siècle avec celle de la Mécanique et de savantes recherches sur la théorie des fonctions ont montré récemment que des problèmes fondamentaux dans cette théorie se sont présentés de bonne heure. Ainsi CLAIRAUT, dans sa théorie de la figure de la Terre, considère pour la première fois des intégrales curvilignes et donne la condition pour qu'elles ne dépendent pas du chemin suivi entre deux limites déterminées. Pareillement, les deux équations fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable complexe apparaissent tout d'abord dans un Mémoire sur la résistance des fluides sous la plume de d'ALEMBERT, qui voit le rôle joué dans leur étude par le symbole $\sqrt{-1}$, déjà introduit par LEIBNIZ et JEAN BERNOULLI; un peu plus tard, d'ALEMBERT écrivait pour la première fois l'équation $\Delta\varphi = 0$. On sait qu'une analyse, présentant avec les recherches précédentes une grande analogie, lui donnait aussi l'intégration de l'équation des cordes vibrantes. On retrouve encore les fonctions d'une variable complexe dans un Mémoire plus récent d'EULER sur le mouvement des fluides et dans les travaux de LAGRANGE sur les cartes géographiques. Ainsi une des théories de l'Analyse moderne, qui a eu le plus d'éclat au XIX[e] siècle, a trouvé son origine dans des problèmes de Mécanique et de Physique.

L'étude de l'attraction n'a pas eu moins d'importance pour le développement de l'Analyse. On aurait pu souhaiter pour la simplicité des calculs laborieux de la Mécanique céleste une autre loi que celle du carré de la distance, mais, si la nature nous devait une compensation, il faut avouer qu'elle nous l'a largement donnée, en permettant de créer la théorie du potentiel newtonien, aucune autre loi d'attraction n'étant susceptible de poser à ce point de vue tant de problèmes féconds et d'un intérêt général. Dans cet ordre d'idées, l'équation dite de LAPLACE, à laquelle satisfait le potentiel en dehors des masses attirantes, est à signaler tout particulièrement; se rencontrant aussi en Hydrodynamique et dans la théorie de la chaleur, elle a conduit à différents types de problèmes aux limites qui, étendus à des équations plus générales, sont encore aujourd'hui l'objet des préoccupations des analystes.

LAGRANGE déplorait qu'il n'y eut qu'un système du monde à découvrir. Nous serions presque tentés de croire à notre tour qu'on ne retrouvera plus une mine aussi féconde que cet ensemble de théories physiques liées à la considération du potentiel newtonien, si nous ne savions que, dans les sciences de la nature, nos représentations et nos concepts évoluent avec les progrès de l'observation et de l'expérience, ce qui fait que des regrets, comme celui de LAGRANGE, ne sont pas justifiés. Il y aura toujours quelque coin du système du monde à explorer, et sans doute, nous l'espérons du moins en tant que mathématiciens, quelques problèmes d'Analyse à nous poser à leur sujet.

La théorie analytique de la chaleur dans l'immortel Ouvrage de FOURIER a ouvert aussi la voie à bien des problèmes, et nous y trouvons des méthodes d'intégration au moyen de solutions simples, inspirées par les questions physiques elles-mêmes. Quelquefois, en effet, celles-ci ne donnent pas seulement le matériel analytique, sur lequel travaillera le mathématicien, mais elles lui fournissent des indications sur la marche à suivre dans la solution. Ainsi, dans les théories moléculaires, les équations aux dérivées partielles se présentent comme des transformées limites, mais plus maniables, d'équations aux différences finies ou d'équations différentielles ordinaires; or, il peut arriver précisément que, pour deviner la forme des solutions, il soit utile de revenir à ces dernières équations. C'est ce qui arrive à FOURIER, quand il étudie la communication de la chaleur entre des masses disjointes et en fait l'application au cas où le nombre des masses est infini. On a eu recours souvent à des considérations de ce genre pour établir des théorèmes d'existence, en passant ensuite à la limite, et l'on pourrait indiquer des travaux tout récents sur les équations fonctionnelles, qui utilisent au fond la même idée, dont la mise en œuvre peut présenter d'ailleurs de grandes difficultés. Ce sont là des cas où la Physique rend à l'Analyse un double service, lui proposant des problèmes et lui suggérant des vues pour leurs solutions.

On a souvent cité la belle page du discours préliminaire de FOURIER, où il développe cette pensée que l'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques, mais il faut reconnaître qu'il y parle plus en physicien qu'en géomètre, quand il insiste sur la nécessité d'aller jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire, dit-il, de toute recherche, et sans laquelle on n'arrive qu'à des transformations inutiles. FOURIER réduit trop ici le rôle de l'Analyse mathématique, et, si la Physique a été l'origine première de grandes théories analytiques, le mathématicien rend au physicien d'autres services que de lui donner des possibilités de prévisions numériques. Nous avons tous rencontré des savants adonnés aux sciences expérimentales, pour qui c'est là la seule utilité des Mathématiques. C'est méconnaître l'admirable puissance de transformation du raisonnement et du calcul mathémathiques. Peut-on, par exemple, ne pas être saisi d'admiration quand on lit le célèbre Mémoire de GREEN, resté longtemps inaperçu, sur l'application de l'Analyse aux théories de l'Électricité et du Magnétisme, et dont GAUSS, CHASLES et THOMSON devaient dix ans plus tard retrouver les résultats. Le calcul devançait ici l'expérimentation, en découvrant des théorèmes fondamentaux sur l'induction électrostatique auxquels des expériences mémorables devaient ultérieurement conduire FARADAY.

En entrant un peu plus dans le détail de la théorie des équations aux dérivées partielles, nous trouvons d'autres exemples, qui caractérisent bien les services que les Mathématiques peuvent rendre à la Physique. Ainsi une vue très nette des différentes espèces d'ondes, au point de vue de la propagation, est résultée de la considération de différentes types d'équations. Dans les équations du type de la théorie de la chaleur, l'étude des intégrales montre que toute variation se fait sentir instantanément à toute distance, mais très peu à très grande distance, et l'on ne peut parler alors de vitesse de propagation; en un point, la température passe par un maximum pour décroître ensuite, et le temps au bout duquel ce maximum est atteint est proportionnel au carré de la distance. On sait que Lord KELVIN a appliqué l'équation de FOURIER à la propagation des courants électriques dans les câbles, en négligeant l'effet de la self-induction; il a ainsi montré que les signaux atteindraient pour chaque perturbation leurs maxima dans un temps proportionnel au carré de la distance, et ce résultat de la théorie a joué un rôle essentiel dans l'établissement de la télégraphie transatlantique.

Les choses se passent autrement dans le cas des équations du type de la propagation du son, qui est aussi celui de la propagation de la lumière et des ondes électriques. L'effet ici n'est pas immédiatement senti, il dure pendant un certain temps et disparaît ensuite, tout au moins dans les milieux à une et trois dimensions. Les deux types précédents se trouvent en quelque sorte condensés dans l'équation relative à la propagation du son dans un liquide visqueux, des ondes électriques dans un diélectrique légèrement conducteur ou dans une ligne télégraphique pour laquelle la self-induction n'est pas négligeable. Il y a, dans ce cas, encore propagation par ondes avec une vitesse déterminée, mais cette onde s'étale en arrière et laisse une trace qui demeure indéfiniment; elle peut, dans les communications télégraphiques, être une source de confusion dans les signaux, et l'on s'est ainsi rendu compte des résultats contradictoires obtenus autrefois dans la recherche de la vitesse de l'électricité.

Ces questions de propagation d'ondes, si intéressantes pour la Physique, n'ont peut-être pas un moindre intérêt psychologique. C'est grâce à l'absence des résistances passives que peut en général se conserver au loin, pour la vue et pour l'ouïe, la netteté des sensations; ce qui fait, comme on l'a dit, de ces deux sens les sens intellectuels par excellence. A cet égard, le sens de la vue est inférieur à celui de l'ouïe, en raison de la dispersion de la lumière, dispersion que ne présentent pas les sons modérés. Il faut d'ailleurs y ajouter le rôle considérable joué en Acoustique par les harmoniques, rôle bien moindre en Optique où l'œil ne perçoit pas une octave; et ceci ne nous éloigne pas des Mathématiques, s'il est vrai, comme le prétendent quelques physiologistes, que l'organe de CORTI dans le labyrinthe de l'oreille doive être regardé comme l'organe du sens arithmétique et nous fournisse notre concept du nombre.

Il faut avouer cependant que les Mathématiques ont leurs ennemis, et les services considérables rendus par l'Analyse à la Physique sont quelquefois niés. On objecte que beaucoup de résultats analytiques ne font que traduire de simples intuitions, et peuvent s'exprimer sous forme d'analogies physiques, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux symboles mathématiques et aux équations différentielles; on cite, entre autres, l'exemple de l'illustre FARADAY. On peut répondre d'abord que l'on fait du calcul intégral de bien des manières, et l'on en fait en comptant des lignes de forces. Il n'est toutefois pas possible d'aller bien loin dans cette voie sans le secours de la langue analytique apportant sa précision à des notions menaçant de rester vagues et peu aptes à fournir des résultats quantitatifs. FARADAY, s'il eût été géomètre, eût pu devancer MAXWELL dans la recherche des lois de la propagation des ondes électriques. L'exemple antérieur de FRESNEL est du même ordre; il eut l'intuition géniale des vibrations transversales de l'éther, mais pouvait-on se faire une idée vraiment précise de la distinction générale entre les vibrations transversales et les vibrations longitudinales, avant d'avoir écrit les équations aux dérivées partielles du mouvement d'un milieu élastique; j'en doute pour ma part. Je ne veux pas dire qu'on ne puisse adresser certaines critiques à notre vision mathématique de la nature, mais elles sont d'un autre ordre; j'aurai l'occasion d'en dire un mot tout à l'heure.

III.

Nous venons de montrer par des exemples particuliers les relations réciproques de la Mathématique et de la Physique. D'une manière générale, dans le développement des diverses parties de la Mécanique et de la Physique, nous voyons à une période d'induction succéder une période déductive, où l'on s'efforce de donner aux principes une forme définitive. Le développement mathématique et formel joue alors un rôle tres important, et le langage analytique est indispensable à la plus grande extension des principes. Le symbolisme soutient et porte l'esprit en avant, et les généralisations se font avec le moindre effort. Par le simple jeu de ses symboles, l'Analyse peut suggérer des généralisations dépassant de beaucoup le cadre primitif, ne fût-ce quelquefois que par des raisons de symétrie. N'en a-t-il pas été ainsi avec le principe des déplacements virtuels, dont l'idée première vint des mécanismes les plus simples; la forme analytique qui le traduisait et où apparaissaient des sommes de produits de deux facteurs, suggéra des extensions qui conduisirent de la Mécanique rationnelle à la Mécanique chimique à travers la Physique tout entière. Un autre exemple est encore fourni par les équations de LAGRANGE; ici des transformations de calcul ont donné le type des équations différentielles auxquelles on a proposé de ramener la notion d'explication mécanique. L'art du mathématicien a créé un moule témoignant de l'importance de la forme d'une relation analytique; il va de soi qu'il appartient à l'expérience de vérifier ensuite si l'instrument forgé est assez souple pour se prêter à des concordances expérimentales.

De tels exemples montrent assez ce que signifie une phrase, qu'on entend quelquefois répéter, à savoir qu'il n'y a dans une formule que ce qu'on y a mis; elle est vide de sens ou n'est qu'un pur truisme. Des notions, identiques au fond, peuvent avoir des formes très différentes, et il arrive que la forme soit essentielle; telle aussi l'énergie peut être constante en quantité, mais variable en qualité. Aux cas cités plus haut, on pourrait ajouter la Mécanique céleste, où il n'y a rien de plus que la formule de la gravitation universelle et quelques constantes fournies par l'observation, mais où d'innombrables transformations de calcul nous font passer de ce point de départ à l'explication de presque toutes les particularités des mouvements des astres.

Nous citerons encore un cas de la puissance suggestive des transformations analytiques en rappelant l'ordre d'idées se rattachant au principe de la moindre action. De très bonne heure on eut l'intuition vague d'une certaine économie dans les phénomènes naturels; un des premiers exemples en fut fourni par le principe de FERMAT, relatif à l'économie du temps dans la transmission de la lumière, et l'on arriva à reconnaître que les équations de la Mécanique classique correspondent à un problème de minimum. Les extensions se présentèrent alors d'elles-mêmes, conséquences nécessaires des transformations analytiques de la méthode des variations, qui donnent même d'utiles indications sur les conditions aux limites. Nous retrouvons toujours le même mécanisme: au sentiment vague le symbolisme mathématique donne une forme précise qui suggère des généralisations.

On sait l'importance qu'a aujourd'hui dans l'évolution de la Mécanique le principe de la moindre action. Ce vieux principe, d'allure théologique, semble être notre dernier retranchement dans la crise, exagérée peut-être, que traverse actuellement la Mécanique, et dans cet ordre de questions on a repris récemment, en leur donnant une grande extension, une idée émise jadis par LAPLACE d'une Mécanique du point rapportée à une action fonction quelconque de la vitesse, ce qui conduit à une masse variable avec cette dernière.

IV.

Mais revenons maintenant un peu en arrière. Le XVII^e et le XVIII^e siècle virent presque toujours les Mathématiques et leurs applications à la Physique cultivées par les mêmes savants. Il devait arriver un moment où des spécialisations s'établiraient; c'est une loi générale, qui régit malheureusement tous les ordres de recherches, et à laquelle échappent seuls quelques rares esprits assez puissants pour ne pas avoir à sacrifier l'étendue à la profondeur. On avait pu espérer un moment, après les merveilleux triomphes du Calcul infinitésimal, que les géomètres possédant un outil assez puissant pourraient, comme on l'a dit, tourner exclusivement leurs méditations vers l'étude des lois naturelles. Cet espoir devait être vite déçu; les problèmes posés exigeaient de nouveaux perfectionnements en même temps qu'une étude critique des principes admis qui condusaient parfois à d'inquiétants paradoxes. Une ère nouvelle commençait pour la Mathématique, rappelant, toutes proportions gardées, les temps où la Géométrie grecque, devenue autonome, s'était séparée des spéculations cosmogoniques et philosophiques auxquelles elle avait été liée à une époque antérieure. Parmi les premiers ouvriers de cette transformation, GAUSS et CAUCHY ont été en même temps de grands théoriciens de la Phisique, mais ABEL est un pur géomètre. Le XIX[e] siècle eut d'illustres mathématiciens dont l'œuvre n'a aucun point de contact avec la Philosophie naturelle. Tels sont des travaux sur l'Algèbre pure et l'Arithmétique supérieure; telles aussi les spéculations sur les principes des Mathématiques.

Il faut toutefois apporter quelque prudence dans de telles affirmations. Des rapports cachés peuvent apparaître tardivement; notre logique édifie des théories sur des concepts qui sont en somme le résultat d'un travail effectué sur nos sensations, et il est impossible de prononcer *a priori* que telle théorie ne pourra pas être un jour utilisée dans l'étude des sciences de la nature. Quoi qu'il en soit de certaines questions actuelles qui apparaissent à quelques-uns comme de purs exercices de logique, tout le monde reconnaît que les progrès de la théorie générale des fonctions ont été des plus importants pour la Physique mathématique. Que de paradoxes apparents se sont évanouis quand on a approfondi le degré de généralité des intégrales des équations aux dérivées partielles. Il arrive fréquemment en Mathématiques que l'examen de cas trop particuliers empêche d'apercevoir les vraies raisons des choses, et, à cet égard, la grande extension donnée de notre temps à l'idée de fonction aura été féconde, même dans des applications où elle paraît au premier abord inutile.

Les fonctions analytiques, qui forment la matière d'un des plus beaux chapitres de l'Analyse moderne, semblent tout d'abord présenter peu d'intérêt au point de vue où nous sommes ici placés; elles correspondent à un mode très particulier d'approximations, et d'autres développements, comme les séries trigonométriques, se sont trouvés mieux adaptés aux questions de Physique et de Mécanique, qui leur ont d'ailleurs donné naissance. Des études plus approfondies ont montré cependant que l'importance des fonctions analytiques est très grande en Physique mathématique. Il a été établi, pour un grand nombre d'équations aux dérivées partielles, que toutes leurs intégrales sont analytiques dans certaines régions de l'espace. Il semble que, avec de telles équations, les phénomènes correspondants soient soumis à un moindre degré d'arbitraire, idée nécessairement vague, mais qui se traduit par le fait précis que les conditions aux limites à imposer à une solution sont autres que pour une équation n'ayant pas toutes ses intégrales analytiques. Il suffit de comparer l'équation des cordes vibrantes et l'équation si voisine de l'équilibre calorifique d'une plaque.

Dans le même ordre d'idées, les difficultés dans la démonstration de l'unité d'une solution peuvent être différentes, suivant qu'il s'agit d'équations dont toutes les intégrales sont ou non analytiques. Même en se bornant au cas général, où les données du problème ne correspondent pas à des caractéristiques, il peut y avoir des contacts d'ordre infini entre des intégrales non analytiques, circonstance qui ne se rencontre pas avec des solutions analytiques; un exemple intéressant en est fourni par le célèbre théorème de LAGRANGE sur les potentiels de vitesse en Hydrodynamique, qui ne subsiste pas pour les fluides visqueux, quoique à un moment donné les rotations et leurs dérivées de tout ordre par rapport au temps puissent être nulles. Il y a là un ordre de questions qui ne sont résolues que dans des cas particuliers, surtout quand il s'agit d'équations non linéaires.

La question du domaine d'existence et du prolongement des intégrales a pour la Physique mathématique non moins d'intérêt que pour l'Analyse. Aucun problème nouveau ne se pose si toutes les intégrales sont analytiques; il en est tout autrement dans le cas contraire. Le prolongement réside alors dans le fait qu'il y a des contacts jusqu'a un certain ordre; ces notions ont donné les résultats les plus importants dans la mécanique des fluides.

Des points de vue nouveaux sont venus resserrer encore les liens entre la théorie des fonctions de variables complexes et des questions de Physique mathématique. Dans plusieurs de celles-ci s'introduit un paramètre, et il a été très utile de regarder la solution, répondant à certaines conditions, comme fonction de ce paramètre. Or, dans de nombreux cas, la solution ainsi envisagée est une fonction analytique uniforme de ce paramètre. Ainsi, pour la vibration des membranes, les harmoniques successifs correspondent aux pôles d'une fonctions méromorphe dans tout le plan. On a montré aussi que, dans la théorie de l'élasticité, les déplacements ou les efforts à la surface étant donnés, les solutions se présentent sous la forme de fonctions uniformes du paramètre d'élasticité, fonctions ayant, outre des pôles, un point singulier essentiel à distance finie. Ces résultats, qui sont d'hier, ont montré la véritable origine des difficultés qui avaient longtemps arrêté les efforts des analystes.

Il arrive aussi que la solution dépende d'un ou plusieurs paramètres géométriques entrant dans la définition de la frontière; certaines valeurs particulières de ces paramètres correspondent à des cas spécialement intéressants, comme cela a lieu pour les corps ayant une dimension évanouissante. Ailleurs encore les singularités seront partout denses sur une ligne, et les dénominations mêmes de la Physique s'introduisent dans des mémoires d'Analyse, où l'on peut lire que les singularités forment un spectre continu. Quand on entend parler aujourd'hui de spectres de lignes et de spectres de bandes, il ne faut pas croire qu'il s'agisse nécessairement de Physique. Il peut aussi bien être question d'Analyse pure, à moins qu'il ne s'agisse à la fois de l'une et de l'autre, comme il arrive dans les efforts tentés pour expliquer la condensation des raies des spectres par les propriétés de certaines équations fonctionnelles.

Dans tous les exemples auxquels je viens de faire allusion, les équations différentielles ou les équations fonctionnelles étaient linéaires; dans quelques cas intéressants se sont rencontrées des équations non linéaires, mais il est alors bien difficile de chercher à caractériser les solutions comme fonctions d'un paramètre figurant dans l'équation, ces fonctions pouvant être multiformes et leurs singularités dépendant des conditions initiales. Il y a là un important et difficile sujet de recherches.

Les questions de connexion jouent un rôle important dans l'Analyse moderne. Sans remonter jusqu'à Alexandre le Grand qui usa d'un moyen un peu brutal pour tracer des coupures, elle se sont présentées d'abord à propos de l'étude géométrique des nœuds et de l'action des courants sur les courants ou les pôles magnétiques;

c'est là aussi qu'apparaissait pour la première fois la notion de périodicité des intégrales. En même temps, la théorie de l'Électricité et du Magnétisme introduisait les potentiels non uniformes; peu après l'étude des fonctions algébriques et des surfaces de RIEMANN prenait son brillant essor, les deux domaines ayant entre eux les liens les plus étroits au point que de nombreuses questions relatives aux intégrales abéliennes peuvent être transposées dans le langage de l'Électricité.

L'équation de LAPLACE n'est pas la seule équation différentielle dont les solutions ont été étudiées sur une surface de RIEMANN ou dans des espaces multiplement connexes. Une étude analogue peut être faite pour l'équation de l'équilibre calorifique avec rayonnement, et les solutions non uniformes de l'équation des membranes se sont présentées à propos des perturbations produites par un écran sur les ondes optiques ou électro-magnétiques, c'est-à-dire dans les phénomènes de diffraction. J'ai plaisir à rappeler ici que l'étude des équations de l'élasticité a été renouvelée dans ces derniers temps par la considération de l'équilibre des corps multiplement connexes, les déplacements étant alors des fonctions non uniformes, tandis que les éléments caractéristiques de la déformation restent uniformes. On peut dire que les solutions polydromes des équations de la Physique mathématique nous réservent encore bien des surprises et seront une mine féconde de découvertes.

Il est encore une catégorie de problèmes d'Analyse peu étudiés jusqu'ici, mais auxquels doivent conduire plusieurs questions de Physique mathématique, je veux parler de la recherche de fonctions satisfaisant dans deux régions de l'espace à deux équations de types différents, et devant se raccorder ainsi que certaines de leurs dérivées le long de la surface séparant ces régions; c'est ce qui arrive, par exemple, dans l'étude des courants de convection calorifique se produisant entre deux murs.

Il serait fastidieux de prolonger cette énumération, où nous voyons la Physique poser à l'Analyse de nouveaux problèmes. Comment cependant ne pas rappeler que c'est à la théorie de l'Électricité que nous devons la considération des fonctions de lignes, qui ont donné naissance à de brillants développements analytiques, et étendent largement la notion même de fonction.

V.

Nous venons de voir, en parcourant l'histoire des rapports entre la Physique et la Mathématique, les services que l'une et l'autre se sont rendus. C'est sous l'influence de l'étude des phénomènes physiques que se sont organisées les principales disciplines des sciences mathématiques; bien souvent cette étude a, indirectement au moins, posé les problèmes et même donné des indications pour leurs solutions. En retour, sans parler des faits nouveaux que la puissance de tranformation de l'Analyse a su mettre en évidence avant l'expérience, et sans insister sur les prévisions numériques auxquelles elle est apte, rappelons seulement que la netteté de son langage a donné une forme précise et maniable à des notions condamnées autrement à rester vagues, et aussi quelle force de généralisation possèdent ses symboles. Quoique nous n'ayons plus la foi ardente de FOURIER et de l'admirable école des physiciens géomètres de la première moitié du siècle dernier, l'Analyse mathématique reste toujours un instrument indispensable à la Physique et quelquefois un guide précieux.

En parlant de la connexion entre la Mathématique et la Physique, nous n'avons fait que constater un fait résultant du développement même de la Science. Si maintenant nous voulons voir les choses de plus haut, il faut nous demander à quoi tient cette alliance qui nous paraît nécessaire; nous devons chercher aussi si elle n'a pas des points faibles et si elle n'est pas susceptible de prendre d'autres formes.

La science physique se présente à nous comme une vue du monde extérieur à travers des concepts tirés par abstraction de l'expérience. Un système de concepts, associé à des faits particuliers et à certaines hypothèses, est susceptible d'être tranformé par des déductions convenables. Si ces concepts sont d'ordre mathématique, nous avons une vision mathématique du monde extérieur, sur laquelle peut opérer notre logique. Comme l'a dit HELMHOLTZ, nous exerçons, par la forme logique de la loi, notre domination spirituelle sur la nature qui nous était d'abord étrangère. Mais tout cela ne va pas sans sacrifices et sans dangers. Le réel, qu'envisage le physicien mathématicien, est bien pâle à côté de celui que saisit l'intuition vulgaire. Pour pouvoir faire œuvre scientifique avec cette réalité confuse, on a dû la simplifier, et il a fallu enfermer dans des cadres plus rigides les contours flottants des choses. C'est seulement alors que nous pouvons raisonner sur cette nature réduite. S'il y a là une force, il y a aussi une cause de dangers. Ceux-ci sont toutefois atténués par l'arbitraire que présentent dans une certaine mesure la formation des concepts et le choix des hypothèses intervenant dans les théories. Nous touchons ici à un point qui intéresse extrêmement les mathématiciens, car il s'agit du matériel même sur lequel nous avons à travailler.

En adoptant, avec la notion du point matériel, les idées qui sont à la base de la Mécanique classique, nous serions conduits tout d'abord à regarder un phénomène comme correspondant à un nombre immense d'équations différentielles, où les accélérations de tous le points sont des fonctions de l'ensemble de leurs coordonnées. Mais une telle représentation n'est féconde que dans des cas très particuliers. On est obligé, dans chaque ordre de questions, de mettre en évidence certaines propriétés moyennes d'un groupe de points, température, pression, etc., qu'on regarde comme fonctions des coordonnées d'un point général et du temps. Admettant que chaque point est surtout influencé par les points voisins, on forme alors des équations aux dérivées partielles, où, conformément à l'hypothèse fondamentale de la Mécanique classique, certaines dérivées partielles par rapport au temps s'expriment à l'aide de ces fonctions et de leurs dérivées par rapport aux coordonnées.

C'est là le moule ordinaire des équations de la Physique mathématique, élargi parfois par l'introduction de termes de même nature relatifs aux résistances passives. Il représente la forme analytique sous laquelle se condense notre vision mathématique des choses. Ces représentations se sont montrées extrêmement fécondes, et de nombreux exemples en ont été rappelés tout le long de cette conférence. Mais bien des hypothèses simplificatrices ont été faites, et il est permis de prévoir que l'on ne pourra pas toujours s'y tenir. Les conséquences en seront très importantes pour nous, et de nouveaux sujets d'étude en résulteront sans doute pour l'analyste.

Il arrivera peut-être un jour où, si j'ose le dire, la dilution de la matière nécessaire à son traitement mathématique, au lieu de se faire dans un ensemble continu, se fera dans quelque autre ensemble partout dense, mais cette perspective est sans doute assez lointaine, et ne satisferait probablement guère le savant mécanicien dont je parlais en commençant. D'autres possibilités sont plus prochaines. Parfois, dans certaines questions, l'influence sur une partie du système des parties éloignées de ce système ne peut être negligée, et le problème pris dans sa généralité ne se présente plus sous forme d'équations différentielles, mais sous forme d'équations fonctionnelles où entrent d'ailleurs des dérivées des fonctions inconnues, les intégrales qui figurent dans ces équations étant étendues au volume occupé par le système considéré. On sait avec quel succès un type particulier d'équations fonctionnelles a été étudié dans ces derniers temps, et comment un ensemble de questions, qui avaient fait l'objet des recherches les plus délicates, s'est trouvé ramené à des principes extrêmement simples; mémorable exemple, après tant d'autres, de la facilité que peut apporter à la solution d'un problème particulier un point de vue plus général. Pour certaines conditions aux limites, il y a même grand intérêt à substituer des équations fonctionnelles à des équations différentielles, et l'on remplirait des volumes avec les travaux publiés dans cet ordre d'idées depuis sept ou huit ans.

Une étude systématique d'équations fonctionnelles de plus en plus compliquées devra donc dans un prochain avenir solliciter l'effort des chercheurs. Un domaine plus vaste que celui des équations différentielles, et les comprenant comme cas particuliers, s'ouvre devant nous. Nous n'y marcherons pas au hasard, guidés dans le choix des formes à traiter par la Mécanique ou la Physique.

Pour un avenir plus lointain, on peut prévoir des problèmes plus complexes encore. La Mécanique, nous l'avons rappelé, a longtemps postulé plus ou moins explicitement un principe de non-hérédité. Nous nous accommodons encore de ce principe, au moins en première approximation, dans les sciences de la nature inanimée, quoique de nombreux phénomènes indiquent que l'état actuel garde la trace des états passés; tels ces corps, comme le soufre, qui ont une vitesse de transformation d'une forme en une autre, différente suivant leur histoire antérieure. Mais l'hérédité joue surtout un rôle capital dans les sciences de la vie, et nous ne savons pas si nous pourrons utiliser jamais l'instrument mathématique pour l'étude du mécanisme intime des phénomènes biologiques, et si nous ne devrons pas toujours nous contenter de moyennes grossières et de courbes de fréquences. Il ne faut pas cependant réduire à l'avance notre conception mathématique du monde, et nous pouvons rêver d'équations fonctionnelles plus compliquées que les précédentes parce qu'elles renfermeront en outre des intégrales prises entre un temps passé très éloigné et le temps actuel, intégrales qui apporteront la part de l'hérédité. Ces équations fonctionnelles réuniront, dans des conditions infinement complexes, les caractères des deux types simples étudiés avec tant de succès dans ces dernières années, pour lesquels les limites des intégrales sont constantes pour l'un et variables pour l'autre.

Ces espérances sont peut-être chimériques. Sur le terrain mouvant de la vie où figurent un nombre énorme de variables, il se peut qu'il soit impossible de former des équations fonctionnelles, relatives à certains états moyens, devant jouer le même rôle que les équations différentielles de la Physique mathématique actuelle. Mais, si le philosophe peut faire des réserves, il n'y a pour le mathématicien aucun danger à s'abandonner à ces vues audacieuses, qui le poussent à travailler dans une direction certainement féconde.

Et, encore une fois, le monde extérieur nous aura guidés dans nos recherches analytiques, nous orientant vers les voies utiles à parcourir. Nous avons vu qu'il en a toujours été ainsi, et nous ne craignons pas d'affirmer qu'il en sera de même dans l'avenir. Pour en revenir au commencement de ce discours, notre vraie place est à côté de ceux qui s'occupent des sciences de la nature. Qu'elle soit justifiée ou non, nous avons la prétention de leur offrir des moules simples sous lesquels ils puissent contempler logiquement le monde extérieur. En échange, il nous rendent un service d'un haut prix, en nous guidant dans l'infinie variété des formes que conçoit notre esprit. Sous ce point de vue, la Mathématique n'est pas la science étrange et mystérieuse que se représentent tant de gens; elle est une pièce essentielle dans l'édification de la Philosophie naturelle.

G. VERONESE

LA GEOMETRIA NON-ARCHIMEDEA

L'argomento da me scelto è quello stesso che ero stato invitato a trattare nel Congresso di Heidelberg, parendomi che anche oggi possa interessarVi, specialmente dopo che matematici, come il POINCARÉ, ne riconobbero l'importanza. La critica ne ha già riconosciuta la validità logica, onde piuttosto che un'esposizione sistematica, come avrei fatto ad Heidelberg, credo utile di mettere ora in rilievo alcune questioni di contenuto e di metodo, che si riattaccano coll'essenza dei principî della matematica pura e della geometria, e sulle quali non parmi siano ancora concordi i geometri, pur trattandosi di argomenti geometrici (1).

Che cosa è la Geometria non-Archimedea? È essa valida quale sistema di verità astratta? E soddisfa essa pure alle condizioni quali deve essere assoggettata ogni sistema geometrico?

Sarebbe inutile ricordare qui le discussioni secolari intorno all'infinito e all'infinitesimo attuale; nella storia troviamo matematici favorevoli e contrari, da un lato ad es. G. BERNOULLI, dall'altro GAUSS, indeciso tra l'uno e l'altro LEIBNITZ, altri invece, come G. CANTOR favorevoli all'infinito attuale e contrari all'infinitesimo attuale, considerato quale segmento rettilineo continuo.

Queste discussioni si erano, si può dire, assopite, quando l'analisi, mercè il concetto di limite, si adagiò su basi sicure nel campo della grandezza finita ed era prevalsa la tendenza contraria all'infinito ed infinitesimo attuale, provocata anche dal tentativo fallito di una geometria dell'infinito di FONTENELLE (2).

Ma nonostante che GAUSS protestasse contro l'uso nella matematica della grandezza infinita determinata, qua e là risorgevano le antiche dispute.

(1) Non essendo stata tenuta la conferenza al Congresso, perchè l'A. si è ammalato appena giunto a Roma, è mancato uno dei suoi scopi, quello cioè di promuovere una discussione in seno al Congresso medesimo intorno a questi argomenti.

(2) *Él. de Géom. de l'infini* (Paris, 1727). Vedi A., *Fondamenti di Geom.*, 1891, pag. 620, trad. tedesca di A. SCHEPP, 1894, pag. 697. Nulla hanno a che fare colla geometria non archimedea gli infiniti del FONTENELLE, contrariamente a quanto affermò il sig. CANTOR (Math. Ann., 46).

Il fatto è però che nessuno aveva definito bene che cosa intendeva per infinito e infinitesimo attuale, che possono avere, come si vide poi, forme diverse; non lo definì il BERNOULLI, nè più recentemente l'idealista del DU BOIS REYMOND. Ne è una definizione accettabile dell'infinitesimo attuale quella del POISSON. Ma d'un tratto la luce cominciava a diffondersi con l'introduzione legittima di grandezze infinite e infinitesime attuali, cioè coi numeri transfiniti di G. CANTOR, coi momenti dello STOLZ e cogli ordini di infinito delle funzioni del DU BOIS REYMOND. Ma non si trattava di infiniti e infinitesimi geometrici. Il CANTOR facendo uso dei suoi numeri transfiniti affermava di aver dimostrata la impossibilità dell'infinitesimo attuale quale segmento rettilineo continuo. O. STOLZ aveva già fatto rilevare che la questione dell'esistenza dell'infinito e dell'infinitesimo attuale dipende da un assioma secondo il quale dati due segmenti rettilinei, l'uno minore dell'altro, vi è sempre un multiplo del minore, secondo un numero intero finito, che supera il segmento maggiore. Questo assioma fu chiamato da STOLZ col nome di ARCHIMEDE, perchè è il V assioma dell'opera *De Sphoera et cylindro* del grande siracusano, ma che era stato usato anche da altri (1).

Lo STOLZ faceva rilevare che la dimostrazione del CANTOR non poteva toccare nè i suoi momenti nè gli ordini di infinito del DU BOIS REYMOND, i quali pur non soddisfacendo all'assioma d'ARCHIMEDE, non sono grandezze lineari, mentre lo STOLZ affermava pure l'impossibilità del segmento rettilineo infinitesimo attuale dando una dimostrazione dell'assioma stesso partendo dal postulato del continuo nella forma data da DEDEKIND. Anche dai postulati del continuo dati da WEIERSTRASS e CANTOR, sotto forme più proprie al calcolo, si deduce, come da quello di DEDEKIND, l'assioma di ARCHIMEDE (2).

Non si trattava adunque di vedere se esistevano grandezze infinite ed infinitesime, bensì se esistevano segmenti rettilinei infiniti e infinitesimi attuali, tali da soddisfare le proprietà fondamentali della retta, eccetto l'assioma d'ARCHIMEDE.

E le vie ordinarie sembravano chiuse dopo le dimostrazioni di CANTOR e di STOLZ. Non era dunque per via analitica che potevano presentarsi spontaneamente questi segmenti, poichè i detti autori partivano dalla corrispondenza biunivoca del continuo intuitivo con quello numerico, o dai numeri transfiniti di CANTOR, che sembravano essere i soli numeri transfiniti, allo stesso modo che non si poteva presentare spontaneamente coll'analisi lo spazio generale a *infinite* dimensioni, quando si potevano considerare soltanto delle varietà a un numero finito di variabili.

(1) Vedi A., *Fondamenti di Geometria*, Appendice. A proposito delle recenti discussioni sui numeri transfiniti di CANTOR, veggasi SCHOENFLIES, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, 1908. Per gli infiniti del DU BOIS REYMOND veggansi anche i recenti lavori di BOREL e E. BORTOLOTTI.

(2) Il prof. ENRIQUES, che nel suo scritto sui principî della geometria (Encik. der math. Wissensch.. III, 1, 1907) riferisce esattamente sulla geometria non archimedea, incorre però in un equivoco quando egli dà al postulato del continuo di CANTOR (Math. Ann., vol. V) una forma equivalente a quella da me data, concludendo che dal postulato del CANTOR non si deduce l'assioma d'ARCHIMEDE.

La risposta doveva darla il continuo rettilineo stesso, intuitivamente considerato, e diviso nei suoi possibili elementi. E allora ci siamo accorti che i postulati sunnominati del continuo contengono qualche cosa che non è suggerita necessariamente dallo stesso continuo. Questo continuo infatti ci è fornito dall'esperienza; il segnarvi dei punti per la sua determinazione o per le operazioni pratiche che dobbiamo fare con esso è un'operazione arbitraria nostra. Empiricamente lo vediamo composto di punti materiali, gli uni accanto agli altri, oppure di trattini praticamente indivisibili. Se idealizziamo il punto riguardandolo come estremità della linea, noi vediamo che esso non può comporre il continuo, perchè ci troviamo sempre dinanzi ad un segmento che comprende idealmente almeno altri punti distinti dagli estremi. Il postulato che a tutti i numeri razionali corrispondono dei punti non è praticamente verificato, e idealizzando il punto e il segmento nel senso che esso comprenda sempre dei punti distinti dagli estremi, non è più giustificata la corrispondenza biunivoca fra i punti della retta e i numeri reali ordinari. Allo Stolz avevo già osservato che l'assioma d'Archimede si deduce dal postulato del continuo di Dedekind, perchè anche questo postulato si basa sulla corrispondenza suddetta, ma che si può separare l'assioma d'Archimede da quello del continuo dando a questo la forma seguente. *Se in un segmento AB esiste un segmento (XX') variabile tale che AX sia sempre crescente e minore di AX'; e (XX') diventa indefinitamente piccolo (cioè più piccolo di ogni segmento dato), sempre decrescente, esso contiene un punto Y distinto da X e X'.*

Al postulato del continuo nella nuova forma ne va aggiunto un altro analogo a quello di Archimede, e cioè che se α e β sono due *segmenti rettilinei tali che α sia minore di β, si può costruire un multiplo α secondo un simbolo di multiplicità η che superi β.* Naturalmente se η è un numero intero finito questo postulato diventa l'assioma di Archimede.

E nei Fondamenti *ho appunto costruiti dei segmenti infiniti e infinitesimi attuali che soddisfano alla condizione che dato α come unità si può costruire β e viceversa* (¹). Con questi segmenti si possono eseguire tutte le solite operazioni di addizione e di sottrazione, come si possono trovarne i multipli e summultipli eseguendo con essi varie operazioni razionali e irrazionali, *cosicchè coi simboli* (numeri) *che rappresentano questi segmenti si possono eseguire le operazioni fondamentali, per le quali valgono le regole ordinarie.* Naturalmente posta dinanzi, come si doveva, la questione dell'esistenza dei segmenti infiniti e infinitesimi attuali, la concezione aritmetica di questi numeri doveva stare *in seconda linea, perchè per ciò che dissi era opportuno affrontare dapprima tale questione non dal lato aritmetico, ma da quello geometrico.*

E fu questa insufficienza giustificata di sviluppo aritmetico che diede origine ad alcune critiche contro i nuovi infiniti e infinitesimi. Ed è perciò che il prof. Levi-

(¹) Vedi anche A., *Il continuo rettilineo e l'assioma d'Archimede* (Atti R. Acc. dei Lincei 1890). Hoelder, *Der Quantität und die Lehre vom Mass* (Leipz. Ber., 1901). Anche sulla Geometria non archimedea si può parlare della misurabilità dei segmenti quando uno di essi sia preso come unità fondamentale di misura.

CIVITA, ancora quando era studente, dietro mio consiglio, trattò per primo il problema dal lato aritmetico, costruendo i detti numeri per via aritmetica e completandoli anzi con l'introduzione di nuove unità, necessarie per altre operazioni. D'altro canto il sig. HILBERT con la costruzione di un campo geometrico non-archimedeo veniva a dare una conferma autorevole alla possibilità logica di una tale geometria, e il sig. BINDONI nella sua tesi di laurea dimostrava come il campo geometrico di HILBERT sia compreso nel mio. Le recenti ricerche sulla teoria degli aggregati, anche del sig. SCHOENFLIES, confermano la validità logica di questa geometria, e le ultime ricerche sul problema del continuo rettilineo acquistano così maggior interesse, rimanendo però da stabilire in modo definitivo se, come pare, sia un solo il tipo dei numeri che vi soddisfano, anche aggiungendovi occorrendo altre unità, questioni codeste di cui si occuparono recentemente i signori HAHN, SCHOENFLIES e WAHLEN.

Assodata la validità logica del continuo rettilineo non-archimedeo, ne consegue pure quella della geometria non-archimedea, per la quale nei miei *Fondamenti* ho scelto la forma Riemanniana. E si ha che *in un campo infinitesimo intorno ad un punto, considerando soltanto i segmenti finiti fra loro, o che soddisfano all'assioma d'ARCHIMEDE, vale la geometria euclidea.* Questo teorema fu poi dimostrato dal LEVI-CIVITA anche per la geometria non-archimedea di EUCLIDE e di BOLYAI-LOBATSCHEWSKY.

E di questo teorema si possono riguardare come corollari i teoremi del sig. DEHN, trovati seguendo il metodo di HILBERT, sulle relazioni della somma degli angoli di un triangolo con le parallele condotte da un punto ad una retta, vale a dire che esistono due sistemi geometrici non-archimedei nei quali la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due o eguale a due retti, mentre da un punto si possono condurre più parallele ad una retta data (1).

La validità logica della geometria non-archimedea porta con sè l'indipendenza della teoria delle proporzioni, come quella della proiettività dal postulato di ARCHIMEDE, di cui pure si occuparono seguendo metodi più semplici altri geometri, fra i quali HILBERT e SCHUR.

***

Ma assodata la validità logica della geometria non-archimedea rimane la questione del contenuto e del metodo che furono pure oggetto di critiche, sebbene meno determinate. Permettetemi di intrattenerVi, per quanto il tempo me lo consente, su questo punto che può sembrare esorbiti dal campo matematico a chi è abituato nelle ricerche superiori della scienza a badare soltanto ai risultati, e a non dare importanza al contenuto degli oggetti matematici e al metodo, mentre il contenuto è di per sè un elemento essenziale nei principi della scienza e il metodo non bene scelto, possa anche condurre a petizioni di principio. Io mi servirò sotto altra veste di considerazioni, già vecchie, da me svolte nei *Fondamenti di Geometria*, e prima

(1) Basta infatti considerare un campo infinitesimo non archimedeo nel quale la somma degli angoli di un triangolo nella geometria Riemanniana o ellittica è maggiore di due retti e nella geometria Euclidea è eguale a due retti, e per un punto passano infinite parallele ad una retta data, quando si consideri la parte di esse rette comprese nel campo suddetto.

ancora in lezioni date all'Università di Padova tra il 1885 e il 1890 che servirono di preparazione alla pubblicazione dei *Fondamenti* stessi, tenendo ora conto delle pubblicazioni successive.

Gli oggetti della matematica pura non hanno necessariamente una rappresentazione fuori del pensiero, ad es. il numero, che è nella sua prima formazione il risultato dell'operazione mentale dell'enumerare degli oggetti anche astratti. *La verità ha il suo primo fondamento sui principî logici e su semplici operazioni mentali universalmente consentite. La libertà dello spirito nelle sue creazioni è limitata soltanto dal principio di contraddizione*, onde un'ipotesi è matematicamente possibile quando non è in contraddizione colle premesse. La matematica pura, come la logica formale, è per noi esatta.

La Geometria invece ha la sua origine nell'osservazione diretta degli oggetti del mondo esteriore, che è lo spazio fisico, e dall'osservazione idealizzata di essi trae le sue prime e precise verità indimostrabili e necessarie al suo svolgimento teoretico, che sono gli assiomi propriamente detti, come ad es. quello che per due punti nel campo della nostra osservazione passa un solo oggetto rettilineo. Ma per essere esatta la geometria *essa deve rappresentare gli oggetti forniti dall'osservazione per mezzo di forme astratte o mentali e gli assiomi con ipotesi bene determinate, indipendenti cioè dall'intuizione spaziale*, cosicchè la geometria diventi parte della matematica pura, ossia dell'estensione astratta (Ausdehnungslehre), dove il geometra proceda nelle sue costruzioni senza bisogno di vedere se esse abbiano o no una rappresentazione esteriore, finchè non le applichi al mondo fisico, senza per questo che egli abbia ad abbandonare la visione delle figure e tutti i vantaggi che derivano dall'uso dell'intuizione nella ricerca geometrica. Epperò la esattezza della geometria sarà tanto maggiore quanto più sicura sarà quella degli assiomi suggeriti dall'osservazione e quindi quanto più essi saranno semplici e nel minor numero (1). Ed invero l'osservazione non è che approssimativa e talora anche apparente e fallace, come quando muovendoci noi vediamo cambiare la grandezza degli oggetti, mentre dalle leggi della prospettiva si sa che tale fatto non sussiste. Evitando ad es. l'assioma fondamentale del piano, riducendo cioè gli assiomi a quelli più semplici della retta e fra due rette, non solo si rimedia al difetto riscontrato da Gauss in quell'assioma, ma si risparmia la dimostrazione della possibilità di tale assioma quando lo si estende a tutto il piano illimitato, oltre che si dà alla costruzione dello spazio a quattro dimensioni la stessa origine geometrica di quella del piano e dello spazio ordinario. Certo che la richiesta della semplicità e del minor numero degli assiomi conduce a inevitabili e minuziose ricerche. E questa minuziosità fa perdere di vista i concetti generali e costituisce una delle difficoltà nella lettura di tali ricerche, ove non si supponga nulla di matematicamente noto, e si ponga dinanzi a sè tutto il pro-

(1) Anche il Klein osserva che i dati di ogni osservazione valgono sempre entro certi limiti di esattezza e sotto particolari condizioni, mentre quando stabiliamo gli assiomi possiamo porre in luogo di questi dati delle proposizioni di assoluta precisione e generalità, e facendo ricorso al principio di Mach sull'economia del pensiero egli sostiene pure che gli assiomi devono essere semplici e nel minor numero (vedi Gutacten zur Verth. des Lobatsch. Preises, nov. 1897, Kasan, oppure Math. Ann., 50, 1898; Vorles. ü. Nicht-Eucl. Geom., Bd I, 1893).

blema dei principî, come nei *Fondamenti*. È chiaro anche che gli *assiomi devono essere consentiti universalmente, epperciò possiamo ammettere come evidenti e quindi indimostrabili soltanto gli assiomi concessi dal filosofo empirista, pei quali è inutile dare la dimostrazione della loro compatibilità logica. Ma tale dimostrazione è invece necessaria quando si estendono questi stessi assiomi allo spazio illimitato*, dappoichè nessuno ha mai osservato nè potrà mai osservare un tale spazio. Ecco perchè non possiamo accettare come assioma suggerito dall'osservazione, quello delle parallele, quando si definiscono queste rette come quelle rette del piano che prolungate indefinitamente non si incontrano mai, perchè nessuno ha mai osservato due tali rette, nè possiamo ammettere come assioma primitivo tratto dall'osservazione quello ad es. che la retta illimitata è un sistema lineare aperto. *Ma gli assiomi tratti dalla pura osservazione non bastano per la ricerca geometrica. Diventata la geometria parte della matematica pura, o per meglio dire dell'estensione astratta, ammettiamo poi nella geometria tutte quelle ipotesi o postulati che non si contraddicono fra loro nè agli assiomi premessi*; le quali ipotesi o limitano o allargano il campo della geometria, come ad es., i postulati di ARCHIMEDE, del continuo, degli spazi a più di tre dimensioni, ecc., o servono a scegliere una delle forme possibili determinate da assiomi o da ipotesi premesse, come il postulato delle parallele (1).

Dalle cose dette discende pure che bisogna distinguere *lo spazio fisico dallo spazio intuitivo*, che è una rappresentazione idealizzata del primo, ed è *un'intuizione, e lo spazio intuitivo dallo spazio geometrico astratto, che è un concetto*; forme codeste non bene distinte anche da autori eminenti, come da HELMHOLTZ. *Lo spazio geometrico astratto è appunto quella parte dell'estensione pura nella quale è rappresentato lo spazio intuitivo, ma che a sua volta non ha per tutte le sue forme una rappresentazione effettiva neppure approssimativa, o non è necessario la abbia nello spazio fisico o intuitivo.* Cosicchè non solo l'eguaglianza delle figure geometriche non è necessariamente determinata dal movimento dei corpi rigidi, come riteneva HELMHOLTZ, ma è anzi l'eguaglianza delle figure geometriche (che dipende a sua volta dal concetto logico dell'eguaglianza di due cose distinte) che è necessaria per definire il movimento dei corpi rigidi. Da ciò si ha pure un'altra conseguenza; che la geometria teoretica non è una parte della meccanica, come riteneva il NEWTON, e non dipende dalla fisica come opinava l'HELMHOLTZ. *La distinzione dello spazio fisico dallo spazio geometrico porta con sè dei postulati che sono necessari soltanto per le pratiche applicazioni della geometria, come quello approssimativo del movimento dei corpi rigidi, quello delle tre dimensioni, quello pure d'ARCHIMEDE, mentre vi sono postulati dello spazio geometrico, come quelli dello spazio generale, del continuo non-archimedeo, che non abbiamo bisogno di ammettere per lo spazio fisico* (2).

(1) Ad es. nelle *Grundlagen der Geometrie* di HILBERT il sistema degli assiomi appare invece più come un sistema di verità astratte arbitrario che di verità fornite in parte dall'esperienza ed in parte quali verità necessarie allo svolgimento logico della geometria.

(2) A. *Fondamenti di Geom.* L'esclusione del movimento dei corpi rigidi dalla definizione dell'eguaglianza delle figure accolta anche da HILBERT (1899) e da altri, fu pure accettata, ed era più difficile, in trattati di geometria elementare dall'A. (1a ediz. 1897) poi da INGRAMI, da ENRIQUES e

E poichè nello spazio geometrico, che come lo definii nei miei *Fondamenti*, ha *infinite dimensioni*, è rappresentato lo spazio intuitivo, noi vi possiamo lavorare con l'intuizione, immaginando in esso il punto, la retta e il piano come nello spazio ordinario e operando come nella geometria pura. Ma naturalmente non avendo nè potendo avere l'intuizione di uno spazio a quattro dimensioni, combiniamo l'intuizione coll'astrazione, come facciamo per avere lo spazio illimitato da quello intuitivo, e tanta è l'abitudine che acquistiamo, che come crediamo d'intuire tutto lo spazio illimitato, così crediamo di vedere due piani che si incontrano in un solo punto nello spazio a quattro dimensioni ([1]).

Nella distinzione fra spazio fisico e spazio geometrico si conciliano e l'affermazione di Stuart Mill che la retta del matematico non esiste in natura (dovrebbe dirsi più propriamente nello spazio fisico) e la osservazione del Cayley, che non potremmo affermare ciò se non avessimo il concetto della retta.

Nella geometria adunque la libertà dello spirito non è soltanto limitata dal principio di contraddizione, come nella matematica pura, ma bensì anche dai dati dell'intuizione spaziale.

Non possiamo ammettere ad es. un piano nel quale non valga il teorema di Desargues sui triangoli omologici, nè un piano nel quale una retta, che ruota intorno ad un punto non possa assumere la posizione di un'altra retta passante per lo stesso punto, come non potremo ammettere i *piani* di Bolyai-Lobatschewsky, di Riemann ed ellittico se fosse provato che intuitivamente vale il postulato di Euclide, come non potremmo ammettere una geometria nella quale la retta fosse determinata da tre anzichè da due punti, mentre queste forme sono possibili nella estensione astratta e possono avere in tutto o in parte una rappresentazione nella stessa geometria; allo stesso modo che resterebbe vera pur sempre la geometria della superficie sferica, della pseudosfera e del piano improprio all'infinito se valesse fisicamente o intuitivamente il postulato di Euclide.

Ciò contrasta, ma non contraddice al principio secondo il quale per certe categorie di proprietà possiamo ritenere equivalenti due enti diversi, ad es. due forme

---

Amaldi. Per quanto siasi molto discusso su questa esclusione, e se ne trovi qualche traccia anche negli *Elementi* di Euclide stesso, non s'era mai ottenuta effettivamente. (Vedi A., *Fond. di Geometria. Appendice*). Anche B. Russel e Poincaré ritengono che la possibilità del movimento di una figura invariabile contiene in questo senso un circolo vizioso. Anzi il Poincaré ritiene che la possibilità di questo movimento non sia una verità evidente per sè stessa, o almeno non lo sia che allo stesso modo del postulato di Euclide. Ed invero la verifica empirica del postulato delle parallele si può far dipendere da quella del movimento di una figura invariabile. Ma per la distinzione che io faccio di spazio geometrico da spazio fisico e quindi tra la geometria pura, per la quale il principio suddetto non è necessario, e le sue pratiche applicazioni, non mi accordo coll'eminente matematico francese, quando egli sostiene (senza fare la distinzione suddetta) che « en étudiant les définitions de la géométrie on voit qu'on est obligé d'admettre, sans les demontrer, non seulement la possibilité de ce mouvement, mais encore quelques unes de ses propriétés ». Questo principio e le sue proprietà sono necessarie invece per le pratiche applicazioni della geometria, come lo è l'assioma delle tre dimensioni dello spazio fisico.

([1]) Ciò spiega perchè adoperiamo qui la parola *spazio* anzichè la parola *varietà*, che ha un significato più esteso ma del tutto generico ed astratto.

che si possono trasformare l'una nell'altra proiettivamente, o birazionalmente, perchè con questo principio non si tien conto delle altre proprietà geometriche o del contenuto degli enti stessi che ne costituisce invece l'essenza. Ad es. lo spazio fisico e lo spazio geometrico sono di contenuto sostanzialmente diversi fra loro, come sono diversi dalle varietà analitiche che li rappresentano, e come la esistenza dello spazio fisico, così la costruzione dello spazio geometrico costituisce un elemento essenziale della geometria, che *non va dimenticato*, come di solito avviene. E che il contenuto abbia una importanza fondamentale lo dimostra ad es. il fatto che il CAYLEY, il quale ha iniziato lo studio proiettivo della geometria non euclidea, riteneva valevole in senso assoluto quella euclidea, onde nelle ricerche del CAYLEY più che di geometria non euclidea si tratta di una rappresentazione di essa nella geometria euclidea stessa, mutando la nozione della distanza, allo stesso modo che la pseudo sfera, la sfera e il piano all'infinito improprio, sono rappresentazioni della geometria non euclidea in quella euclidea. *Ora invece il contenuto di queste geometrie ha una notevole importanza: esso ci dice che l'attuale osservazione esteriore non è sufficiente a stabilire esattamente l'una o l'altra geometria.* E un tale contenuto ha, come si vede, anche una portata filosofica per la forma dello spazio, mentre nessuna potevano averne le ricerche del CAYLEY, come non ne hanno la teoria degli immaginari o quella dell'infinito improprio, perchè non si tratta che di *denominazioni* usate per indicare enti già esistenti ed effettivi che nulla aggiungono alla genesi dello spazio.

Da tutto ciò emerge anche che le *ricerche matematiche sui principî della scienza sono bene distinte e devono tenersi distinte, da quelle filosofiche intorno alla genesi delle idee matematiche*: e noi stessi nel determinare il contenuto degli oggetti della matematica pura e della geometria non abbiamo inteso di partecipare per l'uno o per l'altro sistema filosofico, imperocchè accennando che il numero non ha necessariamente una rappresentazione fuori del pensiero, non abbiamo voluto affermare che il numero non sia esso stesso di origine empirica; e dicendo che il punto ha una rappresentazione empirica, non abbiamo voluto dire che non sia una pura intuizione *a priori* dello spirito e necessaria ad ogni esperienza esteriore. E questa distinzione è un bene perchè la matematica ci unisce mentre la filosofia, almeno per ora, ci divide. È vero che gli studî sui principî della scienza hanno dato e daranno ancora luogo a discussioni fra matematici, ma l'errore in matematica si va sempre eliminando, e restano le nuove idee definitivamente acquisite alla scienza. L'errore dipende o direttamente dal matematico o dalla indeterminatezza di alcune nuove idee o dalla poca chiarezza colla quale dapprima si presentano, ma spesso anche dalla contrarietà che esse incontrano da principio quando urtano vecchie convinzioni profondamente radicate e rafforzate dalla autorità di eminenti matematici, o contro la indifferenza degli uni, che per non darsi la pena di riflettere vorrebbero escludere le ricerche sui principî della scienza dal campo matematico, o l'opposizione di altri per i quali i nuovi pensatori sono i rivoluzionari della scienza. E ad oscurare la luce nascente delle nuove verità matematiche si aggiunsero quei filosofi che, fermi nei principî matematici già da essi conosciuti, vedevano o credevano di vedere nelle nuove idee un attentato alle loro ipotesi sulla conoscenza e sulla interpretazione della Natura, mentre da un nuovo ordinamento dei principî suggeriti e rinvigoriti da fatti nuovi, non solo può trarre profitto la matematica, ma la stessa filosofia.

La filosofia deve perciò accettare le nuove idee matematiche quando esse sieno formate definitivamente. Però se le ricerche matematiche si devono distinguere dalle filosofiche, è opportuno d'altro canto che il matematico si astenga dal giustificare i suoi concetti con considerazioni filosofiche o con finzioni che si prestano facilmente alla critica del filosofo, come fanno ad esempio l'empirista e l'idealista del Du Bois Reymond, o come fece talora il Cantor per giustificare i suoi numeri transfiniti, i quali hanno una legittima esistenza, nonostante anche recenti critiche filosofiche. Ma d'altro canto per timore di queste critiche *il matematico non deve trincerarsi in un campo puramente astratto o in un formalismo simbolico mostrandosi indifferente dinanzi a questioni di contenuto matematico*, come è accaduto in passato e accade ancora al presente, quando si confonde la geometria con la teoria generale delle varietà di elementi puramente astratte.

Epperciò è preferibile che l'ordinamento dei nuovi principî risponda allo svolgimento logico e più semplice delle idee matematiche e quindi *il metodo non sia artificio senza vita o non appaia giuoco di simboli o di parole*, per quanto utile, *ma sia filosofico*. Così la matematica può essere anche utile alle ricerche filosofiche intorno alla genesi delle idee matematiche, allo stesso modo che essa ha pure per compito di essere utile alle scienze applicate che hanno per oggetto diretto lo studio dei fenomeni della Natura scegliendo i metodi approssimativi a questo fine più appropriati. E quando invece si segue un metodo indiretto, rappresentando ad es. lo spazio mediante una varietà a più variabili per studiarne i principî, è necessario esaminare se seguendo il contenuto dello spazio stesso, o la sua costruzione, i postulati di detta varietà possano essere giustificati senza ricorrere a concetti che con quei postulati vengono definiti, ciò che costituirebbe una petizione di principio e filosoficamente un errore.

Sulla scelta del metodo sono d'accordo i più eminenti matematici. Il Du Bois Reymond notava che se nelle operazioni coi segni nella matematica pura non si bada più al loro significato, nella discussione dei concetti fondamentali della matematica non si deve dimenticare la loro origine; e per la geometria Newton osservava giustamente che la semplicità della figura dipende dalla semplicità della genesi delle idee, cioè non dalla loro equazione, ma dalla loro descrizione, e Gauss affermava che i mezzi logici per la concatenazione e la rappresentazione delle verità geometriche per sè nulla possono produrre e soltanto germogliano senza frutto, quando la feconda e vificatrice intuizione non domini dappertutto. In modo analogo si esprimono il Weierstrass, il Lie, il Klein ed altri. E a questi concetti si uniformano i miei « Fondamenti di geometria e in modo speciale nella genesi della geometria non-archimedea ». Sta il fatto però che questo metodo, senza l'appoggio dell'analisi, quando non supponga anzi nulla di matematicamente noto, riesce nella lettura più malagevole e soltanto negli ultimi anni in Italia e fuori il metodo basato sul puro ragionamento va prevalendo nelle ricerche sui principî della geometria. Tutti ricordano la sorte toccata all'Ausdehnungslehre del Grassmann del 1844, certo migliore per metodo a quella del 1862.

Tornando alla geometria non-archimedea è necessario assicurarsi se essa soddisfa alle condizioni di contenuto e di metodo sopra enunciate. Esaminando il continuo, quale ci viene fornito dall'osservazione diretta e greggia, per due oggetti rettilinei vale l'assioma d'ARCHIMEDE, perchè qualunque essi siano, anche se non possiamo praticamente costruire un multiplo dell'uno maggiore dell'altro, potremo però considerare dei due oggetti una parte ennesima abbastanza piccola in modo che la verifica dell'assioma sia possibile per queste parti, e quindi fra i due oggetti stessi. *Ma la estensione senz'altro di questo assioma a tutto lo spazio illimitato*, non è ugualmente giustificata. Ed invero, quando noi passiamo ad ammettere che in *ogni* segmento idealizzato vi siano punti distinti dagli estremi, nè l'osservazione, nè l'intuizione ci conduce a stabilire l'assioma d'ARCHIMEDE fra due segmenti che non si possono osservare. E siccome si dimostra che se esiste un segmento infinitesimo attuale esso si può considerare rispetto a un segmento finito con infinita approssimazione come nullo, si conclude che se anche esistesse fisicamente un tale segmento, noi non potremmo vederlo. Possiamo però applicare la nostra intuizione in ogni campo di segmenti finiti, che soddisfano cioè all'assioma d'ARCHIMEDE. *La geometria non-archimedea soddisfa adunque alle condizioni che alla geometria in generale sono imposte dalla intuizione spaziale, e quindi il suo contenuto è geometricamente giustificato.*

* * *

Ma un altro problema, pure geometrico, s'affaccia in seguito alle nostre premesse, quello cioè se le ipotesi non confermate dall'esperienza possono avere mercè osservazioni più accurate o più estese un'effettiva rappresentazione nel mondo fisico. Fra queste ipotesi le più caratteristiche sono quelle delle parallele, del continuo e degli iperspazî. Abbiamo già osservato che se l'ipotesi euclidea fosse esclusa, non si potrebbe più parlare di spazio euclideo. Per il continuo rettilineo osserviamo invece che fisicamente l'esistenza dell'infinito e dell'infinitesimo attuale non contraddice alla nostra intuizione, però nessuna esperienza ci conduce nè ci potrà condurre fuori delle grandezze finite, solo possiamo dire, per un teorema sopra ricordato, che: *se lo spazio fisico fosse infinito attuale rispetto al campo delle nostre osservazioni, nello spazio fisico finito, supposto anche illimitato, varrebbe la geometria euclidea.*

L'ipotesi fisica invece di uno spazio a quattro o più dimensioni fu da me combattuta altrove, associandomi all'HELMHOLTZ (¹). In ogni caso nessuna utilità ci spinge a questa ipotesi, che sarebbe puramente fantastica. Eppure è curioso che certe idee siano scaturite da intuizioni anche errate. L'idea infatti di uno spazio a più di tre dimensioni non è sorta dall'Ausdehnungslehre del GRASSMANN, per il quale lo spazio fu sempre a tre dimensioni, e quindi anche la geometria, e tanto meno è sorta dal nominalismo geometrico usato dal CAYLEY, dal CAUCHY, dal RIEMANN e da altri nello studio di certe varietà analitiche a più di tre dimensioni; non dalla mia costruzione geometrica degli iperspazî, ma sorse dall'ipotesi fisica stessa, che fu la prima a presentarsi, e che ha perciò ostacolato l'accettazione dell'ipotesi matematica e ha fatto spesso confondere presso il volgo i sostenitori della geometria a più di tre dimensioni coi cosidetti *medium* alla ZÖLLNER e cogli *spiritisti*.

(¹) A., *Il vero nella matematica* (discorso inaugurale, nov. 1906. Padova).

E quanto all'utilità della geometria non-archimedea osservo che non può confondersi con qualunque geometria che si ottenga tralasciando o modificando qualche assioma. La geometria non-archimedea, come la non-euclidea, ha risolto una questione sulla quale si discuteva da secoli ed ha gettato nuova luce sulla costituzione del continuo e dello spazio geometrico. E ciò basta per la matematica pura. Del resto, ogni legge matematica, essendo una legge del pensiero, è anche una legge della Natura. E per l'armonia meravigliosa che esiste fra le leggi del pensiero e quelle del mondo, fuori di esso non si può asserire *a priori* che in questo non possano avere un'applicazione utile anche le più alte e più astratte concezioni matematiche. Ma non può essere questa utilità *relativa* lo scopo diretto della ricerca matematica in generale e in particolare quella intorno ai principî della scienza; non escludiamo però, anzi vogliamo oggi più che mai che uno degli scopi più importanti della scienza sia anche quello di soddisfare ai bisogni delle scienze applicate e di corrispondere meglio che è possibile alla sua importante funzione sociale.

***

E qui, come geometri, avremmo finito. Ma se non è compito nostro di fare della filosofia, non possiamo però accettare le restrizioni del puro empirismo sull'estensione della ricerca matematica; il Pasch stesso che ha fatto un utile tentativo in questo senso, e per tante ragioni assai lodevole, non ha potuto rimanere coerente al suo programma (1). Nè possiamo quali geometri ammettere che lo spazio e i suoi postulati siano forme *a priori* dell'intuizione pura, secondo la critica di Kant, perchè nessuna prova matematica è stata data ad es. per il postulato delle parallele di Euclide, il solo che Kant conoscesse. E quei filosofi positivisti i quali combattono le ipotesi euclidee non sono meno metafisici dei kantiani. E tanto meno possiamo ammettere che pur non avendo il postulato di Euclide la stessa evidenza degli altri e possa non essere verificato da ulteriori osservazioni noi abbiamo un'intuizione *a priori* o subiettiva necessaria del postulato medesimo, la quale intuizione deriverebbe dalle rappresentazioni visive e tattili (2). E non la possiamo accettare perchè se l'esperienza non confermasse il postulato di Euclide, dovrebbero pur modificarsi le rappresentazioni visive e tattili, e quindi anche la nostra intuizione spaziale. In ogni caso nessuna prova geometrica abbiamo della necessità subiettiva del postulato di Euclide e degli altri assiomi; cosicchè il geometra non può ammettere gli assiomi dati dalle rappresentazioni visive e tattili per tutto lo spazio illimitato senza giustificare tale estensione. La nostra intuizione è fatta di osservazione e di esperienza idealizzata, perchè quando mi figuro la retta intuitivamente, non la so immaginare che come un oggetto rettilineo per quanto idealizzato, e sebbene *poi coll'astrazione* io estenda tale rappresentazione a qualunque segmento della retta illimitata. Noi ci assicuriamo infatti della presenza degli oggetti esterni e delle loro proprietà per mezzo dei sensi e delle qualità delle nostre sensazioni che essi producono in noi, e tratteniamo coll'astrazione soltanto quella dell'estensione per avere le prime forme geometriche. E così, come il linguaggio, l'intuizione spaziale è il prodotto di una lunga esperienza. Gli uomini

(1) A., *Fondam. di geometria. Appendice.*

(2) Enriques, *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria* (Rivista filosofica di G. Cantoni. Pavia, 1903). — Enc. der Math. Wiss. (loc. cit. Einleitung).

la possedono in grado diverso; essa dovrebbe essere più perfetta nei geometri puri e nei pittori, manchevole in coloro che ciechi da giovani riacquistando la vista hanno un'intuizione imperfetta delle forme geometriche più semplici.

Il sig. B. Russel ha posto la questione dell'*a priori* sotto una nuova forma, distinguendo l'*a priori* logico dall'*a priori* psicologico, che per Kant si confondono. Ma per quanto siamo d'accordo in alcune considerazioni fondamentali, fra le quali quella dell'indipendenza della geometria dalla fisica, non posso associarmi a lui ad es. nè nella dimostrazione che lo spazio, come forma di esteriorità, debba avere un numero finito di dimensioni, mentre lo spazio generale ne ha un numero infinito. nè nell'altra, che egli tenta di dare, che tutti gli assiomi comuni alle tre geometrie non-euclidee sono necessari per ogni esperienza, mentre anche secondo lui sono di origine empirica i postulati stessi delle parallele. Sarebbe opportuno esaminare le conseguenze di tale ipotesi rispetto alla geometria non-archimedea.

Vi sono dei concetti che non ci sono dati direttamente dall'osservazione, come quello dell'illimitato, dal quale abbiamo fatto dipendere quello della dimostrazione per induzione completa, o quello dell'eguaglianza delle figure indipendentemente dal principio approssimativo del movimento dei corpi rigidi, e di questi concetti non è chiaro ancora quanta parte spetti al pensiero e quanta all'esperienza (1). Ma per il fatto che nella geometria ai dati imprecisi dell'esperienza noi sostituiamo delle forme precise, come ad esempio quella della retta, ciò non significa che essi siano forme necessarie di ogni esperienza, perchè anche i postulati non-euclidei possono essere sostituiti mediante forme matematicamente precise, senza che si possano considerare come forme trascendentali del nostro spirito. Certo è però che la geometria teorica ha la sua origine nell' esperienza, ma può rendersene indipendente colla formulazione esatta dei suoi assiomi e delle sue ipotesi, e colla dimostrazione della possibilità così di queste ipotesi come degli assiomi quando siano estesi allo spazio illimitato, e con la costruzione di forme che non sono suggerite dall'esperienza stessa. Queste forme però sono costruzioni alle quali conducono gli assiomi tratti dall'esperienza elaborata dal pensiero logico, senza venir meno alle condizioni poste dall'intuizione spaziale.

Il pensiero, la psiche e il senso sono così intimamente connessi fra loro, che la separazione di ciò che è speciale di ciascuno è quasi sempre un problema arduo, se non d'impossibile soluzione, di guisa che la filosofia vi gira intorno da secoli senza potervi mai penetrare completamente e raggiungere una soluzione definitiva. Soltanto con la specializzazione delle ricerche e con un indirizzo sperimentale e scientifico si potrà arrivare in alcuni problemi almeno ad una sintesi filosofica chiara e sicura, onde gli scienziati specialisti potranno prepararne gli elementi. E fra questi problemi possiamo considerare quelli delle idee matematiche; alla soluzione dei quali i matematici hanno contribuito con uno dei più belli monumenti nella storia della scienza.

(1) A. *Il vero nella mat.*, nota 3.

RELAZIONE DEL CONCORSO INTERNAZIONALE
PER LA « MEDAGLIA GUCCIA ».

(Commissari: **M. Noether, H. Poincaré, C. Segre,** *relatore*).

Il programma di questo concorso ([1]) stabiliva che il CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO conferirà la MEDAGLIA GUCCIA a

una Memoria che farà fare un progresso essenziale alla teoria delle curve gobbe algebriche;

soggiungendo però che, nel caso in cui, fra i lavori inviati al concorso, nessuna Memoria relativa a questa teoria fosse riconosciuta degna del premio, questo potrà essere aggiudicato a

una Memoria che farà fare un progresso essenziale alla teoria delle superficie, o altre varietà, algebriche.

Le Memorie sottoposte dal CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO al giudizio della Commissione furono tre ([2]). Eccone i titoli e le epigrafi:

1°) *Sur les courbes gauches de direction* (pagine 234). — Epigrafe:

« Prévoyez votre route, avant que de partir:
« A qui dirige mal, rien ne sert de courir ».

2°) *Sur quelques propriétés arithmétiques des courbes algébriques planes ou gauches* (pagine 16). — Epigrafe:

« ὁ ζητῶν εὑρίσκει ».

([1]) Cfr. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVIII, 1904, pp. 390-391.
([2]) Cfr. il *Verbale dell'adunanza del 14 luglio 1907* (Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. II, 1907, pp. 35-37; Medaglia GUCCIA, p. 36).

3°) *Grundlage zu einer Bewegungsgeometrie des Kreises und der Kugel* (pagine 45). — Epigrafe:

« Die Kugel beherrscht das Weltall und die Raumwissenschaft ».

La *1ª Memoria*, molto ampia, si basa in special modo su certe formole, che dànno esplicitamente le coordinate x, y, z dei punti di una curva sghemba ed il suo arco s in funzione di un parametro (il parametro di un piano isotropo tangente alla curva). Queste formole sono opportunamente applicate alle *curve di direzione* (sulle quali cioè $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sono funzioni razionali di x, y, z), ed alle curve *rettificabili algebricamente*, o *razionalmente* (in cui s è funzione algebrica, oppure razionale, di x, y, z): in particolare a curve *algebriche*.

Seguono varie ricerche speciali su curve evolute od evolventi di linee date, sulle superficie caustiche ed anticaustiche, ecc.

In complesso questo lavoro, che è il più importante fra quelli presentati, contiene sui vari argomenti accennati parecchi risultati utili, specialmente su classi particolari di linee e superficie.

Ciò nondimeno, e pur prescindendo da talune mende facilmente correggibili, che si riscontrano ad esempio in qualche ragionamento, la Commissione con rammarico ha dovuto escluderlo dal premio, ritenendo che esso non corrisponda al tema prefisso. Invero questo poneva come condizione che la Memoria da premiarsi facesse fare un progresso essenziale alla teoria delle curve gobbe *algebriche*, oppure a quella delle superficie, od altre varietà *algebriche*. *L'algebricità* era evidentemente una condizione indispensabile, che caratterizzava gl'indirizzi secondo cui si potevano svolgere, pur colla massima libertà, le ricerche. Ora il lavoro di cui parliamo versa invece sostanzialmente su questioni metriche di Geometria differenziale; e se anche qua e là considera in particolare delle curve (e superficie) algebriche, per esempio di direzione, non fa su di esse ricerche profonde, e non ottiene proprietà che abbiano una speciale importanza, nè in sè, nè per le applicazioni che potranno dare.

La *2ª Memoria* riguarda le curve algebriche, le cui equazioni hanno per coefficienti dei numeri algebrici; e tratta di problemi connessi all'esistenza, su tali curve, di punti a coordinate esprimibili così:

$$\sum_{1}^{\nu} a_i e^{\alpha_i} ,$$

ove anche le a_i ed α_i son numeri algebrici. Un noto teorema fondamentale di LINDEMANN fornisce subito delle relazioni tra i coefficienti della curva ed i numeri a_i, α_i. Ma le conseguenze che l'Autore ne trae si riferiscono solo a casi particolari, il cui interesse è piuttosto limitato, o si spingono poco più in là di ciò che si può riguardare come già noto. Perciò il contributo che ne viene alle proprietà aritmetiche delle curve algebriche non ci pare sufficiente.

Infine la *3ª Memoria*, relativa alla Geometria dei cerchi e delle sfere, ed a certi congegni cinematici, ha in sè stessa poco valore, e non corrisponde affatto al tema.

***

Così la Commissione, unanime, ha concluso che non era il caso di conferire il premio a nessuno di quei tre lavori presentati al concorso.

Dopo ciò, seguendo il programma che le era tracciato, essa ha esaminato se il premio si potesse invece assegnare a Memorie, pubblicate dopo l'apertura del concorso (1° novembre 1904) e prima della sua scadenza (1° luglio 1907), e relative ancora alle curve gobbe, o superficie, od altre varietà, algebriche.

Effettivamente nel periodo indicato vari matematici han pubblicato dei lavori importanti su questi argomenti. La Commissione ha esaminato attentamente quelel pubblicazioni, ed ha concluso col prescegliere fra esse quelle di **Francesco Severi** relative alla Geometria delle superficie algebriche e delle curve algebriche tracciate su di esse.

Anche altri Autori avremmo giudicati degni del premio. Ma nel confronto dei loro lavori colle Memorie del SEVERI (sempre, bene inteso, per l'intervallo di tempo di cui si tratta) stava a favore di queste l'esservi risolte un complesso più ampio di questioni *generali*, mentre in quelli si trattava invece più spesso di classi *particolari* di superficie od altri enti.

Le pubblicazioni del SEVERI a cui abbiamo alluso sono, più precisamente, le seguenti:

1. *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di* PICARD *della 2ª specie.*

Mathematische Annalen, t. LXI (1905), pp. 20-49.
(Datata 14 novembre 1904; pubblicata 5 settembre 1905).

2. *Sulla differenza tra i numeri degli integrali di* PICARD, *della 1ª e della 2ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica.*

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XL (1904-905), pp. 288-296.
(Presentata nell'Adunanza del 22 gennaio 1905).

3. *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica.*

Mathematische Annalen, t. LXII (1906), pp. 194-225.
(Datata 20 settembre 1905; pubblicata 1° maggio 1906) (1).

(1) Un riassunto di questa Memoria trovasi nella Nota: *Sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique et sur les intégrales de* PICARD *attachées à la surface* (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. CXL, 1er semestre 1905, pp. 361-363, séance du 6 février 1905).

4. *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche.*

Annali di Matematica pura ed applicata, s. III, t. XII (1906), pp. 55-79.
(Datata 30 aprile 1905; pubblicata in agosto 1905) (1).

5. *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard.*

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXI (1° semestre 1906), pp. 257-282.
(Datata 15 dicembre 1905; stampata il 12-19 febbrajo 1906).

6. *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica.*

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XL (1904-905), pp. 766-776.
(Datata 18 aprile 1905; presentata nell'Adunanza del 7 maggio 1905).

7. *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica.*

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, ecc., s. II, vol. XXXVIII (1905), pp. 859-865.
(Datata 24 luglio 1905; presentata nell'Adunanza del 9 novembre 1905).

8. *Osservazioni varie di Geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà.*

Atti del R. Istituto Veneto, ecc., t. LXV (1905-906), Parte IIa, pp. 625-643.
(Datata 5 aprile 1906; licenziate le bozze per la stampa il 28 maggio 1906).

In queste Memorie si trovano, strettamente connessi fra loro, i più recenti metodi di studio di quella teoria: i metodi algebrico-geometrici dovuti principalmente ad Enriques e Castelnuovo; e quelli trascendenti di Picard, basati sull'uso degli integrali di differenziali totali, o integrali semplici, relativi alla superficie algebrica assegnata. E come il Severi aveva già portato nuovi contributi importanti ai metodi geometrici — citiamo solo, come esempio, l'estensione del concetto di *serie caratteristica* ai sistemi continui, non lineari, di curve, — ed altri qui ne porta, come l'introduzione (Memoria 7) delle *curve virtuali*, grazie a cui si rende possibile in ogni caso l'operazione di *sottrazione* per le curve di una data superficie, — così alla teoria degl'integrali di Picard egli ha fatto fare in questi lavori una serie di progressi veramente essenziali (2).

Anzitutto rileviamo che qui appunto si trova risolta finalmente la questione capitale di decidere quali siano le superficie su cui quegl'integrali non si riducono alle funzioni note, cioè a costanti se di 1a specie, a funzioni razionali se di 2a, a combinazioni algebrico-logaritmiche se di 3a specie. Severi dimostra che tali superficie

(1) Un riassunto di questa Memoria trovasi nella Nota: *Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques* (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. CXL, 1er semestre 1905, pp. 926-928, séance du 3 avril 1905).

(2) Cfr. Picard-Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* t. II, (1906), pp. 420, 432, 490-498.

sono precisamente quelle *irregolari*, nelle quali cioè il genere geometrico p_g è superiore a quello aritmetico p_a.

Esaminando la cosa più minutamente, si ha, per quel che riguarda gl'integrali di 1ª specie, che un teorema dato da HUMBERT in una sua importante Memoria del 1894, ed un altro di ENRIQUES del 1899 portavano a confrontare la classe delle superficie dotate d'integrali semplici di 1ª specie con quella delle superficie irregolari. Essi stabilivano, rispettivamente, che le superficie in cui esistono sistemi algebrici di curve non contenuti in sistemi lineari appartengono all'una ed all'altra classe.

Orbene SEVERI dimostra (Memoria **1**) che l'esistenza d'integrali di 1ª o di 2ª specie, trascendenti, trae di conseguenza l'irregolarità della superficie. In altri termini, se una superficie è regolare, sulla varietà Riemanniana a 4 dimensioni che ne dà l'imagine reale, ogni ciclo lineare si può ridurre con deformazione continua ad un punto.

Subito dopo l'ENRIQUES invertì quella proposizione, dimostrando che su ogni superficie irregolare esistono dei sistemi algebrici di curve non contenuti in sistemi lineari; onde, pel citato teorema di HUMBERT, le superficie irregolari ammetteranno integrali semplici di 1ª specie.

Ma il SEVERI stabilisce una proposizione quantitativa di maggior significato che quella riferita. Sia p l'irregolarità $(=p_g-p_a)$ di una superficie. Siano q ed r i numeri dei suoi integrali semplici distinti di 1ª e di 2ª specie. Egli ottiene (Memoria **2**) la relazione:

$$r-q=p \text{ (1)}.$$

Com'è noto, il risultato più completo

$$q=p, \qquad r=2p$$

fu poi pubblicato per primo dal CASTELNUOVO. Ma SEVERI ne diede pure subito una propria, molto semplice, dimostrazione, per mezzo di un'estensione del teorema d'ABEL (Memoria **4**), di cui diremo in seguito.

Quanto agl'integrali di 3ª specie, essi compaiono nella Memoria **3**, ed ivi, come corollario di altre considerazioni su cui pure ritorneremo, è risolta nel senso sopra indicato la questione della eventuale riducibilità di quegli integrali a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Fra i nuovi contributi allo studio degl'integrali di PICARD, rileviamo ancora nelle Memorie **1** e **2** l'analisi degl'integrali di 2ª specie aventi una data curva polare, e delle loro funzioni razionali *residue*. Sottraendo da un tale integrale delle funzioni razionali convenienti, esso può sempre ridursi ad integrali che posseggano solo una curva polare di 1° ordine, irriducibile e priva di punti multipli. Su questa curva il gruppo degli zeri della funzione residua di 1° rango conduce a considerare la serie caratteristica della curva; e appunto dall'essere questa serie una serie parziale si deduce nella Memoria **1** che la superficie è irregolare. — Nella Memoria **5** è data una riduzione a forma normale degl'integrali delle tre specie: la quale, se in

(1) Nella Memoria **1** aveva solo dimostrato che $r-q \leq p$.

parte è analoga a quella degl'integrali abeliani, in qualche punto esige invece considerazioni essenzialmente nuove.

Di grande importanza sono le ricerche della Memoria **3** intorno alla totalità delle curve algebriche situate su una data superficie algebrica irriducibile. Premettiamo che il Severi dice che due o più di quelle curve son *legate algebricamente* quando la linea costituita da alcune di esse contate certi numeri di volte, e quella costituita dalle rimanenti, pure debitamente contate, sono linee (totali) di uno stesso sistema algebrico irriducibile. Ciò posto, si considerino, sulla superficie F, l curve $C_1, C_2, \ldots, C_l$, di ordini $m_1, m_2, \ldots, m_l$; e s'indichi con n_{ik} in generale il numero delle intersezioni di C_i, C_k (con n_{ii} il grado virtualo di C_i). Si ha allora che: La condizione necessaria e sufficiente affinchè le curve $C_1, C_2, \ldots, C_l$ sian legate algebricamente è che sian nulli tutti i determinanti d'ordine l della matrice

$$|n_{ik}\, m_i|.$$

Questa condizione si può anche mettere sotto forma trascendente: equivale cioè all'esistenza su F di un integrale semplice di 3ª specie, il quale divenga infinito logaritmicamente soltanto nei punti di $C_1, C_2, \ldots, C_l$ (1).

Ciò permette di applicare un teorema fondamentale del Picard relativo alle curve algebriche che costituiscono la totalità delle curve su cui un integrale di 3ª specie ha singolarità logaritmiche. Esso si traduce ora così: Per ogni superficie F vi è un certo numero ϱ tale che su essa si posson fissare ϱ curve algebricamente distinte (*base*), per modo che ogni altra curva della superficie sia legata algebricamente ad esse. Naturalmente la base si può variare: servono per formare una base ϱ qualunque curve $C_1, C_2, \ldots$ il cui determinante $|n_{ik}|$ sia $\neq 0$.

Grazie a questo teorema, ad ogni curva algebrica D di F spettano certi $\varrho + 1$ coefficienti (numeri interi), mediante i quali si esprime il legame algebrico di D con una base fissata $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho$. Questi $\varrho + 1$ numeri caratterizzano le proprietà della curva in sè (come curva di F), e in relazione colle altre curve della superficie. Così essi bastano per esprimere il genere ed il grado di D, come pure il numero delle intersezioni di due curve date di F.

Ognun vede l'interesse e la generalità di questi risultati, e quanto essi sian promettenti anche per l'avvenire della Geometria delle curve tracciate su una data superficie algebrica, e di conseguenza per quella delle curve sghembe algebriche in generale.

Con essi rimane esteso alle curve di una superficie qualunque quel concetto fondamentale della *base*, che, per certe classi particolari di superficie, lo stesso Severi aveva già dato, ispirandosi alla teoria di Hurwitz delle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica. E le ricerche sulla totalità delle curve sghembe giacenti su una data superficie, svolte nelle Memorie che ebbero il premio Steiner nel 1882, trovano qui un'estensione di grande portata.

(1) Ne deriva la proposizione già prima citata da questa Memoria **3**.

Passiamo ai lavori sull'estensione del teorema d'Abel alle superficie. Si sa che, data una curva algebrica di genere p, il teorema d'Abel relativo ai suoi p integrali di 1ª specie serve ad esprimere le condizioni perchè due gruppi di n punti siano *equivalenti*, cioè stiano in una stessa serie lineare di grado n. Orbene si abbia invece sulla superficie F un sistema continuo S di curve algebriche. Condizione necessaria e sufficiente affinchè S sia contenuto totalmente in un sistema lineare è questa: che per ognuno degli integrali semplici di 1ª specie relativi ad F la somma dei valori che esso prende nei punti d'intersezione di due curve di S rimanga costante al variare di queste curve. In ciò consiste quello che il Severi (Memoria **4**) chiama 1° teorema d'Abel per le superficie. Ad esso egli dà anche altre forme, assumendo le due curve nominate infinitamente vicine fra loro, oppure rendendo costanti le somme degl'integrali nei punti in cui una curva variabile di S sega una conveniente curva fissa. Nella Memoria **5** stabilisce delle proposizioni analoghe, in cui però anzi che un sistema continuo S si considerano due sole curve, e si esprime che, sotto certe condizioni, due loro equimultipli convenienti appartengono ad uno stesto sistema lineare [1].

Un'altra sorta di estensione del teorema d'Abel (Memoria **4**) si riferisce invece alle *involuzioni* sulla superficie, ossia sistemi algebrici ∞^2 di gruppi di n punti di F, tali che ogni punto stia in un sol gruppo. Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'involuzione di F sia *regolare* (vale a dire sia regolare la superficie su cui essa si può rappresentare biunivocamente) è questa: che se di ogni integrale semplice di 1ª specie relativo ad F si prendono i valori negli n punti di un gruppo, la somma di questi n valori rimanga costante al variare del gruppo nell'involuzione. Così, ad esempio, se F è regolare, ogni involuzione su F sarà pure regolare. — Come conseguenza di quel teorema, si dimostra poi che: se una superficie contiene un sistema continuo d'involuzioni irregolari, queste saranno tutte *composte* con un medesimo fascio irrazionale di curve.

Citiamo infine, di nuovo nel campo dei sistemi di curve algebriche giacenti su una data superficie, i contributi del Severi alla estensione, già fatta prima di lui, del teorema di Riemann-Roch alle superficie. Sulla F sia data una curva C, che può anche essere riducibile, di grado e genere virtuali n e π, e d'indice di specialità i. Posto per brevità

$$h = p_a + n - \pi + 1 - i\,,$$

sia $h \geq 0$. Allora (Memorie **6** e **8**): 1°) su F esiste *un solo* sistema algebrico completo cui C appartiene come curva totale; 2°) questo sistema algebrico ha dimensione $\geq h + p$, e si compone di ∞^p sistemi lineari non equivalenti di dimensione $r \geq h$. Uno di questi sistemi lineari sarà il sistema lineare completo contenente C. Nella Me-

[1] Alcuni risultati di quelle Memorie **4** e **5** vengono ritrovati geometricamente, senza l'uso degl'integrali, nella Memoria **8**, ove si dimostra pure la seguente proposizione più generale:

Dato su una superficie un sistema continuo di curve algebriche A, se le curve kA (ove k è un dato intero positivo) segano su una curva fissa (curva totale di un sistema continuo infinito, che non sia un fascio irrazionale) gruppi appartenenti ad una stessa serie lineare. le curve A staranno certamente in uno stesso sistema lineare.

moria **7** si estende la relazione $r \geq h$ verificata da questo sistema al caso che C sia una *curva virtuale* (nel qual caso si deve porre $r = -1$, se no $r \geq 0$), dando così il modo di decidere aritmeticamente della possibilità di effettuare la sottrazione di due curve o sistemi di curve.

***

Da quest'analisi risulta come quelle teorie alle quali mirava il benemerito fondatore del premio, ed a cui si riferiva il programma del concorso, abbian fatto, nel periodo di tempo prescritto, per opera di **Francesco Severi** dei progressi essenziali. E però la Commissione è unanime nel decidere che a questo valoroso geometra sia conferita la MEDAGLIA GUCCIA.

Erlangen
Paris } febbraio 1908.
Torino

La Commissione { **M. Noether,**
H. Poincaré,
C. Segre, *relatore.*

INDICE DEL PRIMO VOLUME

PARTE PRIMA.

Relazione sul Congresso.

PARTE SECONDA.

Discorsi, Conferenze, Relazioni lette nelle Sedute generali.